ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРИИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование
заочной формы обучения, группы 02041660
Артемова Александра Сергеевича

Научный руководитель
к. ф.-м. н. доцент
Борисовский И. П.

Рецензент
Головченко Т. В.

БЕЛГОРОД 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития общества одной из главных целей обучения математике в средней школе является развитие личностных качеств обучающегося средствами математики, равно как и его подготовка к последующему получению образования. Чтобы являться полноценным членом социума, человек должен не только обладать определёнными знаниями в некоторых науках, но должен уметь принимать эффективные решения при решении практических задач, осуществлять самостоятельную познавательную деятельность. В связи с этим меняются требования к результату подготовки учащихся на всех ступенях общего образования.

Пересмотр требований к подготовке обучающихся привёл к тому, что одним из основных направлений модернизации общего образования в России явилось внедрение компетентностного подхода. Одной из основных задач компетентностного подхода в среднем общем образовании является не информированность ученика, но развитие его навыков решения различных задач, демонстрирующих связь теоретических и практических знаний. Перемены, происходящие в социуме, требуют совершенствования образовательного процесса, иного определения целей образования, учитывающего личностные потребности и интересы. В связи с этим приоритетным направлением становится обеспечение развивающего потенциала новых образовательных стандартов.

Основополагающие результаты среднего общего образования в рамках компетентностного подхода определяются федеральным государственным образовательным стандартом через набор ключевых (базовых) образовательных компетенций, которые задают основной ориентир выбора предметного содержания и условий организации деятельности обучающегося, позволяющих ему успешно социализироваться, и получать навыки практической деятельности в современном обществе, чем и определяется актуальность настоящей работы.

Объектом исследования данной работы является процесс развития математических компетенций обучающихся при изучении курса стереометрии. Предметом настоящего исследования выступают приёмы развития математических компетенций обучающихся при решении стереометрических задач.

Цель данного исследования – разработать методические рекомендации по обучению школьников стереометрии, способствующие более эффективному развитию их математических компетентностей.

Гипотеза исследования: применение разработанных методических рекомендаций будет способствовать более эффективному развитию математических компетенций учащихся средних школ.

Исходя из поставленной цели, представляется возможным определить задачи исследования: рассмотреть основные особенности компетентностного подхода в обучении, изучить содержание ключевых образовательных компетенций, охарактеризовать математические компетенции учащихся, разработать методические рекомендации для более эффективного развития математических компетенций школьников на уроках стереометрии, подобрать комплекс опорных задач.

Экспериментальная проверка теоретических положений настоящей работы и их внедрение были проведены в 2018 году на базе МБОУ «СОШ № 16 с УИОП» Старооскольского городского округа.

Настоящая работа выполнена на 67 листах, она содержит 36 рисунков, 5 таблиц и состоит из двух глав и трёх приложений.

1 Теоретические основы формирования математических компетенций учащихся

1. 1 Компетентностный подход в образовании

Термины «компетентностный подход» и «ключевые компетентности» стали широко распространены в связи с модернизацией системы образования в России, в частности, введением федерального государственного образовательного стандарта. Компетентностный подход есть совокупность обобщённых положений определения цели образования, отбора его содержания, пути организации процесса образования и оценки результатов образовательной деятельности [11, с 13].

К таким положениям представляется возможным отнести следующие.

1. Главной целью образования является развитие у учеников способности самостоятельно разрешать проблемы в различных сферах деятельности, основываясь на использовании социального опыта, составной частью которого является собственный опыт обучающихся.

2. Содержание образования есть адаптированный социальный опыт решения мировоззренческих, познавательных, политических, нравственных и иных задач.

3. Смысл организации процесса образования заключается в создании условий для формирования у учащихся навыков самостоятельного решения коммуникативных, познавательных, нравственных, организационных и других проблем, составляющих содержание образования.

4. Оценка результатов образовательной деятельности должна основываться на анализе уровня образованности, достигнутого учащимся на данном этапе обучения.

При обсуждении проблемы компетентностного подхода в образовании необходимо прежде ответить на вопрос, какие изменения в обществе обуславливают поиск новой концепции образования и почему имевшийся подход к постановке целей и содержания образования не позволял провести его реформирование. Модернизация образования, т. е. обеспечение соответствия его возможностям и запросам общества, осуществляется постоянно. Это зависит от возможности системы образования изменяться, а эта способность часто зависит от подхода к определению целей, подбору содержания, организации процесса образования, оценке полученных результатов [20 , с 73].

Главными изменениями в обществе, влияющими на ситуацию в образовании, является ускорение темпов развития общества. В итоге школа должна готовить учащихся к жизни, переменам, развивая у них динамизм, мобильность и конструктивность.

Некоторые идеи компетентностного подхода появились при изучении рынка труда и в результате составления требований, складывающихся на рынке труда по отношению к потенциальному работнику. Школа всегда стремится реагировать на изменения в социуме, изменения в требованиях к системе образования. Такая реакция выражается, прежде всего, в изменении программ учебных предметов — как в результате научных достижений, так и в связи с идеологическими изменениями в обществе. Иной путь реагирования на требования общества заключается в дополнении учебного плана новыми предметами [20 , с 83].

Каждое из этих направлений ориентировано на экстенсивное развитие школьного образования, увеличение объёма изучаемого материала. Экстенсивный путь развития представляется не перспективным, так как время, которое можно выделить на образование, ограничено. Кроме того, невозможно достичь иного качества образования (новых образовательных результатов, соответствующих потребностям социума) путём увеличения объёма знаний либо за счёт изменения содержания по отдельным дисциплинам.

Следует использовать иной путь: изменять характер связей и отношений между учебными предметами. Связи и отношения между учебными дисциплинами определяют содержанием целей среднего образования, соотношением общих целей образования и целей освоения учебных предметов.

Под целью понимают ожидаемые результаты деятельности, в данном случае – образовательной. Отличие подходов к постановке целей образования состоит в понимании сущности ожидаемого результата. При традиционном подходе в качестве образовательных целей принимают личностные новообразования, формирующиеся у учеников. Цели обычно формулируют в терминах, описывающих указанные новообразования: ученики должны усвоить понятия, правила, сведения, умения, у них необходимо сформировать определённые взгляды, и т. д. Данный подход к определению образовательных целей продуктивен, особенно в сравнении с имеющейся практикой отождествления педагогических целей и задач, когда цели формулируют в терминах, которые описывают действия учителя (объяснить, раскрыть, рассказать и т. п.) [16 , с 257].

Следует отметить, что определение целей образования через описание личностных качеств учащихся противоречит новым социальным ожиданиям от сферы образования. Традиционный подход к постановке целей образования ориентируется на сохранение экстенсивного развития системы. С позиции данного подхода, чем больше знаний приобрёл учащийся, тем лучше и тем выше уровень его образованности.

Однако уровень образованности, и особенно в современных условиях, определяется не только объёмом знаний или их энциклопедичностью. С позиции компетентностного подхода уровень образованности определяют через способность решать задачи различной сложности, основываясь на имеющихся знаниях. Компетентностный подход не отрицает значение знания, но обращает внимание на способность использовать приобретённое знание. При данном подходе цель образования описывается в терминах, отражающих новые возможности обучающихся, рост их личностного потенциала. В первом случае цель образования моделирует результат, который можно описать, отвечая на вопрос, что узнаёт учащийся в школе. Во втором случае предлагают отвечать на вопрос, чему научится учащийся за время обучения [15 , с 59].

В обоих случаях в качестве конечного результата образования рассматривают развитие определённых качеств личности, в первую очередь, нравственных, и формирование ценностной системы. Существуют различные взгляды на то, какие личностные качества и ценностные ориентиры нужно формировать у современных учеников, но различия не имеют тесных связей с подходом к установлению цели образования. Различие в данных подходах связано с различиями представлений о пути формирования ценностной ориентации и качеств личности ученика. При традиционном подходе к постановке цели исходят из того, что личностных результатов можно достичь, приобретая необходимые знания. Во втором случае как основной путь рассматривают получение опыта самостоятельного разрешения проблем. В первом случае решение проблемы рассматривают как способ закрепления знания, во втором же как смысл образовательной деятельности.

С позиции компетентностного подхода главным непосредственным результатом образовательной деятельности является формирование ключевых компетенций. В современной науке можно встретить различные трактовки понятия «компетенция» [8 , с 101].

Так, в работах Дж. Равена под термином «компетенция» понимают способность субъекта объединять различные (эмоциональные, когнитивные, волевые) компоненты деятельности для достижения результата. Компетенция есть способность (готовность) учащегося использовать усвоенное знание, полученные умения и навыки, равно как и способы жизнедеятельности для решения теоретических и практических задач.

Компетенция – это наперёд заданное требование общества к образовательной подготовке, выражаемое в совокупности взаимосвязанных смысловых ориентиров, навыков, знаний, умений и опыта деятельности школьника по отношению к определённому множеству объектов окружающей реальности, необходимых при осуществлении личностно и социально значимой продуктивной деятельности. Высокий уровень компетенций представляет собой широкий набор умений, навыков, установок. Это один из основных факторов личностного, институционального и общественного развития.

Компетентностный подход при обучении математике как средство повышения качества образования – приоритетное направление модернизации системы обучения в мировом образовательном пространстве. С одной стороны, компетентностный подход акцентирует внимание на результате образовательной деятельности, причём в качестве результата рассматривают не сумму усвоенной информации, а способность человека действовать в разных проблемных ситуациях. С другой стороны, при применении компетентностного подхода результаты образования признают значимыми за пределами системы образования [18 , с 149].

Наиболее приемлемыми в педагогической практике в компетентностном подходе к обучению можно считать идеи О. Е. Лебедева, постулирующего значимость компетентностного подхода с позиции успешной адаптации выпускника к жизни в социуме. Согласно его принципам, выделяют следующие составные компоненты компетентностей обучающихся:

1) общеучебная компетентность – информированность учеников об основных идеях, концепциях, понятиях в предметных областях знаний; сформированность общеучебных умений и навыков, интеллектуальных способностей при самостоятельном получении новых знаний, средств познавательной деятельности и проч.;

2) общекультурная компетентность – готовность учеников к гармоничной интеграции в культурное пространство человечества, к диалогу с окружающими людьми; коммуникативная, эстетическая и этическая культура выпускника и др.;

3) общеметодологическая компетентность – определение целей и умение мыслить самостоятельно, навыки анализа ситуации и видения возникающих проблем, планировать способы рационального их преодоления, управления собственным развитием и деятельностью по достижению поставленной цели, давать оценку своему поведению и событиям в окружающем мире [5 , с 31].

Общеобразовательная средняя школа не в силах сформировать компетенции учащихся на уровне, достаточном для эффективного разрешения проблем в каждой из сфер жизни общества и в любой конкретной ситуации, особенно в условиях быстро изменяющегося социума, когда возникают новые сферы деятельности и новые ситуации. Таким образом, цель школы состоит в формировании ключевых компетенций.

Под термином «ключевые компетенции» в школьном образовании будем понимать способность ученика действовать самостоятельно в ситуации неопределённости при решении актуальных задач. Очевидно, эти способности могу быть реализованы и вне рамок среднего общего образования.

Выделим основные особенности данного определения ключевых компетенций, формируемых в школе. Прежде всего, они включают способность эффективно действовать не только лишь в учебной, но и в иных сферах жизни общества. Кроме того, исследователи говорят о способностях действовать в ситуации, в которой может появиться нужда в самостоятельном определении решения задач, их условий, поиске способа решения, самостоятельной оценке полученного результата [9 , с 23].

При применении традиционного подхода чаще всего образовательные цели отождествляют с педагогическими. Непременное условие достижения педагогических целей составляет соответствие цели учителя и цели обучаемого, причём с каждым новым поколением учащихся важность данного фактора растет, поскольку каждое следующее поколение учеников считается более самостоятельным и независимым от ценностных ориентиров взрослых.

Цели школьного образования являются важным фактором результативности процесса образования, только когда они моделируют результат, соответствующий ожиданию и педагогов, и учащихся. Это могут быть различные, хоть и не альтернативные ожидания. Истинные педагогические цели ориентированы на долгосрочную перспективу, на формирование условий для самостоятельного развития личности. Цель ученика всегда ориентирована на краткосрочную перспективу, на тактический результат, гарантирующий успех в ближайшем будущем. Очевидно, с возрастом масштабы целей учеников изменяются, однако прагматизм непременно сохраняется.

В традиционном подходе к определению цели образования педагогические цели на практике фокусируются на непосредственном результате обучения – усвоении учебного материала. Этот результат может не иметь большой ценности для школьников, следовательно, их цели чаще концентрируются на достижении формального показателя (оценка, получение медали, и проч.) [14 , с 47].

Компетентностный подход к установлению цели среднего общего образования даёт возможность согласовывать ожидание учителя и ученика. Постановка цели школьного образования с позиции компетентностного подхода значит описание возможностей, которые могут быть приобретены школьниками в результате образовательной деятельности.

С данной точки зрения основные цели школьного образования заключаются в следующем:

1. Научить школьника учиться – решать задачи в учебной сфере, а именно: определять цель познавательной деятельности, подбирать нужные источники получения информации, определять оптимальный способ достижения данной цели, оценивать достигнутые результаты, организовывать свою деятельность, сотрудничать с другими учащимися.

2. Научить объяснять явления окружающей действительности, их причины, сущность, взаимосвязь, используя подходящий научный аппарат (т. е. решать познавательные проблемы).

3. Научить ориентироваться в проблемах современной жизни – политических, экологических, межкультурного взаимодействия, т. е. разрешать аналитические вопросы.

4. Научить ориентироваться в мире духовных ценностей, отображающих различные культуры и мировоззренческие концепции, т.е. решать ценностные проблемы.

5. Научить решать задачи, которые связаны с реализацией определённой социальной роли (потребителя, избирателя, гражданина, организатора, пациента и проч.).

6. Научить решать задачи, являющиеся общими для профессиональной и иной деятельности (коммуникативные задачи, задачи поиска информации, принятия решения и т.д.).

7. Научить решать вопросы профессионального выбора, в том числе подготовку к дальнейшему получению образования в высших учебных заведениях [17 , с 71].

Особенная цель математического образования – развитие речевых навыков на уроках математики. Культурный человек умеет излагать свои мысли ясно и кратко, за ограниченное время формулируя главное и отсекая несущественное. С точки зрения компетентностного подхода, математическое образование играет одну из важнейших ролей при достижении поставленных целей. Тем не менее, методы обучения необходимо усовершенствовать в виду изменении в подходе к среднему общему образованию.

