ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ МОДЕЛИРОВАНИЮ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование
заочной формы обучения, группы 02041660
Мягкого Олега Викторовича

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
Борисовский И.П.

Рецензент
"Почетный работник общего
образования РФ",
учитель математики
высшей квалификационной
категории
МАОУ «СОШ №24 с УИОП»
Старооскольского городского
округа
Деренко В.М.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Для развития, воспитания и образования человека важную роль играет математическая подготовка, она определяет главные задачи обучения математике в школе. Одна из таких задач - формирование и развитие посредством математики основных интеллектуальных качеств учащегося: это и высокий уровень развития психических и познавательных процессов, и определенный уровень математической культуры. Большой вклад в развитие данных качеств вносит школа: уроки математики формируют умение логического и абстрактного мышления, умение грамотного объяснения производимых действий, теоретически рассуждать и анализировать, способность проводить исследования и т.д. Большое влияние на развитие интеллекта учащихся оказывает умение моделировать.

Содержание изучаемого в школе материала помогает развитию интеллекта учащихся. В настоящее время существует множество учебников и учебных пособий, разработанных авторскими коллективами, в которых реализуются различные теории развивающего обучения. Высокие результаты в развитии интеллектуальных способностей учащихся достигаются, если использовать методы активного обучения и определенные системы задач на уроках математики.

Если говорить об истории изучения математики в школе, можно заметить, что до 70-х годов в школьных учебниках математики были включены специальные разделы: исследование линейных и квадратных уравнений и неравенств, исследование систем линейных уравнений и неравенств и др. Благодаря данным разделам у учащихся развивались умения и навыки моделирования. Но в 1972 году, когда был осуществлен переход на новые учебные программы по математике, большая нагрузка по развитию умений моделирования переложилась на задачи, теория же рассматривала методику решения различных задач.

В наше время, учителя пытаются сделать качество образования выше, повышая требования к знанию материала учащимися и уделяя большое внимание подбору задач и материалов, которые они будут использовать на уроке. Для развития математических способностей в старших классах используются задачи повышенной трудности, которые учителя находят в различных сборниках упражнений и задач. В последнее время среди таких задач нередко можно увидеть задачи с параметрами. В средней школе задачам с параметром не уделяется достаточно внимания и времени – часто их изучают только в классах физико-математического профиля. Однако в связи с необходимостью подготовки учеников к сдаче выпускных экзаменов задачи с параметрами всё больше включаются в программы многих подготовительных занятий, элективных курсов, а также курса алгебры и начал анализа на базовом уровне. Задания такого типа значимы не только своей диагностической ценностью, но и тем, что их решение помогает повышать качества знаний и умений, интеллектуально развивает учащихся, у них формируется представление об умении реального моделирования в математике, его особенностях.

Согласно Федеральному государственному стандарту, предметные результаты изучения предметной области «Математика и информатика» должны отражать наряду с овладением символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систему уравнений, неравенств и систем неравенств еще и умение моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат.

Таким образом, **актуальность данной работы** обусловлена важностью развития умений моделирования у учащихся посредством решения задач, малой проработанностью данной проблемы. Исходя из вышесказанного, нами была выбрана тема «Методические особенности обучения учащихся моделированию через решение задач с параметрами»,

Цель данной работы состоит в исследовании проблемы обучения элементам математического моделирования и особенностям формирования математических компетенций через решение задач с параметрами.

Объект исследования: обучение школьников решению задач с параметром.

Предмет исследования: методика обучения моделированию учащихся посредством решения задач с параметрами.

Исходя из объекта, предмета, цели и гипотезы исследования были определены **задачи исследования:**

1. Изучить психолого-педагогические теории развития умений моделировать учащихся при изучении математики в школе.
2. Установить развивающие функции задач в обучении.
3. Рассмотреть методику решения задач с параметром.
4. Проанализировать содержание школьного курса математики с точки зрения подготовки учеников к решению задач с параметром.
5. Разработать комплекс задач с параметром, обучающих моделированию.
6. Организовать педагогический эксперимент и подвести его итоги.

Методы исследования: изучение и систематизация математической, психолого-педагогической и научно-методической литературы по проблеме исследования; педагогический эксперимент. В ходе работы использовался анализ педагогической, методической и учебно-математической литературы по теме исследования.