С позиции компетентностного подхода исследователи определяют функциональную математическую грамотность как возможность ученика видеть и осознавать роль математики в окружающем мире, высказывать обоснованные математические суждения и использовать математические методы для удовлетворения потребностей, присущих созидательному, заинтересованному и мыслящему человеку.

Уточнение понятия «математическая грамотность» выражается в следующем:

1. Распознавать вопросы, которые появляются в окружающем мире и могут быть решены математическими методами;

2. Формировать данные вопросы на языке математики;

3. Решать указанные вопросы с помощью математических методов;

4. Анализировать использованный метод решения;

5. Анализировать полученный результат с учётом поставленных задач;

6. Формулировать окончательный результат решения задачи [21 , с 97].

Основная идея компетентностного обучения состоит в установке акцента на результате образования, и в качестве указанного результата рассматривается не сумма усвоенных знаний, а способность действовать в различных ситуациях.

Последователи традиционного подхода в образовании полагают, что проявляется отчасти ироническое отношение к обязательному базису образования, каковым выступает объём знаний, полученных школьниками. Нужно отметить, что компетентностный подход не отрицает важности знаний. Однако важно учитывать, что знания представляют различную ценность и что увеличение объёма знаний не значит повышения уровня образованности. Кроме того, повышение уровня образованности часто достигается только при уменьшении объёма знаний, которые обязан усвоить школьник [19 , с 67].

Компетентностный подход к установлению цели общего образования соответствует также объективным нуждам учащихся. Более того, он соответствует и направлению творческого поиска учителя. Этот поиск был связан с реализацией идеи системно-деятельностного подхода, проблемного обучения, инклюзивного образования. Указанные установки отражают попытку разрешить проблему мотивации учебной деятельности учеников.

Компетентностный подход позволяет избежать конфликтов между учеником и педагогом, неизбежных при обучении с элементами принуждения.

Компетентностный подход при обучении математике подразумевает усвоение учениками разного рода умений, дающих им возможность эффективно действовать в жизненных ситуациях. Причём особое значение придаётся умениям, которые позволяют действовать в неопределённой проблемной ситуации, для которой заблаговременно нельзя выработать соответствующих средств. Их необходимо находить при решении схожих ситуаций и достигать желаемых результатов.

Применение компетентностного подхода расширяет возможности влияния образования на личность школьника за счёт установок на саморазвитие в профессиональной, познавательной, сферах и подразумевает качественно новую систему оценки знаний выпускника. Поэтому настоящее положение в семейном воспитании и общем среднем образовании требует создания условий для самостоятельного развития личности, способствующих развитию общеучебных, общекультурных и общеметодологических компетенций [21 , с 181].

Особую трудность представляет собой процесс проверки компетенций, полученных при обучении. Для проверки компетентности учеников на международном уровне используют два типа задач – математические и контекстные.

К контекстным относятся задачи, в которых обеспечены подлинные условия для использования математики при решении. Возможно использование задач, условие которых является гипотетическим, однако если оно не слишком удалено от реальности.

Основная проблема при решении таких задач лежит в области построения модели реальной ситуации. Именно составление модели требует высокого уровня математической подготовки и является результатом обучения, который целесообразно назвать общекультурным (общеобразовательным) [6 , с 227].

Таким образом, компетентностный подход в общем образовании объективно соответствует и социальным ожиданиям в сфере образования, и интересам участников образовательного процесса. Вместе с тем этот подход вступает в противоречие со многими сложившимися в системе образования стереотипами, существующими критериями оценки учебной деятельности детей, педагогической деятельности педагогов, работы школьной администрации. На данном этапе развития общеобразовательной школы осуществить компетентностный подход, скорее всего можно в опытно-экспериментальной работе образовательных учреждений. Наряду с этим необходима теоретическая и методическая подготовка кадров к реализации компетентностного подхода в системе педагогического образования, в том числе в центрах повышения квалификации.

1.2 Содержание ключевых образовательных компетенций

Компетенции выступают в качестве целей образовательного процесса, а компетентность определяют как результат, совокупность личностных качеств специалиста. По мнению И. С. Сергеева, В. И. Блинова, «компетентность – это готовность к выполнению определённых функций, а компетентностный подход в образовании есть не что иное, как целевая ориентация учебного процесса на формирование определённых компетенций» Компетенция – готовность человека к мобилизации знаний, умений и внешних ресурсов для эффективной деятельности в конкретной жизненной ситуации, готовность действовать в ситуации неопределённости» [4, с 9, 23].

Е. О. Иванова под термином «компетенция» понимает следующее: «сплав традиционных знаний, умений и навыков с личностными особенностями школьника, с его самосознанием, рефлексией в ходе познавательной деятельности. Мы понимаем компетентность как владение соответствующей компетенцией, т.е. совокупностью взаимосвязанных знаний, умений, навыков и отношений, связанных с предметом учения, позволяющих выполнять целенаправленные и результативные действия с ним» [19 , с 29].

В основу термина «компетенция» различные исследователи вкладывают разные основания: «психологические новообразования», «отчуждённые требования», «совокупность качеств личности», «готовность действовать», «сплав знаний, умений, навыков»; в это определение все учёные включают умения, знания, опыт и качества личности.

Очевидно, умения и знания зависят от того, о какой компетенции идёт речь, следовательно, их нельзя конкретизировать рамках абстрактного определения, в то время как опыт и качества личности требуют уточнения. Отсутствие практики, опыта и представлений о реальной жизни привело к кризису знаниевого подхода в образовании. Следует погружать учеников в реальные условия, обучать выбирать способы деятельности, подходящие к ситуации.

Основное положение компетентностного подхода состоит в том, что всё изучаемое необходимо включить в процесс употребления. Любое теоретическое знание должно стать средством решения практической задачи. Задача среднего образования – не увеличить информированность учащихся, а помочь им самостоятельно решить проблемы в незнакомой ситуации. Компетенции включают в себя внутреннюю личностную мотивацию, ценностное, смысловое и эмоциональное отношение к деятельности. Качества личности, которые включают в компетенции, обычно объединяют в следующие группы [7, с. 11–12]:

1) когнитивные качества (познавательные) – навык задавать вопросы, находить причины явлений, указывать на непонимание вопроса и пр.;

2) творческие качества – вдохновлённость, внимание к противоречиям, свобода мысли, критичность, наличие обоснованного мнения и др.;

3) организационно-деятельностные качества – способность к учебной деятельности и способность поставить цель и достичь её; рефлексия и др.;

4) коммуникативные качества: обусловлены необходимостью взаимодействовать с людьми и информацией, способность её находить, преобразовывать и передавать, возможность выполнять различные социальные роли в коллективе, использование информационно-коммуникационных технологий;

5) мировоззренческие качества: определяют ценностные характеристики школьника, его склонность к самопознанию; способность найти своё место в мире, коллективе, семье; национальные взгляды, патриотические качества личности [2, с. 11–12].

Присутствие указанных качеств позволяет преобразовывать, дополнять имеющиеся знания, использовать их для решения возникающей задачи. Так же важно определить значение своей деятельности, уметь давать этическую оценку своим действиям. Объединяющим звеном при данном подходе становится понимание. Можно предложить условную формулу компетенции: понимание + знания + умения + опыт деятельности.

Таким образом, компетенция есть совокупность знаний, умений и опыта в некоторой области деятельности и понимание человеком ценности данной деятельности. Под термином «компетентность» понимают владение конкретной компетенцией, равно как характеристику человека, связанную с эффективностью его деятельности. Компетенция есть что-то, объективно существующее в реальности, безоценочное – нечто, что можно сформировать, развить, совершенствовать; компетентность – это характеристика личности, неотделимая от неё, её умения, измеряемые в сопоставлении с идеалом.

В процессе определения целей и задач образования, описании содержания предмета и ожидаемых результатов обучения использовать понятие «компетенция» целесообразно: это позволит учителю избегать терминологической путаницы.

Представляется возможным компетенции классифицировать, в частности, по уровню или по виду. По уровню выделяют ключевые (универсальные, базовые, элементарные), метапредметные и предметные компетенции. Ключевые компетенции – «наиболее общие (универсальные) навыки и умения, которые позволяют человеку понять ситуацию и достигнуть результатов в личной и профессиональной жизни в условиях возрастающего динамизма современного общества [14, с. 8].

Ключевые компетенции являют собой универсальные интеллектуальные средства, методы, приёмы достижения поставленных перед человеком целей. Они носят надпрофессиональный и метапредметный характер и представляют собой основу жизни и деятельности человека. Их усвоение обеспечит функциональную грамотность, она в свою очередь – социализацию, возможность стать эффективным в профессиональной деятельности.

Исследования данного вопроса широко освещены за рубежом. Так, Совет Европы выделил пять ключевых компетенций, которыми «должны быть оснащены молодые европейцы» [20, с 53]:

1. Политические и социальные – возможность брать на себя ответственность, принимать участие в принятии решений, разрешать конфликты мирно, принимать деятельное участие в поддержании и улучшении действующих демократических институтов.

2. Компетенции, связанные с жизнью в мультикультурном обществе – толерантность, осознание различий между людьми, уважение других, умение жить с представителями других культур, языков и религий.

3. Компетенции, относящиеся к владению устной и письменной речью, особенно важные для работы и социальной жизни, указание на то, что людям, которые ими не владеют, угрожает изоляция (особое значение приобретает владение иностранными языками).

4. Компетенции, связанные с информатизацией общества: владение информационными технологиями, умение их применять, способность к критическому суждению в отношении информации, распространяемой СМИ и рекламой.

5. Способность учиться в течение всей жизни как основа непрерывного образования [20, с 59].

Помимо западных существуют различные отечественные классификации, в состав которых включены ценностно-смысловая, учебно-познавательная, общекультурная, коммуникативная, информационная, социально-трудовая компетенции и компетенция личностного самосовершенствования. Весьма полная классификация представлена в работах исследователя А. В. Хуторского:

1. Средства мировоззренческой ориентации (ценностная, смысловая компетенции);

2. Умения и знания данной сфере (коммуникативная, информационная, учебно-познавательная, социально-трудовая компетенции);

3. Круг проблем, по которым необходимо быть осведомлённым (общекультурная компетенция);

4. Освоение способа духовного, физического, интеллектуального саморазвития.

При этом образовательные компетенции дифференцируются по тем же уровням, что и содержание образования:

1) ключевые (реализуются на метапредметном уровне);

2) общепредметные (реализуются на содержании, общем для нескольких предметов);

3) предметные (формируются в рамках данного предмета) [7 , с 31].

Состав ключевых компетенций зависит от ценностей, которые считают значимыми на существующем этапе развития общества. Однако можно вычленить минимум ключевых компетенций, которые слабо зависят от окружающих факторов и ориентированы на долгосрочную перспективу. В этот минимум входит коммуникативная компетенция, без которой невозможна социализация человека. Значит, одна из задач современной школы – формирование коммуникативной компетенции учеников в течение всех лет обучения и посредством всех учебных предметов.

Рассмотрим некоторые подходы к выбору ключевых компетенций. Исследователь Г. А. Сергеев выделяет четыре ключевые компетенции:

1) информационные (отбор и передача информации);

2) коммуникативные (речевые и языковые);

3) ролевые (социальные, трудовые, политические);

4) самосовершенствования (духовного, интеллектуального, физического, эмоционального развития) [7].

Другие авторы также выделяют четыре элементарные ключевые компетенции: информационная, коммуникативная, кооперативная, проблемная.

Представляется важным не столько совпадение, сколько взаимосвязь ключевых компетенций: информация → коммуникация, общение → сотрудничество, кооперация в процессе ролевого общения → решение задач, которые возникают в процессе коммуникации. С одной стороны, необходимо отметить, что без выделяемых ключевых компетенций невозможна жизнь в обществе. С другой стороны, именно они создают высший, личностный уровень развития ученика, и им необходимо уделять больше внимания в школе (особенно в начальной), когда происходит личностное становление школьника.

Несомненно, такая схема не отображает всё многообразие компетенций и отношений между ними. Содержание ключевых компетенций может совпадать. Как пример можно привести ситуацию, в которой носителем информации выступает человек, одновременно активизируются информационная и коммуникативная компетенция. Общими для ключевых компетенций являются социальная обусловленность, смысловая ценность компетенции и её практическая значимость [19 , с 73].

Процесс образования, основанный на компетентностном подходе, шире, чем просто учебный процесс. А значит, он пронизывает различные сферы жизни ученика (внеучебную, учебную, сферу дополнительного образования и т.д.). Несмотря на мнимую новизну, компетентностный подход не отличается революционностью. Цель ключевых компетенций сводится к базовым положениям педагогики: научить учиться, признать право ученика определять цель и траекторию образования, использовать практико-ориентированные ситуации и интерактивные методики обучения.

Подводя итог, можно заключить, что ключевые компетенции представляют собой универсальные методы, средства, способы достижения значимой для ученика цели. Они носят метапредметный характер и составляют основу жизнедеятельности человека. Овладеть ими должен каждый член социума. Их усвоение обеспечит функциональную грамотность, социализацию, потенциальную эффективность в профессиональной деятельности.

1.3 Характеристика математических компетенций учащихся

Математика как учебная дисциплина располагает определёнными средствами и возможностями в формировании ключевых компетенций. Невозможно представить себе учебный предмет, в котором отсутствует математика или её методы. Образы математических объектов окружают учеников в повседневной жизни. В отличие от многих других учебных дисциплин математика учит не только простому заучиванию формул, но формирует способность к анализу, пониманию сущности применяемых законов, рационализировать решение задачи. Освоение математики предполагает различать аргументированные положения от бездоказательных, оптимизировать свои действия, видеть манипуляцию и противостоять ей, самостоятельно вырабатывать и принимать решения [3, с 241].

Без сомнения можно утверждать, что на уроках математики формируются ключевые компетенции, которые являются основными для существования личности в обществе. Математические компетенции – это способности структурировать данные: анализировать ситуацию, выявлять математические отношения, строить математическую модель и преобразовывать её, интерпретировать полученный результат. Математические компетенции ученика способствуют адекватному применению математики для разрешения появляющихся в повседневной жизни задач.