Практическая **значимость:** разработана методика развития умений моделирования у учащихся через обучение решению задач с параметрами, которая может быть использована учителями, студентами и школьниками.

Данная выпускная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы. В первой главе рассказывается об, особенностях развития умений моделировать у учащихся, рассматриваются условия организации обучения решению таких задач. Также рассматриваются вопросы образовательной значимости задач с параметрами, причины сложности и проблемы обучения таким задачам в школе и способы решения этих проблем, а также разбирается методика обучения решению уравнений с параметром. Во второй главе проанализирована система учебных задач с параметрами с 5 по 11 классы. Подробно рассказывается о том, каким образом лучше вводить понятие «параметр» на занятиях, а также приводятся примеры решения задач с параметрами.

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

1.1 О развитии у учащихся умений моделирования при обучении математике в школе

1.1.1 Сущность деятельности учащихся при обучении моделированию

Наряду с научным, учебное моделирование является процессом познания окружающего мира и состоит из многих схожих элементов. Это и усвоение известного материала, и нахождение новых фактов и явлений, которые следует смоделировать, объяснение непонятного, формулировка выводов и их дальнейшее применение на практике и в процессе моделирования.

Но так как учебный процесс специфичен, некоторые из перечисленных этапов научного познания в нём могут отсутствовать.

Если проанализировать как взаимосвязаны процессы научного и учебного познания, можно прийти к следующим выводам:

- для ученика результат познания и его новизна субъективна, так как он выполняет лишь отдельные элементы и различные сочетания цикла познания. Учитель руководит и управляет действиями школьников, обучая их методу моделирования;
- учебное познание имеет цикличную природу и связано с формированием у учеников теоретических и научных понятий. Этап учебного моделирования - главный этап, который отражает научное познание;
- учащиеся должны обладать необходимыми знаниями и умениями, которые им могут пригодиться для учебного моделирования;
- если на всех этапах моделирования прослеживается развитие

мотивации школьников и обеспечивается рефлексия их познавательной деятельности, можно говорить о высоком уровне учебного познания. [17, с. 56]

Главное отличие учебного и научного моделирований в том, что единственная цель научного моделирования - «открытие», «изобретение» нового, в учебном же моделировании преследуется сразу несколько целей, и самая главная цель - обучение учащихся способам мыслительной деятельности, методу научного познания, методам моделирования, развитию интуиции и творческих способностей.

Перечислим характерные признаки учебного моделирования:

1) учебное моделирование - это деятельность, связанная с познанием и поиском (исследование, обнаружение, формирование чего-либо и т.д.);

2) цель учебного моделирования - получить новые знания, то есть необходимость узнать что-либо новое становится причиной моделирования;

3) учебное моделирование подразумевает самостоятельную деятельность учеников при выполнении заданий;

4) с помощью учебного моделирования достигаются дидактические цели обучения.

Учебное моделирование обучает математической деятельности через непосредственное выполнение этой деятельности. Учебное моделирование - это основа для активизации мыслительной деятельности учеников. В этом случае важен не только результат работы обучающихся, но и то, каким образом они пришли к этому результату. [17, с. 57]

Учебное моделирование как метод обучения, кроме формирования и развития мышления учащихся, помогает развитию творческого мышления, без которого невозможна и творческая деятельность.

1.1.2 Формирование деятельности учащихся при обучении моделированию

Факторы, помогающие обучить моделированию учащихся:

- личностно ориентированный подход к обучению;
- ориентирование на достижение продуктивного результата;
- развитие опыта творческой деятельности через проблемное обучение;
- оптимальная совокупность опытных и логических способов решения задач;
- творческая организация процесса обучения, максимальное наполнение его креативными ситуациями;
- создание условий для командной поисковой деятельности;
- конкретизация процесса обучения;
- формирование эмоциональной атмосферы, подходящих условий для творческой работы.

В процессе обучения моделированию содействуют активизации деятельности учеников следующие условия:

- благожелательная обстановка в коллективе;
- совокупность коллективных и индивидуальных форм работы;
- структуризация тренировочного учебного материала согласно принципу нарастания трудности учебной работы;
- обучение учащихся оптимальным способам познавательной деятельности;
- развитие внутренних стимулов к самообразованию и обучению.

Факторы, тормозящие активизацию познавательной деятельности учащихся: при опросах класса вопросы учителя и ответы учеников носят репродуктивный; в процессе изучения нового материала идёт усвоение учащимися уже готовых знаний; использование и закрепление знаний ведутся только лишь по примерам и образцу и т.п. [18, с. 58]

Общие принципы организации обучения, которые обеспечивают формирование умений моделирования у обучающихся:

- руководство учителя в формировании стимула и мотива к обучению;
- прививание интереса к изучаемому предмету;
- обучение учащихся необходимым методам поисково-познавательной деятельности;
- регулярно осуществлять принцип индивидуализации обучения;
- обширное применение различных наглядных и технических средств обучения;
- введение в практику работы и регулярное применение компьютерных технологий;
- создание креативных задач, требующих нестандартного решения и самостоятельного поиска информации по проблеме;
- совокупность и объединение методически и дидактически аргументированных способов, помогающих формированию познавательной деятельности и творческих возможностей обучающихся.

Назначение умения моделировать у учеников заключается в том, что, будучи формой деятельности индивидуума, она является средством и условием его психологического формирования. Психологическое же формирование гарантирует ученику усваивание теоретических знаний и помогает развитию у него особенных качеств личности и способностей: научной фантазии, целеустремленности, любознательности.

Ознакомление обучающихся с моделированием возможно осуществить посредством дополнительной работы над задачей или через решение специальных задач. [18, с. 59]

Вовлечение учеников в учебное моделирование должно следовать в двух направлениях организационном и содержательном. Содержательная самостоятельность выражается в том, чтобы учащийся мог без посторонней помощи поставить перед собой задачу и разработать алгоритм ее решения.

Организационная самостоятельность проявляется в умении учащегося организовать свою работу по решению постановленной перед ним задачи ли проблемы.

Следовательно, перед педагогом возникает вопрос поиска результативных форм и методов учебной деятельности школьников, которые бы не просто привлекали их к исследовательской работе, но и поспособствовали обучению этой деятельности. Таким образом, следует так осуществить познавательную деятельность учащихся, чтобы процесс учебного моделирования усваивался ими в совокупности с тем содержанием, на котором он осуществляется.

В источниках литературы предлагаются следующие советы для учителей по выработке у ребенка умения моделировать:

- не нужно наставлений; помогите детям действовать независимо; не давайте непосредственных инструкций относительно того, что они должны делать;
- не нужно делать скоропалительных предположений, на основе тщательного наблюдения и оценки определите слабые и сильные стороны ребенка, не нужно рассчитывать на то, что он ранее уже имел некоторые основные знания и навыки;
- не сдерживайте инициативы детей и не делайте за них то, что они могут сделать (или могут этому научиться) без посторонней помощи;
- научитесь не спешить с вынесением заключения; обучите ребенка отслеживать межпредметные взаимосвязи;
- применяйте трудные ситуации, появившиеся у ребенка дома или в школе, как сферу приложения приобретенных способностей в решении задач;
- помогайте детям обучиться управлять ходом освоения знаний;
- подходите ко всему творчески.

Таким образом, под *учебным моделированием* станем подразумевать вид познавательной деятельности учащихся, способствующий развитию следующих умений:

- получать новые предметные знания, способы и методы действий;
- самостоятельно организовывать поиск;
- добиваться установленных целей обучения;
- создавать мыслительные операции, такие как аналогия, систематизация, синтез и т.п.

1.1.3 Функции моделирования

В наше время учебное моделирование в большей степени применяется с целью достижения развивающих целей обучения, так как они считаются мощным инструментом для развития мышления, поскольку:

- имеют большие потенциальные возможности для формирования умственных действий;
- сформировывают динамичность и направленность мышления;
- формируют гибкость мышления;
- развивают культуру рассуждений, построенных на логике.

Так как в абсолютно всех трудах, посвященных привлечению обучающихся моделированию в ходе решения задач, аргументируется формирование умений и способностей моделирования (развиваются умения выставлять гипотезу, обнаруживать значительные нюансы исследуемой ситуации и т.д.), в таком случае развивающая роль моделирования неоспорима. [18, с. 59]

Помимо этого, учебное моделирование может помочь достижению познавательного отношения к окружающей реальности, в силу чего, оно сформировывает широту кругозора и стимулирует познавательный интерес, содействует развитию научного мировоззрения, исполняя, таким образом, воспитывающую функцию.

В конечном итоге, невозможно не обратить внимание на то обстоятельство, что непосредственно благодаря учебному моделированию возможно осуществить контроль знаний ключевых разделов школьной программы и владение некоторыми способами решения, степень логического мышления и т.п.