Компетентность проявляется при применении знаний и навыков в ходе решения задач, отличных от тех, в которых они усваивались:

1) произведения расчетов по формулам, содержащим радикалы, степени, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочники и простые вычислительные устройства;

2) построения и исследования математических моделей, анализа с помощью функций реальных зависимостей, представленных графически;

3) интерпретации графиков реальных процессов;

4) разрешения практических задач, в т. ч. задач на наибольшее и наименьшее значения с применением методов математического анализа;

5) исследования числовых данных, представленных в виде диаграммы, графика; анализа статистической информации;

6) анализа несложных практических ситуаций, основываясь на изученных формулах и свойствах фигур;

7) нахождения длины, площади и объёма объектов при решении прикладных задач (с использованием справочников и вычислительных устройств) [1].

При ближайшем рассмотрении повседневных жизненных задач, для решения которых требуются знания и умения, формируемые при обучении математике, легко видеть, что перечень необходимых математических компетенций крайне невелик:

1) умение проводить вычисления, в т. ч. округление и оценку результатов действий, использовать при подсчётах простые формулы;

2) умение извлечь и понять информацию, представленную в форме графиков, диаграмм, таблиц, схем и проч.;

3) умение применять знание элементов теории вероятности для характеристики реальных процессов и явлений;

4) умение вычислять длину, площадь и объём объекта при решении прикладных задач [2, с 101].

В педагогической науке принято выделять три уровня математической компетентности: уровень воспроизведения, уровень установление связей, уровень рассуждений. Первый уровень (воспроизведения) представляет собой непосредственное применение в знакомой ситуации известных законов, узнавание математических объектов и свойств, выполнение стандартных процедур, применение изученных алгоритмов, работа со стандартными известными выражениями и формулами, произведение вычислений.

Второй уровень (установления связей) строится на репродуктивной деятельности при решении задач, которые, не являясь типичными, знакомы ученику или выходят за границы известного лишь в очень малой степени. Содержание задачи показывает, материал какого раздела математики надо применять и какие изученные методы использовать. Обычно в таких заданиях присутствует больше требований к анализу решения, они предполагают определение связи между различными представлениями ситуации, данной в задании, или установление связи между данными в условии задачи.

Третий уровень (рассуждений) понимается как развитие предыдущего уровня. При решении заданий данного уровня необходимы некоторая интуиция, мыслительная деятельность и творчество в выборе математических инструментов, интегрированные знания из различных разделов курса математики, самостоятельное определение алгоритма решения. Задачи, как правило, включают больше данных, от учеников часто требуют найти закономерность, обобщить и объяснить или обосновать полученный результат [7, с 113].

Стоит отметить, что компетентность нельзя понимать лишь как сумму предметных знаний и умений. Это приобретаемое в результате обучения и жизненного опыта новое качество, связывающее знания и умения ученика с набором обобщённых параметров качества подготовки, в т. ч. со способностью применять полученные знания при решении задач, появляющихся в повседневной практике. В частности, в ОГЭ и ЕГЭ последовательно реализуют проверку всех уровней математической компетентности школьников.

Таким образом, математическая компетенция – это возможность структурировать данные, выделять математические отношения, строить математическую модель реальной ситуации, исследовать и преобразовывать её, интерпретировать полученный результат. Математическая компетенция ученика способствует адекватному применению математики при решении появляющихся в реальной жизни задач. Совокупность компетенций, наличие знаний и опыта, необходимых для эффективной деятельности в какой-либо предметной области, называют компетентностью. Принято три уровня математической компетентности: уровень воспроизведения, уровень установление связей, уровень рассуждений.

2 Особенности обучения учащихся стереометрии в свете развития у них математических компетенций

2.1 Методика обучения учащихся построению сечений многогранников, способствующая развитию математических компетенций

Приступая к изучению стереометрии, ученики встречают определённые трудности, вызванные, как правило, недостаточно развитым пространственным мышлением. Им бывает тяжело представить взаимное расположение плоскостей и прямых в трёхмерном пространстве, трудно определить, параллельны ли плоскости и прямые, найти линию пересечения плоскостей в пространстве и проч. Более того, при изучении первых аксиом у школьников часто встаёт вопрос, для чего их необходимо изучать и где можно применить [13, с 19].

Одной из лучших, на наш взгляд, демонстрацией изученных школьниками теорем и аксиом являются задания на построение сечений многогранников. Вероятно, по этой причине в современных школьных учебниках геометрии, начиная с первых тем, приводят такие задания; на вещественных моделях известных ученикам многогранников проще доказать представленные теоремы и аксиомы. Одними из основных целей при изучении построения сечений являются: овладение основными методами построения и способов применения их при решении заданий для иллюстрации соотношений и свойств геометрических объектов; развитие математических компетенций учеников, восприятия окружающего пространства геометрическими средствами, конструктивных умений и творческой деятельности, равно как развитие точности, эстетического восприятия, сообразительности.

Задачи на построение сечения многогранника занимают важное место в процессе формирования математических компетенций учеников (в первую очередь, их пространственного мышления), но в курсе геометрии таким заданиям уделено мало внимания; подготовка учеников к построению сечений должна начинаться до собственно изучения методов построения сечений.

При построении сечений многогранников ученик будет развивать следующие математические компетенции:

1) определение пространственных соотношений;
2) выделение пространственных свойств и отношений;
3) мысленное изменение пространственного образа;
4) произвольное изменение начала отсчета;
5) удержание пространственного образа в представлении;
6) владение геометрическими преобразованиями [12, с 89].

Подготовительная работа при обучении построению сечений многогранников должна строиться вокруг формирования и развития названных компетенций. Некоторые перечисленные компетенции начинают формироваться ещё в начальной школе; введение в 5-6 классах понятия прямоугольного параллелепипеда и метода изображения его на плоскости способствует развитию некоторых указанных компетенций. Выполнение в 7 классе геометрических построений также готовит ученика к решению заданий на построение сечения многогранника, поскольку школьники таким образом учатся анализировать построение и доказывать его правильность.

Подготовительную работу для изучения построения сечений многогранников необходимо проводить при изучении первых тем стереометрии. Покажем это на примерах.

Тема «Параллельность прямых, прямой и плоскости»

I. На рисунке 1 точки *M, N, Q, P* - середины отрезков *DB*, *DC*, *AC* и *AB.* Найти периметр четырехугольника *MNQP,* если *AD* = 12 см, *BC* = 14 см. Назовите на чертеже параллельные прямые и прямые, которые параллельны плоскостям, содержащим грани пирамиды. Можно ли утверждать, что плоскость *MNQP* разделяет пирамиду на два многогранника? В случае утвердительного ответа назовите эти многогранники.

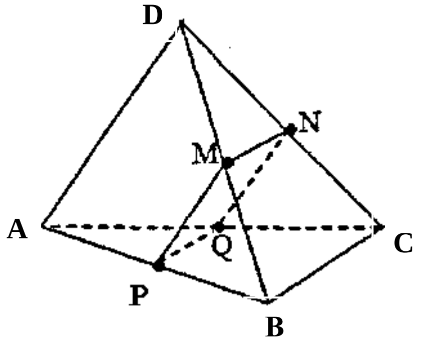


Рисунок 1 – Построение сечения

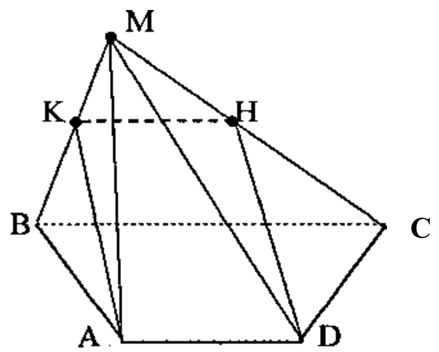


Рисунок 2 – Построение точки Н

II. ABCD – трапеция (рисунок 2), BC || AD, BC = 12 см. Точка М не лежит в плоскости ABCD, К – середина отрезка ВМ. Докажите, что плоскость ADК пересекает отрезок МС в некоторой точке Н, постройте точку Н, найдите длину отрезка КН. Какой фигурой является ADНК? Какими ещё фигурами мог быть этот четырехугольник, если изменить расположение точки М? Перечислите изображённые на чертеже параллельные прямые и прямые, параллельные граням пирамиды [4, с 359].

Тема «Взаимное расположение прямых в пространстве.

Угол между двумя прямыми»

I. На рёбрах пирамиды отмечены точки М и N (рисунок 3а). Укажите точки пересечения прямой MN с плоскостями всех граней тетраэдра.

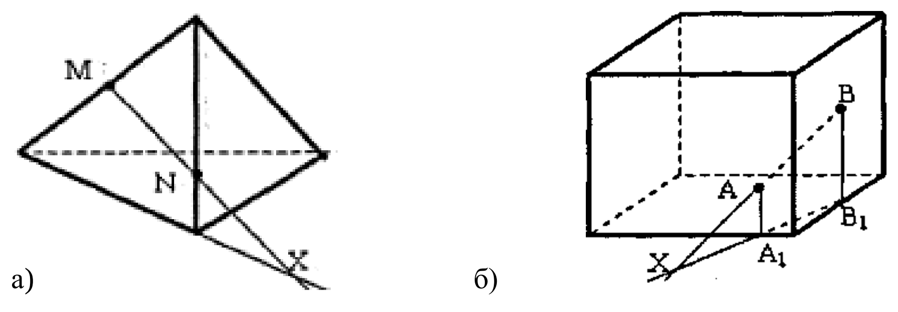


Рисунок 3 – Построение точки пересечения прямой и плоскости

II. Точки A и B лежат на смежных боковых гранях куба (рисунок 3б). Построить точку пересечения прямой AB с плоскостью нижнего основания.

III. Постройте точки пересечения прямой с плоскостями граней тетраэдра (рисунок 4).

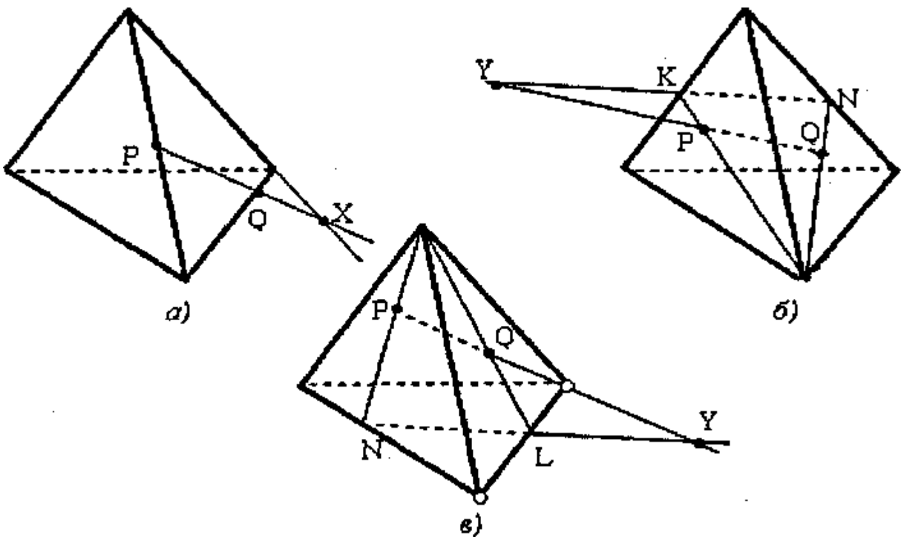


Рисунок 4 – Построение точек пересечения прямой PQ с плоскостями граней

IV. Точки P, Q и R лежат в плоскостях граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, CC_1D_1D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно (рисунок 6). Перечислите все скрещивающиеся и параллельные прямые, имеющиеся на чертеже. Определите, лежат ли в одной плоскости точки а) R, Q, Q_1, R_1; б) A_1, P, Q [10, с 211].

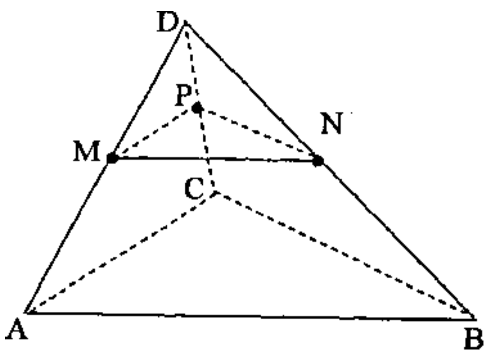


Рисунок 5 – Треугольная пирамида

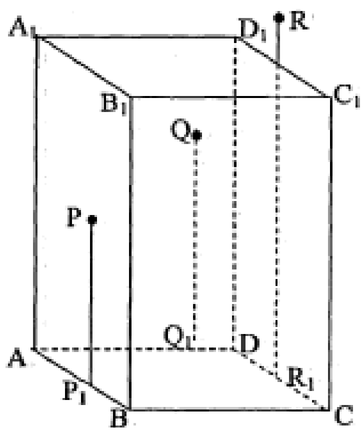


Рисунок 6 – Прямоугольный параллелепипед

Тема «Параллельность плоскостей»

I. Точка D не принадлежит плоскости ABC, точки M, N и P - середины отрезков DA, DB и DC соответственно (рисунок 5). Как относительно друг друга расположены плоскости ABC и MNP? Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна 46 см^2. По какой прямой пересекаются плоскости DPN и MNB?

II. Плоскость BKL, проходящая через середины двух ребер AD и AC плоскости ADC и вершину B, не принадлежащую ADC, параллельна DC (рисунок 6). Найдите периметр и площадь треугольника BKL, если длины всех ребер тетраэдра BADC равны 10 см. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости а) BKD и ABB; б) KLC и ABD; в) ALK и BLC.

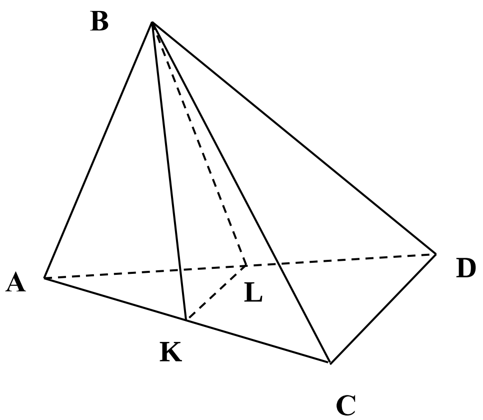


Рисунок 6 – BKL – сечение тетраэдра

Стоит отметить, что предлагаемые к решению опорные задачи не только подготавливают учащихся к решению заданий на построение сечений, но и способствует развитию их математических компетенций [13, с 53].

По нашему мнению, рассмотрение заданий на построение сечений многогранников в течение нескольких уроков принесет меньше (чем могло бы) пользы как для развития математических компетенций учеников, так и для усвоения методов решения таких заданий. Исходя из этого, на начальном этапе следует определить основные термины, методы решения указанных заданий, в последствии же использовать эти задачи в других разделах стереометрии в качестве средства развития математических компетенций.

На первом этапе изучения построения сечений познакомим учащихся с основными терминами (сечение, секущая плоскость, след плоскости) и приёмом нахождения следа секущей плоскости. Необходимо повторяет понятия «проекция точки на плоскость» и «проекции прямой на плоскость» (актуализация опорных знаний).

I. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости α и МРК (рисунок 7).

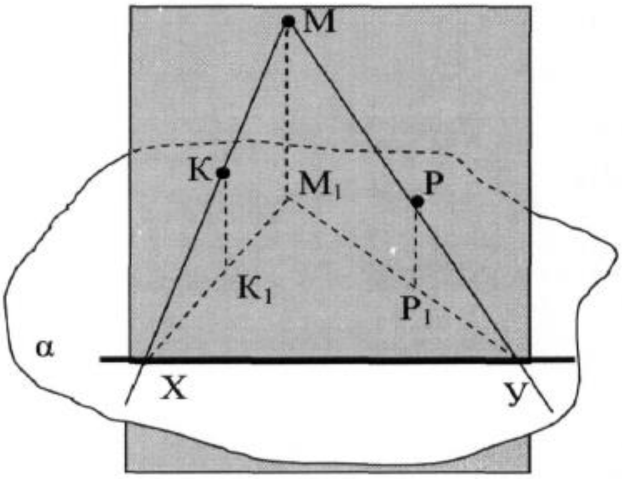


Рисунок 7 – Пересечение плоскостей

Следует вместе с учащимися отметить: точка пересечения прямой с плоскостью принадлежит и прямой, и плоскости. Далее, каждая прямая однозначно задаётся двумя точками. Целесообразно на данном этапе создать для учеников проблемную ситуацию: «Какими двумя точками можно определить прямую, по которой пересекаются плоскости α и МРК?». Опыт показывает, что большая часть учеников определят эти точки как точки пересечения прямых МР и МК с плоскостью α.

С целью развития у учеников пространственного мышления можно дополнить задачу следующими вопросами:

1. Пусть точка К прилежит прямой ХУ. Значит ли это, что точка Р принадлежит прямой ХУ?

2. Определите, можно ли построить линию пересечения данных плоскостей, если плоскость была бы заданна прямой и точкой, не лежащей на

линии пересечения [3, с 181].

Далее целесообразно представить ученикам определение следа плоскости: «Линию пересечения плоскости MPK с плоскостью проекции α называют следом плоскости MPK на плоскости α». В качестве примера задания на закрепление усвоенного термина приведём следующее.

II. Построить след плоскости PQR на плоскости α (рисунок 8).

При решении данной задачи следует отработать способ построения следа плоскости с подробным комментированием:

а) через две данные точки проведём прямую (P и Q на рисунок 8);

б) построим проекции этих точек (P_1 и Q_1);

в) построим прямую P_1Q_1

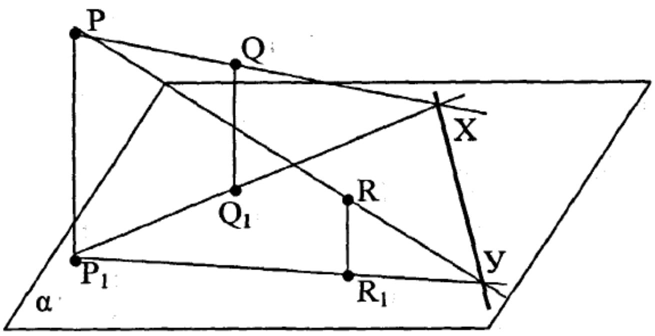


Рисунок 8 – Построение следа плоскости

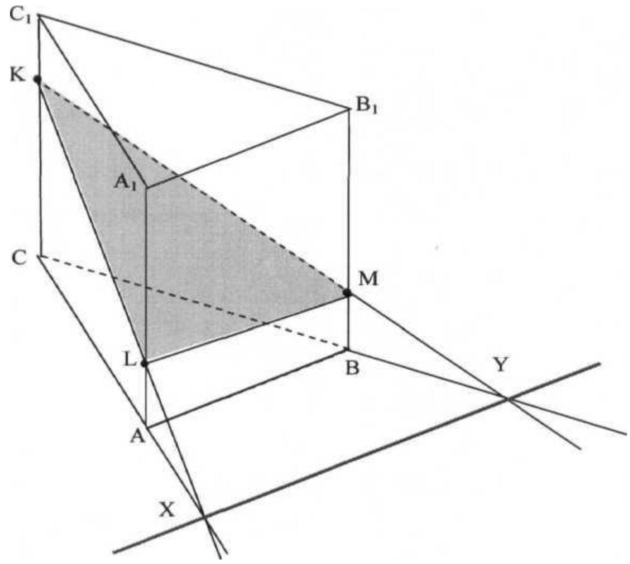


Рисунок 9 – Линия пересечения плоскостей KLM и ABC

г) найдём точку X пересечения прямых PQ и P_1Q_1 (она принадлежит следу);

д) для нахождения второй точки У следа плоскости, выберем две другие точки (P и R) и повторим описанные операции.

II. Построить линию пересечения плоскостей KLM и ABC (рисунок 9).

Ход решения:

1. $KM \cap K_1M_1 = Y$;

2. $KL \cap M_1N_1 = X$;

3. XY – искомая прямая.

III. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, E – середина отрезка BB_1, F – середина отрезка A_1D_1, G – середина отрезка DC (рисунок 10). Постройте линии пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и EFG.

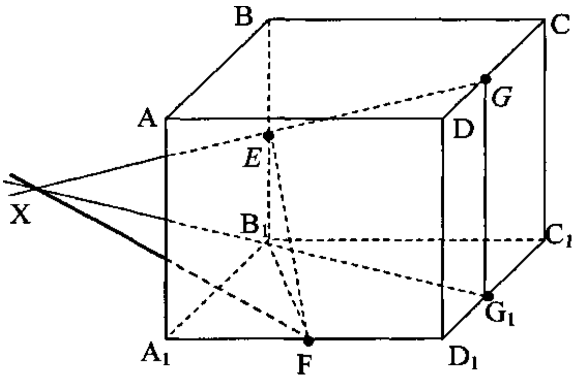


Рисунок 10 – Линия пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и EFG

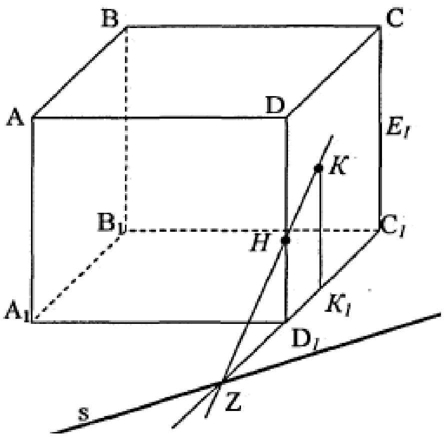


Рисунок 11 – Точка пересечения следа секущей плоскости с ребром

Данные задания объединяет построение сечения многогранника методом следов. Если след секущей плоскости не дан, секущая плоскость задаётся тремя точками, лежащими на поверхности многогранника. Если же след секущей плоскости задан, сечение можно строить следующим образом:

а) выберем грань, содержащую известную точку K искомого сечения (рисунок 11);

б) найдём точку Z пересечения следа s с линией пересечения двух плоскостей: той, в которой лежит след ($A_1B_1C_1D_1$), и той, которая содержит точку K;

в) проведём прямую KZ, пересекающую ребро в точке H [10, с 251].

Повторить с учениками центральное проецирование можно при решении другого задания.

IV. Постройте сечение пирамиды SABCD плоскостью, при заданном её следе s на плоскости нижнего основания и точка E, лежащая в грани SBC (рисунок 12).

Ход решения.

1. E_1 – проекция точки E – принадлежит BC. $BC \cap s = X$. Так как прямая BC является проекцией прямой XE, то точка $B = T_1$ является

проекцией точки T => SB ∩ XE = T.

2. XE ∩ SC = R,

3. DC ∩ s = Z,

4. ZR ∩ SD = P,

5. AB ∩ s = Y,

6. YT ∩ SA = Q. PQRT – искомое сечение.

Как показала практика, при решении заданий на построение сечений, ученики не уделяют должного внимания исследованию решения, хотя такое исследование способствует развитию математических компетенций школьников. Поэтому учителю следует задать следующие вопросы:

1. Мысленно постройте плоскость QAC. Совпадёт ли она с плоскостью QSR?

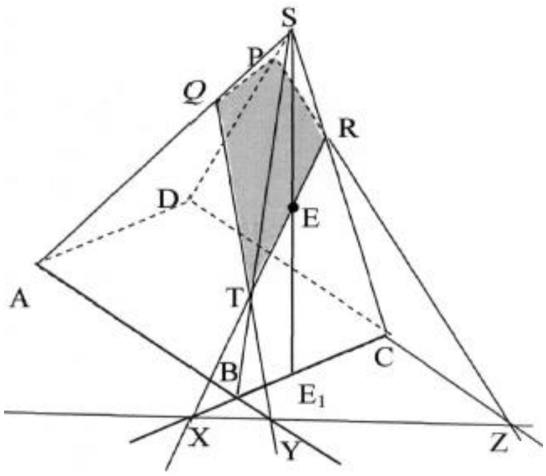


Рисунок 12– Построение сечения пирамиды SABCD

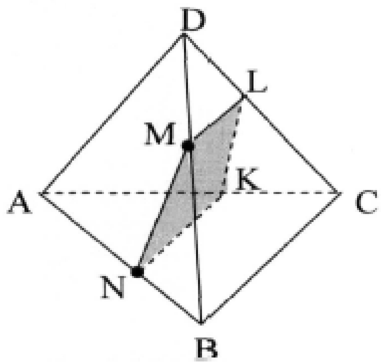


Рисунок 13 – Построение плоскости сечения MNLK

Пересекаются ли с ней прямые а) XY; б) SD?

2. Назовите фигуру, которая получилась в сечении.

3. Какие фигуры могут получиться в сечении четырехугольной пирамиды?

Подробно проанализируем этапы решения заданий на построение сечений, рассмотрев следующую задачу.

V. Постройте сечение пирамиды DABC плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельной прямой BC (рисунок 13).

Ход решения

1. Чтобы построить сечение многогранника, в каждой его грани следует найти линию пересечения секущей плоскости с этой гранью. Плоскость сечения пересекает грань ADB по прямой MN. По условию плоскость сечения параллельна BC, поэтому линии её пересечения с гранями ABC и DBC параллельны BC.

2. Построение

1) В плоскости ADB проведём MN.

2) В плоскости ABC проведём NK || AC, получим точку K ∈ BC.

3) В плоскости BCD проведём ML || BC, получим точку L ∈ DC.

4) Четырехугольник KLNM – искомое сечение.

3. Доказательство. Плоскость KLNM параллельна прямой BC по признаку параллельности прямой и плоскости. У задачи единственное решение, поскольку отрезок AC пересекает плоскость MNLK в единственной точке K, а через три точки M, N и K проходит единственная плоскость.

Как показали результаты эксперимента, задания на построение сечения будут лучше способствовать развитию математических компетенций у учеников, если:

1) использовать разные изображения одного многогранника;

2) точки, задающие секущую плоскость, определять разными способами (на вершинах, рёбрах, гранях);

3) в ходе решения задания проводить исследование;

4) решать задание несколькими способами.

Приведём несколько примеров. Как было сказано выше, задания на построение сечения многогранника необходимо использовать при изучении стереометрии в различных темах курса.

Тема «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

I. Через точку O пересечения диагоналей квадрата со стороной a проходит прямая OK, перпендикулярная плоскости квадрата. Найти расстояние от точки K до вершин квадрата и площадь диагонального сечения полученной четырехугольной пирамиды, если OK = b.

II. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, которая проходит через вершины A, C и точку M отрезка A_1D_1 (рисунок 14). Какой многоугольник получился в сечении?

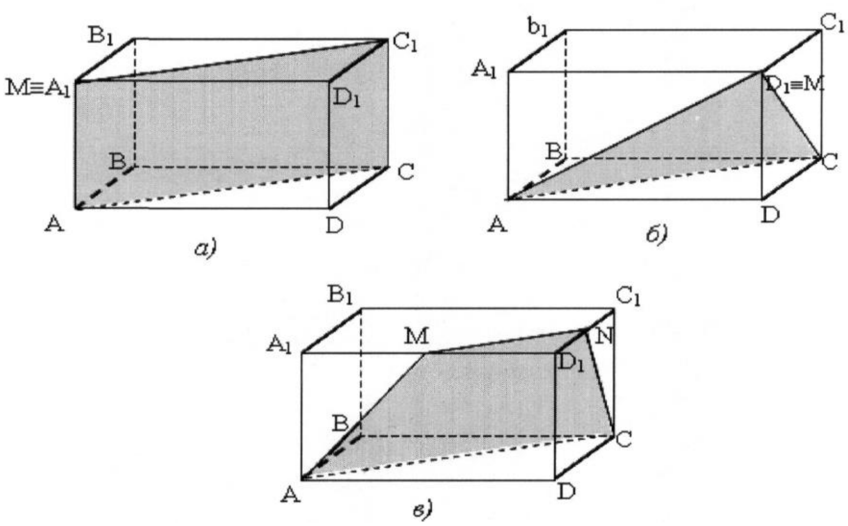


Рисунок 14 – Варианты построения сечения

Поскольку положение точки M в задаче не уточнено, возможны частные случаи, рассмотреть которые также необходимо. Можно задать учащимся дополнительные вопросы [6, с 127].

1. Всегда ли плоскость сечения будет перпендикулярна плоскостям оснований?

2. Как расположить на рёбрах многогранника точки, определяющие сечение, чтобы оно было перпендикулярно плоскостям оснований?