Главные дидактические функции моделирования:

- функция раскрытия новых (незнакомых учащемуся) знаний (т.е. формирование значительных качеств понятий; обнаружение математических закономерностей; поиск подтверждения математического утверждения и т.п.);
- функция углубления изучаемых знаний (т.е. получение дефиниций, равносильных начальному; синтез известных теорем; рассмотрение разных доказательств известных теорем и т.п.);
- функция систематизации изученных знаний (т.е. установление взаимосвязей между дефинициями; выявление связей между аксиомами и теоремами; структуризация учебного материала и т.п.);
- функция развития ученика, преобразование его из объекта обучения в субъект управления, развитие у него самостоятельности к самоуправлению (самовоспитанию, самореализации, самообразованию);
- функция обучения учеников методам деятельности. [24, с. 27]

Анализируя этапы моделирования, выделяемые разными авторами, можно сделать вывод, что неотъемлемыми из них считаются четыре, формирующие главную структуру учебного моделирования:

1. постановка проблемы;
2. выдвижение гипотезы;
3. проверка гипотезы;
4. вывод. [21, с. 14]

При наиболее подробном рассмотрении структуры учебного моделирования можно отметить и следующие этапы:

- мотивирование учебной деятельности;
- постановка проблемы моделирования;
- исследование существующей информации по изучаемому вопросу;

- испытание-экспериментирование (осуществление замеров, тестирований, проверок и т.д.) для получения фактов о материале исследования;
- классификация и исследование найденных фактических данных; выдвижение гипотезы;
- доказательство либо отрицание гипотезы;
- подтверждение гипотезы. [24, с. 28]

Несомненно, что разновидности моделирования обладают собственными характерными чертами, по этой причине для каждого из них свойственна собственная совокупность вышеназванных этапов.

Составляя и отбирая задачи, следует брать во внимание следующие условия:

- при составлении и отборе задач учитывается, что в ходе их решения станут применяться все возможные обобщения;
- решение задач станет ориентировано на нахождение конкретных связей между величинами, вывод конкретных формул, которые возможно применять в дальнейшем;
- в ходе решения «частных» задач возможность нахождения оптимального метода решения;
- в ходе решения задач возможно сформировать условия для развития способностей (частично) креативного мышления.

Обучение математике имеет уникальные возможности в плане развития интеллекта обучающихся, в создании свойств и компонентов мышления, нужных как для продолжения образования, так и для изучения новых сфер знаний, которые обеспечивают благополучность профессиональной деятельности и полноценность бытовой жизни в современном мире. Благодаря математике развивается абстрактное и логическое мышление, воспитывается алгоритмическая культура и приобретается опыт творческой созидательной деятельности.

Освоение учениками в ходе обучения математике *математических* *методов и способов мышления,* состоящих из всех методов научного познания - дедукции и индукции, синтеза, сопоставления, аналогии и т.п., помогает выработке у них *математического стиля мышления,* который характеризуется, в первую очередь, доказательностью, критичностью, независимостью содержания рассуждения от его логической схемы, структурированностью размышлений. Данные свойства мышления нужны любому человеку вне зависимости от области его жизнедеятельности, но непосредственно обучение математике может привнести максимальный вклад в их формирование. [19, с. 29]

Триста лет назад британский мыслитель Д. Локк писал, что математику нужно изучать для того, чтобы стать математиком, а для того, чтобы стать разумным человеком. Данному тезису созвучна нынешняя расстановка приоритетов в установлении целей и задач математического образования в школе: «Обучение математике в школе должно быть ориентировано не столько на *собственно математическое образование* в узком смысле слова, сколько на *образование* с *помощью математики»* (Г.В. Дорофеев).

Развивающая роль обучения требует от педагога не обычного изложения знаний в конкретной концепции, а подразумевает, кроме того, обучать школьников размышлять, искать и обнаруживать решение поставленных перед ним проблем, получать новые знания, основываясь на ранее известные. Целесообразно в связи с вышесказанным слова французского мыслителя М. Монтеня: «Мозг хорошо устроенный стоит больше, чем мозг хорошо наполненный».