Тема «Многогранники»

I. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 8 см, боковое ребро – 6 см. Найти площадь сечения, проходящего через точки A, B и C, где B – середина бокового ребра, а C – середина стороны нижнего основания (рисунок 15 а).

II. В правильном тетраэдре DABC ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь сечения, проведённого через точки K и L, где K – середина BC, L – середина DC и сторона основания пирамиды равна 12 см (рисунок 15 б).

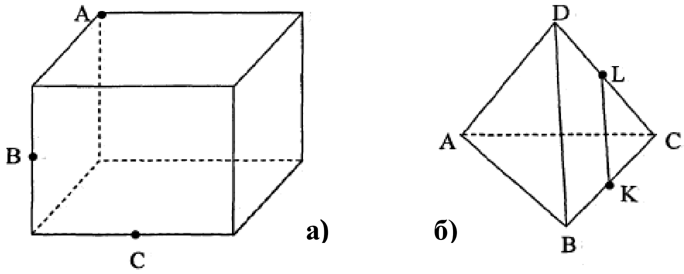


Рисунок 15 – Изображения куба и тетраэдра

III. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом φ. Через катет, противолежащий этому углу, и противоположную этому катету вершину основания построено сечение, составляющее с плоскостью основания угол ω. Найти отношение площади боковой поверхности призмы к площади сечения.

Тема «Метод координат в пространстве»

I. Дана четырехугольная пирамида SOACB, её рёбра OA, OB и OS взаимно перпендикулярны и имеют длины: OA = a, OB = b, OB = h. В основании пирамиды лежит прямоугольник OACB, K ∈ AC, AK = c. Найдите угол φ между плоскостями SBC и SOK (рисунок 16).

В ходе решения этой задачи ученик систематизирует знания, полученные в процессе изучения темы «Метод координат». Можно дополнить задачу следующими вопросами.

1. Назовите многогранники, образовавшиеся при рассечении пирамиды плоскостью SOK.

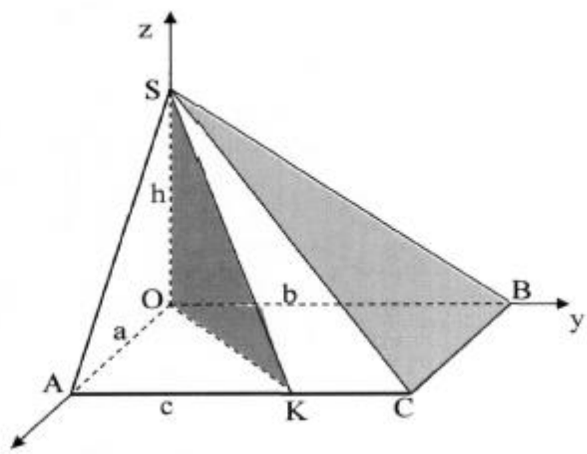


Рисунок 16 – Задача I

2. Перпендикулярны ли плоскости SOK и AOBC?

3. Как определяют угол между двумя плоскостями?

Многим ученикам трудно по данному рисунку представить линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями SBC и SOK, поэтому угол между плоскостями будем искать, вычислив угол между их нормальными векторами [10, с 211].

Ход решения. Введём прямоугольную декартову систему координат, как изображено на рисунке 16. Легко определить тогда координаты точек: O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(a, b, 0), S(0, 0, h), К(a, c, 0).

С учениками следует вспомнить, что вектор, определённый через векторное произведение ортогональных векторов, ортогонален каждому из данных векторов. Рассмотрим векторы $\vec{p} = [\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{SB}], \vec{q} = [\overrightarrow{OS} \times \overrightarrow{OK}]$. $\vec{p} \perp (SBC), \vec{q} \perp (SOK) \implies \angle\varphi = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}})$.Зная координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ (a, 0, 0), $\overrightarrow{SB}$(0, b, –h), $\overrightarrow{OK}$(a, c, 0), $\overrightarrow{OS}$(0, 0, h), вычислим координаты векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$:

$$[\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{SB}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & -h \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & -h \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -h \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = \vec{j} \cdot ah + \vec{k} \cdot ab$$

$$[\overrightarrow{OS} \times \overrightarrow{OK}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & c & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & h \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & h \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot ch - \vec{j} \cdot ah.$$

Таким образом, $\vec{p}$ (0, ah, ab), $\vec{q}$ (ch, –ah, 0). С помощью формулы скалярного произведения этих векторов определим косинус угла между ними (учтём, что при выборе указанной системы координат числа a, c, h положительны):

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| cos\varphi,$$

$$cos\varphi = -\frac{a^2h^2}{\sqrt{a^2b^2 + a^2h^2}\sqrt{h^2c^2 + h^2a^2}} = -\frac{ah}{\sqrt{b^2 + h^2}\sqrt{c^2 + a^2}},$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{ah}{\sqrt{b^2 + h^2}\sqrt{c^2 + a^2}}\right).$$

II. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ N – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD, $M \in A_1D_1$, $P \in CC_1$, причём $A_1M : MD_1 = 4:1$, $CP : PC_1 = 1:3$. Через точки N, Ми P проведено сечение куба. Найдите угол между прямой C_1D_1 и плоскостью сечения (рисунок 17).

III. Основанием прямой треугольной призмы $KMNK_1M_1N_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом длины a. Высота призмы равна b. $R \in KM$, $Q \in MM1$, $P \in (KK1N1N)$, причём $KR : RM = 1 : 3$, $MQ : Q_1M = 1 : 5$, $PP1 = b : 3$, $NP_1 : P_1K = 2 : 3$. Через точки P, Q, R построено сечение. Найдите синус угла между прямой M_1K_1 и плоскостью PQR.

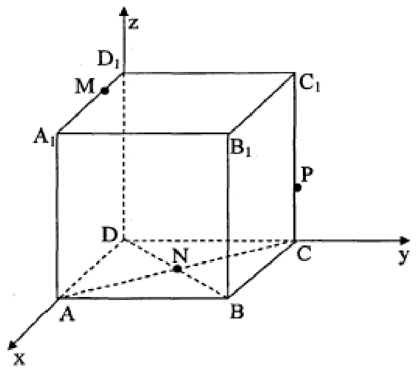


Рисунок 17 – Введённая система координат, задача III

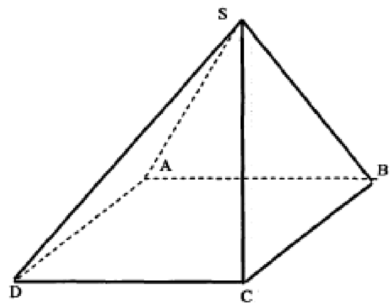


Рисунок 18 – Изображение правильной четырёхугольной пирамиды

С целью развития у учащихся способности оперировать пространственными образами, менять структуру объекта, а также видеть процесс преобразования с разных точек зрения, можно предложить учащимся следующую задачу. Её можно рассмотреть как в теме «Многогранники», так и в параграфе «Движения» темы «Метод координат в пространстве». Несмотря на то, что во многих учебниках геометрии поворот вокруг оси не рассматривается, в классе с углублённым изучением математики это следует разобрать.

IV. Дан чертёж правильной четырехугольной пирамиды (в основании – квадрат, боковые грани – равнобедренные треугольники, рисунок 18). Мысленно рассеките пирамиду плоскостью, которая проходит вершину S и диагональ основания AC. Поверните одну из отсеченных частей; так, чтобы совпали вершины B и D. Изобразите полученную фигуру, укажите её название.

Исходя из изложенного, опираясь на результаты исследования, приведём некоторые требования, предъявляемые к задачам на построение сечений, направленным на развитие математических компетенций школьников при обучении стереометрии:

1. В системе задач должны содержаться как задания на создание пространственного образа, так и на оперирование им.

2. В наборе задач необходимо соблюдать строгую последовательность: при обучении построению сечений следует переходить от простого к сложному.

3. Предлагаемые задания должны препятствовать появлению стереотипа изображения фигур; должны содержаться задачи, при решении которых ученик станет строить геометрические тела и сечения в различных положениях.

4. Набор заданий должен вырабатывать у учеников верные представления об изучаемых объектах.

5. При решении заданий следует реализовывать как предметные, так и метапредметные связи.

Описанные выше способы развития математических компетенций школьников при обучении построению сечений необходимы, но не достаточны. Достаточным же условием для наиболее эффективного развития математических компетенций является одновременное применение традиционных средств обучения и средств ИКТ. Поэтому перейдём далее к описанию методики обучению построению сечений, которая учитывала бы сделанное замечание.

2.2 Организация обучения построению сечений, способствующая развитию математических компетенций на уроках стереометрии

Начиная изучать построения сечений многогранников, школьники уже знакомы с понятиями точки, следа плоскости, пересечения прямой и плоскости. Поэтому, следуя технологии системно-деятельностного подхода, на этапе самоопределения к деятельности следует создать условия для появления внутренней потребности в деятельности («хочу») и определить содержательную область («могу»). Для этого можно с помощью информационно-коммуникационных технологий пробудить у учеников интерес к изучаемой теме; у них появится потребность в изучении вопросов «Почему у одного многогранника сечением может быть пятиугольник, треугольник, четырехугольник? Что влияет на вид сечения, почему в сечении прямоугольного параллелепипеда не может быть семиугольник?» [9, с 109].

Далее переходим к следующему этапу: актуализации опорных знаний, необходимых для построений, изучению нового способа действий (например, построению сечений методом следов), фиксации затруднения в деятельности. На данном этапе следует тренировать соответствующие мыслительные операции, перенося ранее изученные способы действий в новую ситуацию (предложить ученикам решить новую задачу, используя уже изученные приёмы). Следующий этап – «постановка учебной задачи»: ученик применяет известный способ действий в новой ситуации. Задача учителя — организовать деятельность школьников по изучению возникшей проблемы. Завершает этап постановка цели и формулировка темы урока.

Этап поиска выхода из затруднения («открытие нового знания») представляет собой коллективную деятельность (мозговой штурм, подводящий диалог и проч.). После определения нового способа действий его фиксируют в речи и знаково как способ решения заданий (в рассмотренном случае это, например, метод построения сечений многогранников методом следов). В итоге устанавливаем, что задание решено. После этого переходят к самостоятельной работе с самопроверкой по образцу; применяют индивидуальную форму работы: ученики сами решают задачи, применяя новый способ действий (построение методом следов), проверяют себя и оценивают свою работу [9, с 113].

Этап включения в систему знаний и повторения сопряжён с решением задач на отработку уже известных алгоритмов и подготовкой к введению нового знания на следующих занятиях. Здесь необходимо предложить ученикам задачи, в которых построение сечения является не целью, а этапом решения. Приведём для примера задание: «Определите, какие два многогранника получились при рассечении куба плоскостью, заданной её следом и точкой на боковой грани». На этапе рефлексии школьники оценивают свою деятельность на уроке; следует обращать внимание на ошибки, повлиявшие на самооценку учащегося.

Рассмотрим далее применение традиционных средств обучения и информационно-коммуникационных технологий, направленное на более эффективное развитие математических компетенций учащихся. Здесь следует учесть, коль скоро речь идёт о стереометрии, что «основой формирования пространственного мышления является практическая работа ученика с пространственными объектами, манипулирование ими, изменение их положения в пространстве» [3, с 199].

К основным средствам развития пространственного мышления относят теневые демонстрации; использование реальных моделей и развёрток; построение на плоскости чертежа объёмных фигур; изучение разных изображений одной фигуры; вынесение сечений на отдельный чертеж; разбиение объёмной фигуры на части; воссоздание объёмной фигуры по части ее изображения; проведение аналогий между плоскими и объёмными объектами и проч. Рассмотрим некоторые приёмы развития математических компетенций учеников при обучении построению сечений многогранников; покажем, что применение традиционных средств и средств ИКТ позволяет реализовать многие принципы системно-деятельностного подхода.

Основным традиционным средством обучения являются модели геометрических тел, однако только при сопоставлении реальных объектов и их стереометрических изображений ученик сможет достичь должного уровня восприятия геометрических тел. С помощью компьютерной графики ученики могут наблюдать изменение положения тела в пространстве и его плоское изображение. Фиксируя положение модели, педагог может предложить ученикам изучить положение элементов фигуры в пространстве, найти их на плоском изображении, определить видимые и невидимые части. Такой вид деятельности требует от школьников участия многих мыслительных операций (абстрагирование, сравнение, анализ, синтез), что, несомненно, способствует развитию их математических компетенций и пробуждает творческую активность. Приведём пример подобной задачи [10, с 157].

Для решения данной задачи ученику следует выдать карточку с чертежами нескольких непрозрачных проекций куба (рисунок 19).

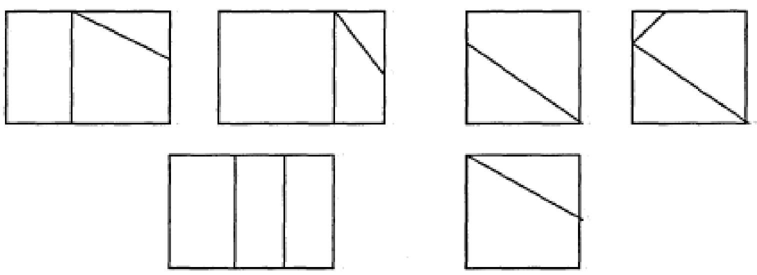


Рисунок 19 – Непрозрачные проекции куба

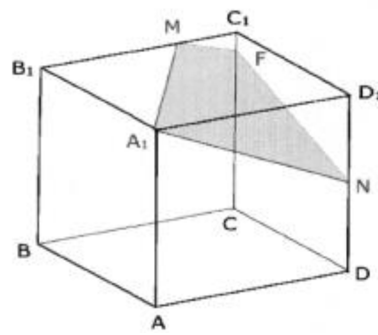


Рисунок 20 – Изображение куба

I. На интерактивной доске представлен чертёж непрозрачного куба (рисунок 20). Определите, какому виду (спереди, сбоку и др.) соответствуют приведённые на карточке изображения его видимой части. Подпишите наименования видимых вершин и точек сечения.

Заметим, что на карточке даны проекции, некоторые из которых нельзя получить при помощи куба, изображённого на рисунке 20. Помимо развития конструктивных компетенций учеников, данное задание будет стимулировать их критически оценивать получаемую информацию, даже если она представлена в тексте задания. В школьные учебники подобные задачи не включают, считая такие формулировки условия некорректными, что, по нашему мнению, является непростительным упущением.

В процесс обучения стереометрии необходимо включать задания, содержащие элемент конструирования новой геометрической фигуры: задания на создание развёрток геометрических тел, задания на воссоздание объекта по образу, задания на изменение конструкции тела, задания, решаемые на модели тел и проч. Приведём пример подобной задачи [3, с 167].

II. На рисунке 21 даны развёртки куба. Пользуясь изображением куба на доске (рисунок 20), начертите на его развёртке стороны многоугольника A_1MFN. Закрасьте квадрат, лежащий в нижнем основании куба.

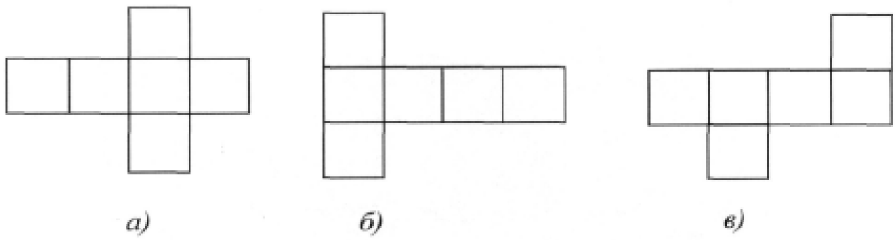


Рисунок 21 – Развёртки куба

Обращаясь к заданиям на воссоздание объекта по образу, ученикам можно предложить следующую задачу.

III. Изобразите многогранник, рассечённый плоскостью так, что данное сечение является пятиугольником. Назовите другие виды многогранников, сечение которых может быть пятиугольником.

Ко второму типу оперирования пространственным образом относятся способность ученика вычленять объёмные фигуры из основного чертежа, мысленно фиксировать измененную конструкцию исходного тела. Исходя Опишем далее приёмы, направленные на развитие способности оперирования образом второго типа. Так, в приведённой ниже задаче сочетаются несколько средств формирования пространственного мышления: традиционные (разбиение фигуры на составляющие) и средства ИКТ.

IV. Изображённый на доске многогранник рассечён плоскостью на два многогранника (рисунок 22). Используя модели тел, сконструируйте любой из них.

Данная задача становится индивидуальным творческим заданием за счёт вариативности пространственного положения изображенного на экране монитора многогранника (реализуются принцип творчества и принцип вариативности) [16, с 227].

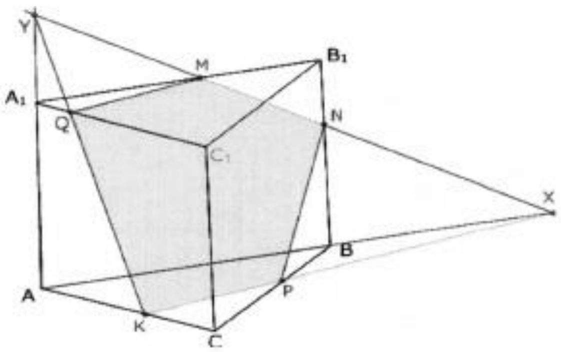


Рисунок 22 – Изображение рассечённого многогранника

V. Многогранник рассечён плоскостью на части, которые также являются многогранниками. Выделите эти многогранники, перечислив буквы в названии их вершин (рисунок 22).

Подобные задачи необходимо использовать в теме «Многогранники», что предоставит возможность школьникам изучить многогранники различной формы и расположения в пространстве. Одно из положений, составляющих основу системы развития пространственного мышления учеников, – это принцип предшествования воображаемых построений наглядной демонстрации, следуя которому, школьникам предлагается следующая задача.

VI. Вообразите куб и проделайте с ним следующие операции:

1) зафиксируйте одну из вершин верхнего основания куба;

2) в плоскости нижнего основания отметьте её проекцию;

3) в плоскости нижнего основания возьмите два ребра, исходящие из этой проекции;

4) через концы этих двух рёбер и первую вершину постройте плоскость.

Какой фигурой является построенное сечение?

Ученики, не справившиеся с этой задачей (т. е. не достигшие уровня оперирования пространственным образом) непременно должны выполнить его на готовом изображении куба, а затем ещё раз мысленно проделать построения.

Как показал эксперимент, для развития математических компетенций школьников полезно рассмотреть задания на воссоздание объёмной фигуры по части её изображения.

VII. Достройте недостающие многоугольник ABC…, являющийся сечением пятиугольной призмы (рисунок 23).

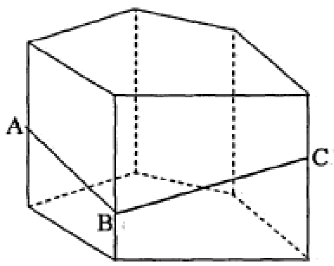


Рисунок 23 – Изображение пятиугольной призмы

К третьему типу оперирования пространственным образом относят возможность изменения структуры объекта, умение видеть процесс преобразования с разных точек зрения. Развитию данных математических компетенций может способствовать решение задач, подобных следующей.

VIII. На доске изображена правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат, а боковые грани являются равнобедренными треугольниками (рисунок 24). Мысленно рассеките пирамиду плоскостью, проходящей через точку S и прямую AC. Поверните одну из отсечённых частей так, чтобы вершины B и D совпали. Изобразите получившуюся фигуру [3, с 239].

Данную задачу можно применить как в теме «Многогранники», так и в параграфе «Движения» темы «Метод координат». Несмотря на то, что во многих учебниках стереометрии поворот вокруг оси не рассматривают, в классе с углублённым изучением математики данный вопрос разобрать необходимо.

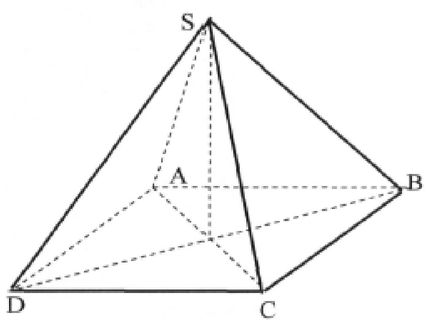


Рисунок 24 – Изображение правильной пирамиды

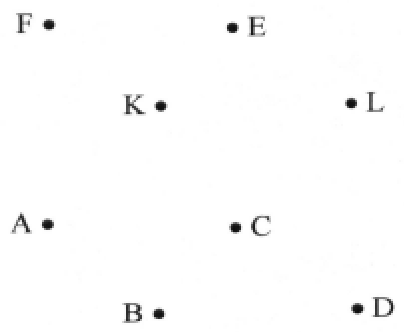


Рисунок 25 – Вершины многогранника

IX. На доске изображены вершины многогранника (рисунок 25). Соедините их так, чтобы получилось изображение многогранника.

Результаты эксперимента показали, что в экспериментальной группе нашлось больше учащихся, которые смогли предложить несколько вариантов решения этого задания. Это может свидетельствовать, что по завершении эксперимента у учеников экспериментальной группы лучше развиты математические компетенции, развиваемые на уроках стереометрии (пространственное мышление, вариативность мышления).

С целью развития способности оперировать пространственным образом полезно предложить ученикам задания на изменение конструкции тела. Одна из основных трудностей заключается в том, что ученикам нужно увидеть новые свойства объекта, а значит, рассмотреть его с другой, непривычной стороны.

X. Какие многогранники получатся при рассечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, которая проходит через диагонали его оснований (рисунок 26)? Можно ли составить из этих многогранников новый, основанием которого будет параллелограмм, равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник?

Ученикам следует сначала мысленно выполнить задание и ответить на вопросы (предшествование мысленных преобразований фигуры реальным), а затем просмотреть решение задачи, демонстрируемое на доске, что особенно

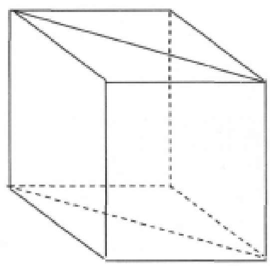


Рисунок 26 – Изображение прямоугольного параллелепипеда

школьников, которые мысленно произвести преобразования не смогли. Реализуя принцип дифференцированного обучения, учитывая индивидуальные возможности ученика, способным школьникам можно предложить дополнительные задачи на построение сечений многогранников (приложение А), работа с которыми аналогична описанной выше.

Также необходимо предусмотреть ряд исследовательских заданий; приведём пример [10, с 277].

XI. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, проходящей . через вершины A, C и точку M ребра A_1D_1. Какой многоугольник получится в сечении?

Ученики часто мысленно строят это сечение, как показывают экспериментальные занятия, как произвольный четырехугольник, забывая частные случаи (совпадение точки M с точкой A_1 или D_1). Сечение, имеющее форму прямоугольника при совпадении точки M с точкой A_1, превращается в треугольник, когда точка M совпадет с точкой D_1 (рисунок 27).

В случае, когда $M \equiv A_1$, плоскость сечения перпендикулярна плоскостям оснований. Данное задание следует предложить ученикам при освоении темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей», дополнив его следующими вопросами.

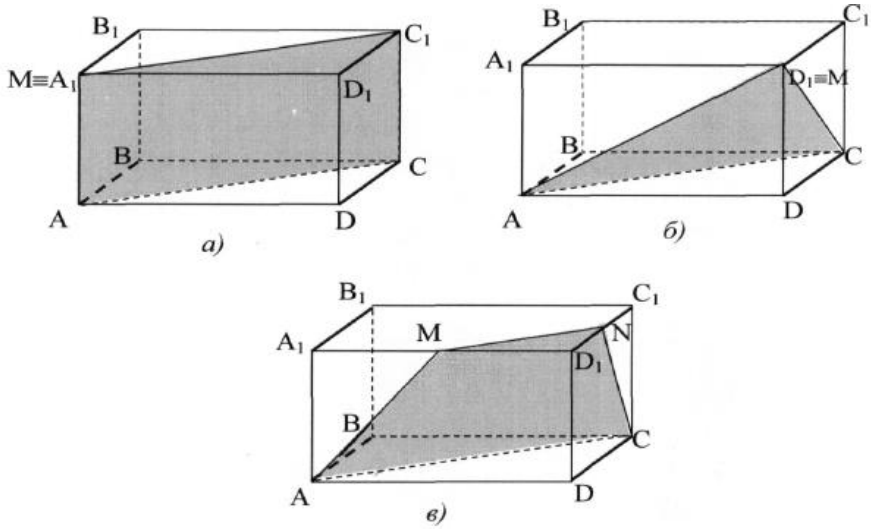


Рисунок 27 – Изображение сечений прямоугольного параллелепипеда

1. Всегда ли плоскость сечения будет перпендикулярна плоскостям основания?

2. Как на рёбрах многогранника расположить точки, определяющие плоскость сечения, чтобы она была перпендикулярна плоскостям оснований?

3. Представьте и опишите случай расположения точек, определяющих плоскость сечения, так, что плоскость сечения не была перпендикулярна плоскостям основания.

Приведём ещё один пример такого исследовательского задания, направленного на развитие способности II типа оперирования пространственным образом.

XII. Представьте, что вершина A_1 четырехугольника, получившегося в сечении, движется по ребру AA_1 в направлении точки A (рисунок 28). Как в процессе движения изменялась бы форма сечения?

Мы рассмотрели возможности заданий на построение сечений многогранников в курсе стереометрии в свете развития математических компетенций школьников. Опыт внедрения данной методики включения заданий на построение сечений, как покажут результаты эксперимента,

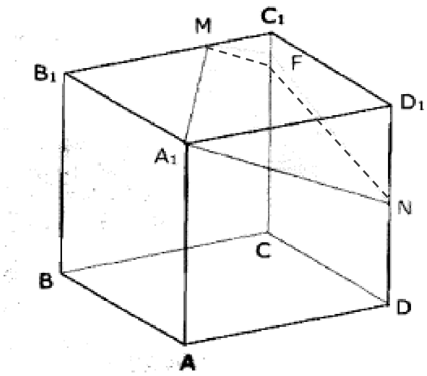


Рисунок 28 – Изображение сечения A_1MFN

представленные в следующем параграфе, проявил её эффективность по следующим направлениям:

1) увеличение числа рассмотренных задач на построение сечений;

2) поддержание интереса школьников к изучаемому материалу путём воздействия на их мотивационную сферу;

3) реализация предметных и метапредметных связей;

4) развитие математических компетенций учащихся.

По итогам проведённого анализа источников по проблеме исследования, с учётом описанных выше педагогических и методических особенностей обучения старшеклассников, можно сформулировать требования к процессу обучения построению сечений.

1. Психологические требования

а) учесть возрастные особенности развития пространственного мышления и восприятия пространственных изображений;

б) учесть индивидуальные особенности развития необходимых математических компетенций (скорость узнавания пространственного образа, возможность оперирования образом и проч.);

в) уделить особое внимание проблеме понимания текста;

г) реализовать дифференцированный подход к обучению;

д) предоставить возможность самоконтроля и рефлексии;

е) создать условия для усиления мотивации учеников;

2. Математические требования к изображениям

а) изображение должно быть верным;

б) наглядность – чертёж должен вызывать верные представления об изображаемой фигуре.

Таким образом, в данном параграфе были описаны некоторые приёмы комплексного применения традиционных средств обучения и средств информационно- коммуникационных технологий в процессе развития математических компетенций учеников (прежде всего, пространственного мышления). Представляется очевидным, что рассмотренные методы можно использовать и при проведении уроков геометрии по другим темам. Покажем результаты педагогического эксперимента, которые подтвердили эффективность описанного подхода к развитию математических компетенций школьников.

2.3 Ход и результаты педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент по проблеме исследования проводился в сентябре-декабре 2018 года с учащимися 10 «б» класса Муниципального общеобразовательного учреждения «Средняя общеобразовательная школа № 16 с углублённым изучением отдельных предметов» г. Старый Оскол. Эксперимент был проведён с тем чтобы проверить гипотезу исследования, а именно: применение разработанных методических рекомендаций будет способствовать более эффективному развитию математических компетенций учащихся средних школ.

Педагогический эксперимент состоял из следующих этапов:

1. констатирующий;
2. поисковый;
3. заключительный.

На первом этапе были исследованы психологические, педагогические и учебно-методические аспекты проблемы исследования, опыт практикующих учителей, и как итог были выявлены проблема, цель, задачи, гипотеза исследования. По результатам констатирующего эксперимента была определена проблема: применяемая методика обучения стереометрии (в частности, построению сечений многогранников) недостаточно эффективно способствует развитию математических компетенций школьников, есть потенциал роста.