Учебная дисциплина должна рассматриваться как своеобразная умственная деятельность человека, а не как предмет с комплектом готовых знаний. Обучение не должно проходить в форме простой передачи суммы знаний, а быть повторным открытием новых знаний. Учебную дисциплину необходимо изучать не ради лишних фактов, сколько ради хода их извлечения, и тогда, согласно Б. Расселу, предмет станет как мощное средство постижения и преображения природы, а не как формальная модель, в которой «неясно, о чем рассказывается».

В настоящее время обучение в школе в существенной степени соответствует формуле:

«*Усвоение = Понимание + Запоминание».*

Однако, если мы желаем на самом деле ещё и совершенствовать молодое поколение, то обязаны придерживаться следующей формулой:

«Овладение = Усвоение + Применение знаний на практике».

Познавательные процессы результативно формируются только лишь при такой организации обучения, в которой учащиеся занимаются интенсивной исследовательской деятельностью. Поиск новой является основой для формирования интереса, памяти, воображения, внимания, воли и мышления.

Практика множества педагогов демонстрирует, что результативным средством обучения моделированию, задача коего заключается в том, чтобы содействовать обучающимся без посторонней помощи открывать новые знания и методы деятельности, углубить и классифицировать изучаемое.

1.2 Решение задач с параметрами как способ обучения моделированию

1.2.1 Развивающие функции задач в обучении

Развивающие функции задач те, которые ориентированы на формирования мышления обучающихся (в частности, на развитие свойств научного мышления), на освоение ими результативных способов интеллектуальной деятельности.

Многие учителя полагают, что математическое образование это нечто производное, нечто, что автоматом сопутствует ходу освоения приёмов и способностей в сфере математики. Изучит школьник некоторое количество формул, терминов, аксиом и теорем, решит конкретное количество задач – и, таким образом, приобретет необходимое развитие. А если уменьшить данную сумму знаний и умений, былое развитие уже невозможно.

Данная точка зрения является принципиально неверной. Безусловно, знакомство с математическими фактами, анализ и изучение математических аксиом и теорем, вывод формул, решение большого числа задач формируют способности человека и влияют на формирование математического мышления обучающихся. Но только лишь данными средствами (в особенности средствами классическими, с которыми многочисленные средние учебные заведения свыклись) цель математического формирования и обучения в той мере, в какой это необходимо в нынешних обстоятельствах, не способна быть достигнутой.

К числу общих развивающих относятся функции задач, нацеленные на развитие у обучающихся умений применять изученные ими способы научного познания как способы исследования (мониторинг, сопоставление, практика, исследование и сочетание, синтез и квалификацию, абстракцию и конкретизацию); осуществлять выводы методом дедукции и индукции (в частности, грамотно использовать аналогию и интуицию); правильно осуществлять мысленные и практические опыт, выдвигать гипотезы и доказывать их; реализовывать простое учебное моделирование ситуаций и применять существующие (либо построенные) модели для исследования свойств и качеств объектов (создание и применение диаграмм, графиков, методик, схем, рисунков и т.д.); акцентировать значительное, систематизировать исследуемые объекты, классифицировать существующие знания, определять причинно-следственные и структурные взаимосвязи среди них; реализовывать выбор средств и способов достижения установленной цели, принимая во внимание определенные требования; видеть взаимосвязь исследуемого объекта с окружающей средой, с практической деятельностью населения, производить оценку фактической значимости исследуемого материала; выявлять логическую грамотность и свойства, свойственные научному мышлению, и т.д.

Перечислим особые развивающие функции задач по математике, к ним могут быть отнесены, например, функции, нацеленные на развитие у обучающихся таких умений: автоматизировать действия в простейших ситуациях повседневного характера, видеть математические закономерности в окружающем мире; прогнозировать (подразумевать) с необходимой точностью правдоподобия наличие какого-либо математического факта, качества или связи; дедуктивно обосновывать либо отрицать какое-либо математическое утверждение; составлять план решения задачи, исключив из ее постановки лишние сведения, добавив недостающие; выбирать способы, ресурсы и процедуры, нужные для решения задачи; проверять правильность решения; уметь определять математические дефиниции; сопоставлять какое-либо понятие с точным определением, различать его среди других терминов, верно осуществлять расчеты с применением простых средств для вычисления (с целью упрощения расчётов на соответственном этапе); формировать (на базе теоретических знаний) удобную вычислительную ситуацию; реализовывать контроль и приближение правильности результата вычислений; осуществлять моделирование в простых учебных ситуациях; результативно использовать математическую символику для записи математических утверждений и решении задач, уметь прочесть и понять утверждения, представленные в виде символов; обладать точным пониманием о логической составе учебного курса, о том, что теоретический характер математики обуславливает ее практический характер (математические знания являются прикладными в других науках, народном хозяйстве, технике) и т.д.