На втором этапе осуществлялись анализ методического, учебного материала и изучение опыта работы учителей. На этом этапе были поставлены следующие задачи: выявить темы курса стереометрии, в которые возможно включить задания, подготавливающие учеников к изучению сечений; разработать систему заданий, которые способствовали бы развитию компетенций школьников; выявить возможности такой системы при обучении старших школьников построению сечений многогранников. Для решения поставленных задач были использованы такие методы исследования, как наблюдение, экспериментальное обучение, изучение результатов учебной деятельности.

Целью заключительного этапа была проверка выдвинутой гипотезы. Для дальнейшего проведения эксперимента учащиеся класса случайным образом были разделены на две группы: экспериментальная (13 человек) и контрольная (13 человек). Обучение в экспериментальной группе отличалось набором опорных заданий, предлагаемых школьникам на этапах введения новых знаний, закрепления изученного материала и самоконтроля; учащиеся из контрольной группы занимались по принятой методике.

Перед изучением тем «Многогранники» и «Сечения многогранников» учащимся в качестве входного контроля был предложен тест, состоящий из шести заданий (задания с 1 по 4 базового уровня, 5 и 6 повышенного, см. приложение В). Результаты входного контроля представлены в таблицах 1 и 2, графически данные представлены на диаграмме (рисунок 29).

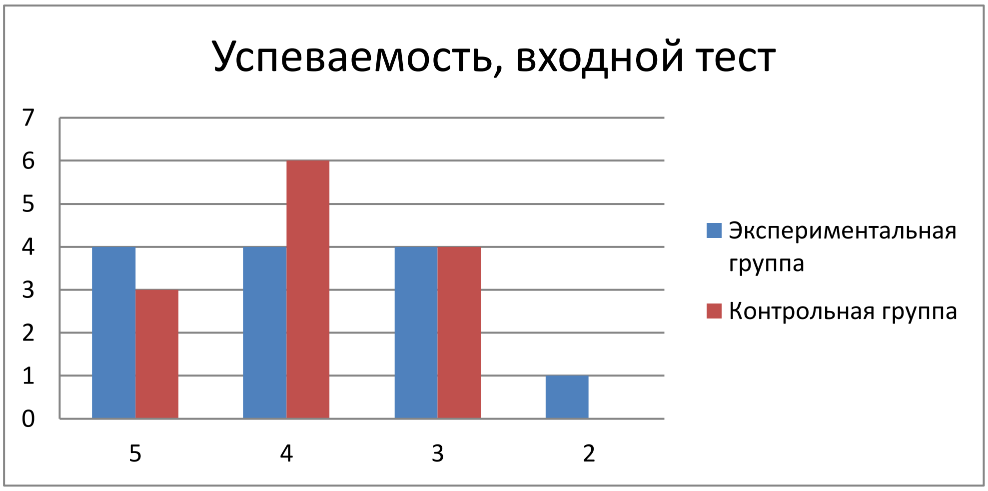


Рисунок 29 – Диаграмма результатов входного теста

Таблица 1 – Результаты входного теста в контрольной группе

Номер ученика по журналу	Номер задания теста						Оценка
	1	2	3	4	5	6	
1	+	+	+	+	+	–	4
2	+	+	+	+	+	–	4
4	+	+	+	+	+	–	4
5	+	+	+	+	+	+	5
11	+	+	+	–	+	–	3
12	+	+	+	+	–	–	3
14	+	+	+	–	+	–	3
15	+	+	–	+	+	+	4
16	+	+	+	+	+	+	5
19	+	+	+	+	–	+	4
20	+	+	+	+	+	+	5
24	+	+	+	+	–	+	4
26	+	+	–	+	–	–	3
Средний балл							3,923

Как следует из полученных оценок, до начала эксперимента в группах был примерно одинаковый уровень развития математических компетенций. После завершения эксперимента в обеих группах была проведена итоговая контрольная работа (результаты представлены в таблицах 2 и 3 и на рисунке 30). Чтобы оценить изменение уровня развития математических компетенций учеников благодаря разработанным рекомендациям, следует сравнить его с уровнем учеников из контрольной группы.

Таблица 2 – Результаты входного теста в экспериментальной группе

Номер ученика по журналу	Номер задания теста						Оценка
	1	2	3	4	5	6	
3	+	+	+	+	+	+	5
6	+	+	-	+	-	-	3
7	+	+	+	+	-	+	4
8	+	+	+	+	+	+	5
9	+	+	+	+	+	-	4
10	+	+	+	+	+	+	5
13	+	-	-	+	-	-	2
17	+	+	+	-	-	-	3
18	+	+	+	+	+	+	5
21	+	-	+	+	+	-	3
22	+	+	+	-	+	+	4
23	+	+	+	-	-	-	3
25	+	+	+	+	+	-	4
Средний балл							3,892

Таблица 3 – Результаты итогового теста в контрольной группе

Номер ученика по журналу	Номер задания теста						Оценка
	1	2	3	4	5	6	
1	+	+	+	+	-	+	4
2	+	+	+	+	-	+	4
4	+	+	+	+	-	+	4
5	+	+	+	+	+	+	5
11	+	-	+	+	+	–	3
12	+	+	+	+	–	+	4
14	+	+	-	+	+	–	3
15	+	+	+	+	-	+	4
16	+	+	+	+	+	+	5
19	+	+	+	-	+	+	4
20	+	+	+	+	+	+	5
24	+	+	+	+	+	+	5
26	+	-	-	+	–	–	2
Средний балл							4,077

Из данных таблиц 1 – 4 следует, что после проведения экспериментальной работы в обеих группах средний балл повысился, однако в экспериментальной группе средний балл стал несколько выше, чем в контрольной. Что более представляется более важным, прирост показателя в экспериментальной группе составил 0,416 балла против 0,154 в контрольной. Это может свидетельствовать о большей эффективности

Таблица 4 – Результаты итогового теста в экспериментальной группе

Номер ученика по журналу	Номер задания теста						Оценка
	1	2	3	4	5	6	
3	+	+	+	+	+	+	5
6	+	+	+	+	-	+	4
7	+	+	+	+	+	+	5
8	+	+	+	+	+	+	5
9	+	+	+	+	-	+	4
10	+	+	+	+	+	+	5
13	+	-	+	+	-	-	3
17	+	+	+	+	+	-	4
18	+	+	+	+	+	+	5
21	+	+	+	+	+	-	4
22	+	+	+	+	+	+	5
23	+	+	+	+	-	-	3
25	+	+	+	+	+	-	4
Средний балл							4,308

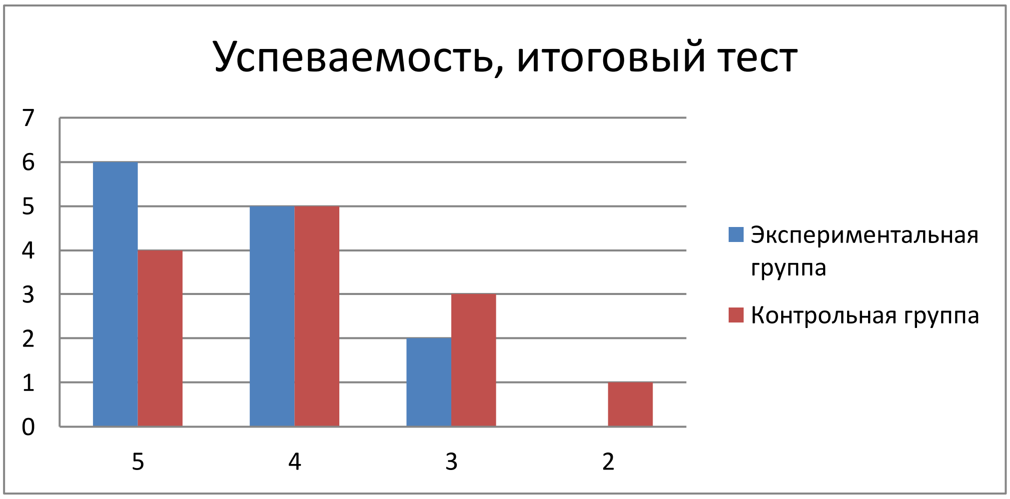


Рисунок 30 – Диаграмма результатов итогового тестирования

предлагаемой методики (в сравнении с традиционной) при развитии математических компетенций учащихся на уроках стереометрии.

Для проверки результатов применим метод статистической обработки χ^2, который обычно используют при сравнении распределения объектов двух независимых выборок по состоянию некоторого свойства. В исследовании представлены выборки из двух совокупностей: $n_1 = 13$ – количество человек в экспериментальной группе, $n_2 = 13$ – количество человек в контрольной группе. По результатам итогового контроля каждый ученик попадает в одну из категорий: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично.

Проверим гипотезу H_0: реализация разработанных методических рекомендаций при обучении школьников построению сечений многогранников не способствует более эффективному развитию их математических компетенций (повышению среднего балла). Выборки случайны и независимы, проверяемое свойство измерено по шкале, которая имеет 4 критерия (с = 4). Результаты итогового контроля представим в виде таблицы 5.

Таблица 5 – Распределение учеников по группам в зависимости от полученной оценки

Категории	Экспериментальная группа, n_1=13	Контрольная группа, n_2=13
Неудовлетворительно	$O_{11} = 0$	$O_{21} = 1$
Удовлетворительно	$O_{12} = 2$	$O_{22} = 3$
Хорошо	$O_{13} = 5$	$O_{23} = 6$
Отлично	$O_{14} = 6$	$O_{24} = 4$

Для проверки гипотезы H_0 при с = 4 найдём значение критерия χ^2 по формуле

$$T = \frac{1}{n_1 n_2} \cdot \sum_{j=1}^{4} \frac{\left(n_1 O_{2j} - n_2 O_{1j}\right)^2}{O_{2j} + O_{1j}}, \qquad (1)$$

где n_i – количество учеников выборки, $i \in \{1,2\}$,

O_{ij} – количество учеников выборки i, попавших, согласно своей оценке, в группу j, $j \in \{1,2,3,4\}$.

$$T = \frac{1}{13 \cdot 13} \cdot \left(\frac{(13 \cdot 0 - 13 \cdot 1)^2}{0 + 1} + \frac{(13 \cdot 3 - 13 \cdot 2)^2}{3 + 2} + \frac{(13 \cdot 6 - 13 \cdot 5)^2}{6 + 5} + \frac{(13 \cdot 4 - 13 \cdot 6)^2}{4 + 6} \right) \approx 8{,}13.$$

По таблице критических точек распределения для $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $c = 4 - 1 = 3$ находим значение 7,815. Поскольку $8{,}13 > 7{,}815$, гипотезу H_0 следует отклонить и принять противоположную гипотезу: разработанные методические рекомендации способствуют более эффективному развитию математических компетенций школьников.

Проведённый эксперимент показал эффективность разработанных рекомендаций при обучении школьников построению сечений многогранников, их реализуемость, доступность для применения на практике. Итоги заключительного этапа позволяют говорить о некоторой результативности представленного подхода при развитии математических компетенций учащихся. Следовательно, описанным рекомендациям можно следовать на уроках стереометрии, так как представленные задачи, кроме прочего, развивают умение и желание самостоятельно приобретать новую информацию, требуя от учащихся готовности включаться в не сформулированную извне интеллектуальную деятельность.

Материал, изложенный в данной главе, позволяет сделать выводы.

1. Решение предложенного комплекса заданий на построение сечений многогранников способствует более эффективному развитию у школьников математических компетенций, поддерживает интерес к обучению, позволяет достичь более высокого качества геометрических знаний и умений учащихся.

2. Системно-деятельностный подход является основой реализации процесса обучения в условиях ФГОС.

3. Экспериментальная проверка разработанных рекомендаций, основанная на решении системы опорных задач, подтвердила справедливость изложенных идей и доказала их эффективность. Реализованный в исследовании метод Пирсона подтверждает достоверность результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам настоящего исследования представляется возможным заключить следующее. На основе анализа психолого-педагогических источников по теме исследования геометрии в школе было определено, что наиболее эффективное развитие математических компетенций школьников достигается при использовании системно-деятельностного подхода в обучении. Методику обучения стереометрии необходимо строить с учётом возрастных особенностей, специфики учебной и познавательной деятельности учеников, профиля класса, уровня творческого мышления старших школьников, познавательной активности учеников.

Были представлены некоторые методические приёмы развития математических компетенций учеников при обучении построению сечений многогранников в курсе стереометрии. Даны также приёмы построения сечения многогранника: построения следа секущей плоскости, построения точки пересечения следа плоскости с ребром многогранника, построения сечения многогранника методом следов.

Также были представлены опорные задачи на построение сечений многогранников, сформулированы условия, при которых такие задания станут эффективным средством развития математических компетенций учеников:

1) использовать разные изображения одного многогранника;
2) точки, задающие секущую плоскость, определять разными способами (на вершинах, рёбрах, гранях);
3) в ходе решения задания проводить исследование;
4) решать задание несколькими способами.

Анализ школьных учебников показал, что в большинстве из них заданиям на построение сечений многогранников не уделено должное внимание, вследствие чего был разработан комплекс заданий на построение сечений многогранников в курсе стереометрии, значительную часть которых предлагается разбирать с учениками при освоении других тем курса в качестве подготовительной работы.

Проведённый эксперимент, основанный, прежде всего, на решении системы опорных задач, показал эффективность разработанных рекомендаций при обучении школьников построению сечений многогранников, их доступность для применения в школе. Описанным рекомендациям можно чаще следовать на уроках стереометрии, так как представленные задачи, кроме прочего, развивают умение и желание самостоятельно приобретать новую информацию, требуя от учащихся готовности выходить за пределы заданного и включаться в не сформулированную извне интеллектуальную деятельность. Реализованный метод математической обработки результатов исследования подтверждает достоверность полученного результата.

Настоящее исследование может быть продолжено в свете более детального рассмотрения обучающих возможностей задач на построение сечения многогранника, равно как их потенциала для развития исследовательских компетенций школьников старших классов.

СИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утверждён приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 413 от 06.10.2009) [Электронный ресурс]. URL: https://минобрнауки.рф/документы/2365 (дата обращения: 29.12.2018)

2. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие / Л. В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2015. – 252 с.

3. Гусев, В. А. Методика обучения геометрии: Учеб. Пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчищина и др.; под ред. В. А. Гусева. – М.: Издательский центр «Академия», 2016. – 368 с.

4. Далингер, В. А. Обучение учащихся доказательству теорем: Учебное пособие / В. А. Далингер. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2012. – 419 с.

5. Демченкова, Н. В., Моисеева, Е. С. Формирование познавательного интереса у учащихся / Математика. – 2014. – № 19. – С. 30 – 35.

6. Денищева, Л. О. Теория и методика обучения математике в школе: учебное пособие / Л. О. Денищева, А. Е. Захарова, М. Н. Корчагина и др.; под общей редакцией Л. О. Денищевой. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 247 с.

7. Епишева, О. Б. Специальная методика обучения геометрии в средней школе: Курс лекций: Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. вузов. / О. Б. Епишева. – Тобольск: ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2016. – 138 с.

8. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приёмов учебной деятельности / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М.: Просвещение, 2017. – 128 с.

9. Епишева, О. Б. Технология обучения математике на основе формирования приёмов учебной деятельности учащихся: Теоретические основы / О. Б. Епишева. – Тобольск, 2018. – 158 с.

10. Прасолов, В. В. Геометрия. / В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров – М.: МЦНМО, 2017. – 2-е изд., перераб. и доп. – 328 с.: ил.

11. Кашлач, И. Ф. Теория и методика обучения математике: учебно-методическое пособие для студентов физико-математических факультетов в 2 ч. Ч.1.: Общие вопросы методики обучения математике / И. Ф. Кашлач. – Ишим: ИГПИ им. П.П. Ершова, 2015. – 196 с.

12. Бутырина, В. И. Обучение построению сечений как средство развития пространственного представления на уроках стереометрии // Педагогические исследования. 2017. С. 86-89.

13. Кирин, Е. М. Построение сечений и линий пересечения поверхностей: метод. указания. / Е. М. Кирин – Пенза: Изд-во ПГУ, 2015. – 64 с.

14. Маер, Р. А. Роль педагогической практики в формировании профессиональных компетенций учителя математики // Современные проблемы шк. и вуз. мат. образования: тез. докл. 14 Всеросс. семинара препод, математики ун-тов и педвузов. – Саратов, 2015. - С. 60.

15. Щукина, Г. И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе: Учебное пособие для студентов педагогических институтов. / Г. И. Щукина – М.: Просвещение, 2016. – 156 с.

16. Мишин, В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 2017 – 416 с.

17. Покровский, В. С. Модернизация школьного образования и методическая подготовка учителя математики // Совершенствование процесса обучения математике в условиях модернизации рос. образования / Мат-лы Всерос. науч.-прак. конф. – Волгоград, 2014. – С. 69–73.

18. Попкова, Е. И. Ключевые компетенции, формируемые через изучение математики // Проблемы и перспективы математического и физического образования в России / Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Ишим: Изд-во ИГПИ, 2017. – С. 143 – 150.

19. Саранцев, Г. И. Методология методики обучения математике / Г. И. Саранцев. – Саранск: «Красный Октябрь», 2017. – 144 с.

20. Пинский, А. А. Стратегия модернизации содержания общего образования. / А. А. Пинский. – М.: ООО «Мир книги», 2016 – 95 с.

21. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике: Учебное пособие / Л. М. Фридман.; Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 248 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Дополнительные задачи на построение сечений многогранников

I. Построить сечение пирамиды SABCD плоскостью, определяемой следом s на плоскости ABCD основания пирамиды и точкой T на ребре SB (рисунок А1).

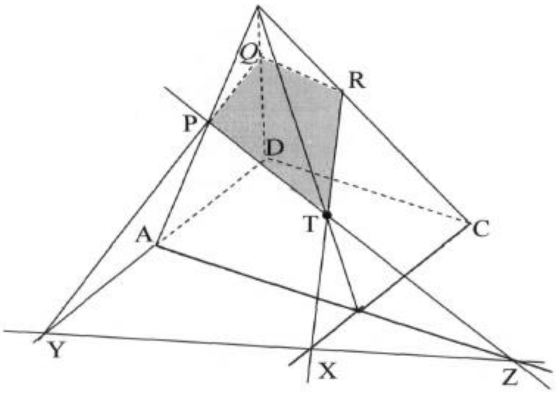


Рисунок А1 – Задача I

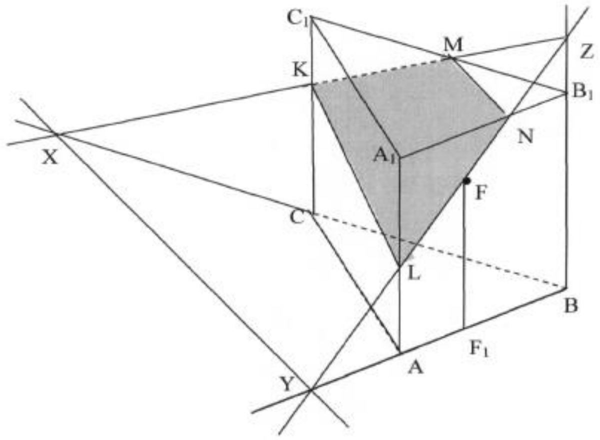


Рисунок А2 – Задача II

II. Построить сечение треугольной призмы плоскостью, если заданы точка F в грани AA_1B_1B и след s секущей плоскости (рисунок А2).

III. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки К, L и M, лежащие на гранях AA_1B_1B, BB_1C_1C и CC_1D_1D соответственно (рисунок А3).

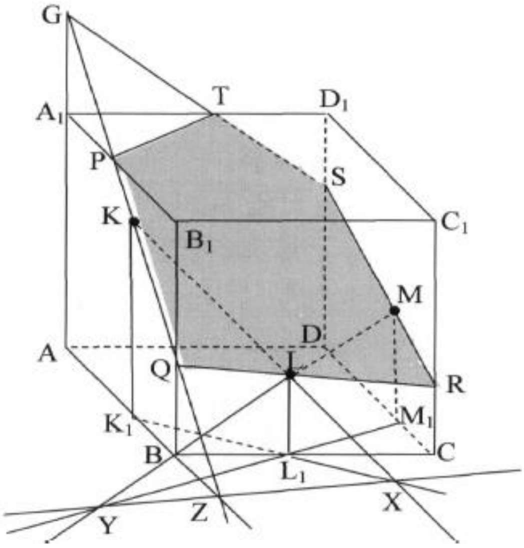


Рисунок А3 – Задача III

IV. Построить сечение шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M, лежащие на гранях AA_1F_1F, AA_1B_1B и DD_1E_1E соответственно (рисунок А4).

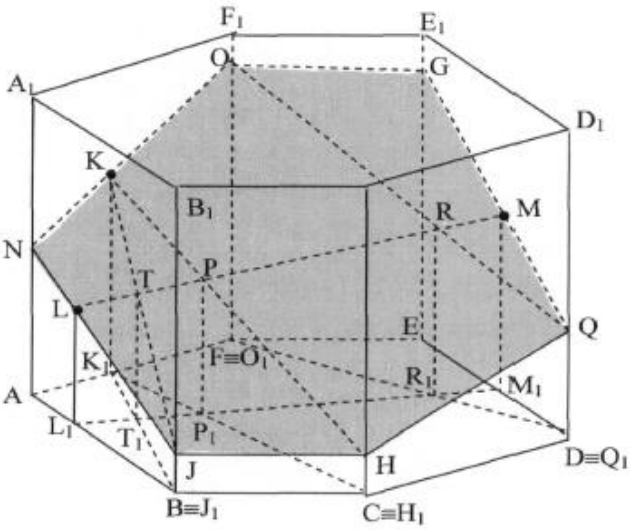
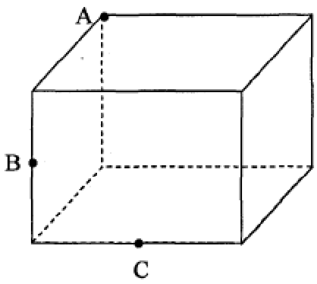


Рисунок А4 – Задача IV

V. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A, B и C, если точка B — середина бокового ребра, а точка C — середина стороны нижнего основания (рисунок А5).



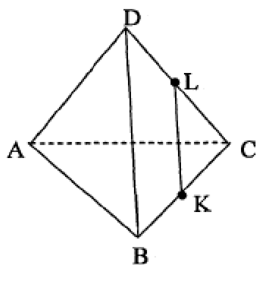


Рисунок А5 – Задача V

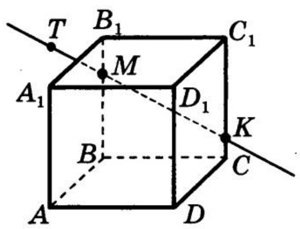
Рисунок А6 – Задача VI

VI. В правильной треугольной пирамиде ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения, проведенного через точки K – середину стороны нижнего основания и L – середину прилежащего к этой стороне ребра, если сторона основания пирамиды 12 см (рисунок А6).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

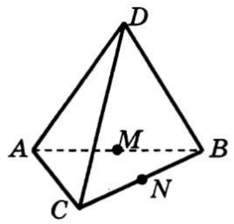
Вариант входного контроля

1. Точки M и K принадлежат рёбрам BB_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка T лежит на прямой MK. Какой плоскости принадлежит точка T?



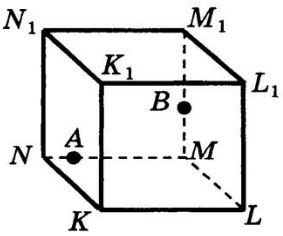
1) ADD_1 2) ABD 3) BB_1C_1 4) $A_1B_1C_1$

2. Точки M и N являются серединами рёбер AB и BC пирамиды $DABC$. По какой прямой пересекаются плоскости BDM и ACN?



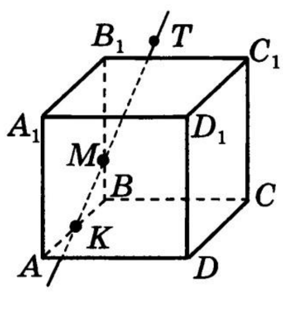
1) AD 2) AB 3) MN 4) BN

3. Точки A *и* B принадлежат ребрам MN и MM_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Через какие указанные точки можно провести единственную плоскость?



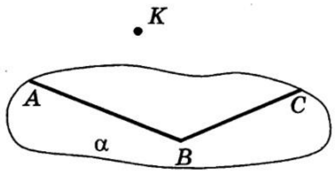
1) N, A, M 2) B, M, M_1 3) N, A, L

4. Точки M и K принадлежат рёбрам BB_1 и AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка T лежит на прямой MK. Какой плоскости принадлежит точка T?

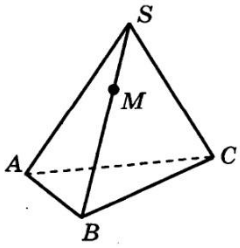


1) $A_1C_1D_1$ 2) CDC_1 3) BB_1C_1 4) AA_1B_1

5. Угол ABC лежит в плоскости α, точка K не принадлежит плоскости α. Сколько прямых, параллельных сторонам угла, можно провести через точку K?



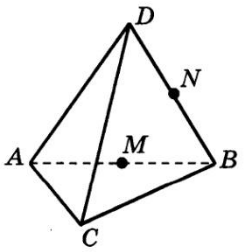
6. Точка M принадлежит ребру SB пирамиды $SABC$. Сколько прямых, параллельных рёбрам пирамиды, можно провести через точку M?



ПРИЛОЖЕНИЕ С

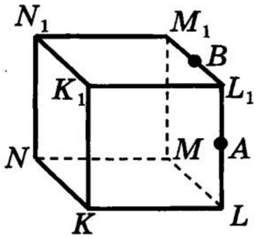
Вариант итогового контроля

1. Точки M и N являются серединами рёбер AB и BD пирамиды $DABC$. По какой прямой пересекаются плоскости BDM и BCN?



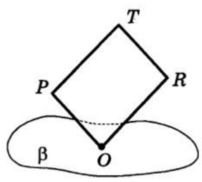
*1) A*B 2) MN 3) BD 4) BC

2. Точки A и B принадлежат ребрам LL_1 и L_1M_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ Через какие из указанных точек можно провести единственную плоскость?



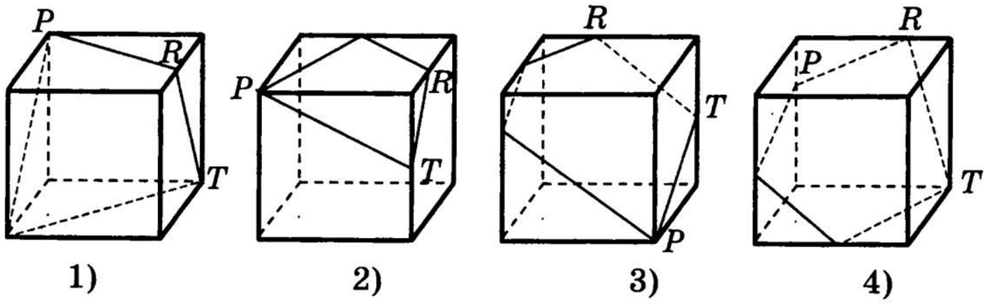
1) A, B, M 2) B, L_1, M 3) A, L, L_1

3. Вершина O прямоугольника принадлежит плоскости β, а остальные его вершины не принадлежат этой плоскости. Как расположены прямые TP и TR относительно плоскости β?

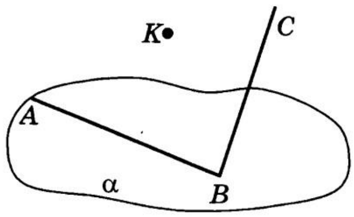


1) TP не пересекает β, а TR пересекает β
2) TP пересекает β и TR пересекает β
3) TP пересекает β, а TR не пересекает β
4) TP не пересекает β и TR не пересекает β

4. На каком рисунке изображено сечение куба плоскостью PRT?



5. Сторона *AB* угла *ABC* лежит в плоскости α, точка *K* не принадлежит плоскости α. Сколько прямых, параллельных сторонам угла, можно провести через точку *K?*



6. Точка *K* принадлежит ребру *AC* пирамиды *SABC.* Сколько прямых, параллельных рёбрам пирамиды, можно провести через точку *K?*