Очевидно, что список определенных развивающих функций задач по математике очень огромен, поэтому мы их перечислили лишь частично.

Проиллюстрируем это на одном примере.

Применение задач для развития у обучающихся навыка обобщения изученного - их единая развивающая функция; развитие умений обобщения какого-либо геометрического понятия - особая развивающая функция; помощь ученикам в обнаружении возможности обобщения определений симметрии, параллельного переноса и вращения в термине «перемещение» - определенная развивающая функция задач.

1.2.2 Задачи как средство обучения моделированию учащихся

Обучение учащегося моделированию - непростой и многосторонний процесс. У вопроса развития обучения моделированию обучающихся богатая история, однако с момента возникновения в педагогике моделирования учебные исследования проводились в основном в естественнонаучной и гуманитарной областях. Выделялись ключевые особенности метода: соответствие научному методу (в основном методу научной индукции), динамичность обучения и самостоятельность учащихся. Необходимо сказать, что самостоятельность учеников в моделировании понимается как относительная, так как обучающиеся открывают уже открытые истины и их «исследовательскую» деятельность необходимо проводить под руководством учителя, педагог должен в этой деятельности им помогать.

В настоящее время проблема обучения моделированию и развитие её элементов в ходу изучения математике описана в трудах И.И. Баврина, В.А. Викола, В.А. Гусева, И.В. Дробышевой, Ю.М. Колягина, В.И. Крупича, В.Л. Матросова, Ф.Ф. Нагибина, Р.С. Черкасова, Г.Б. Лудиной, Г.В. Токмазова, В.В. Успенского, А.Я .Цукаря и др.

В научных источниках литература зачастую моделирование освещается в широком смысле слова, как научный труд, однако в средней школе оно не применимо из-за трудности научного поиска, следует приспособить его к отличительным психолого-педагогическим чертам учеников разного возраста. Бесспорно, что в ходе изучения математики у учащихся можно развить только определенные компоненты научного поиска, например, видение проблемы и постановка задачи, создание либо выдвижение гипотез и др. Для развития обучения моделированию больше всего подходят ученики 13-15 лет, потому что в этом возрасте создаются все характерные свойства индивидуума, а если говорить об интеллектуальном развитии учеников, то развитие умственных способностей достигает одной из вершин. В любом случае, данный возраст является базовым для развития мотивов обучения (заинтересованности), время, когда определяется будущий путь, выявляются интересы и предрасположенности. По этой причине необходимо серьезно относиться к ученикам данного возраста.

Причем обучение моделированию учеников нужно реализовывать в разном объеме, в разное время, сочетая с иными типами учебной деятельности, на различных уровнях и ступенях образования. Развитие навыка моделирования в ходе изучения математики у учеников 7 - 9 классов содержит в себе как развитие конкретных специализированных умений, к примеру, видение новой задачи в известных условиях, видение вариативности решения, так и освоение главных её компонентов.

Развитие навыка моделирования в ходе изучения математики реализуется с помощью решения задач. В источниках психолого-педагогической литературы можно встретить следующие понятия: «поисковая задача», «творческая задача», «исследовательская задача» и «познавательная задача» (В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, В.И. Крупич, А.А. Кирсанов, М.П. Пальянов, В.В. Успенский и др.). В абсолютно всех рассмотренных терминах наблюдается нацеленность исследовательских задач на самостоятельную формулировку проблемы и её решение. Регулярное использование исследовательских задач в ходе изучения математики даёт возможность целенаправленно развивать навыки моделирования у обучающихся, при этом в значительной степени необходимо применять возможности школьных учебников и сборников задач по математике.

Опираясь на систематизацию математических задач, описанную в литературных источниках, можно выделить два типа задач: задачи исследовательского характера и исследовательские задачи и станем понимать под ними задачи, нацеленные на развитие типов моделирования и соответственных им умений. К задачам исследовательского характера относятся задачи на обнаружение и формулировку некоторых закономерностей, задачи, которые предполагают самостоятельную формулировку вопроса согласно данным условиям, задачи на наличие какого-либо математического объекта. К исследовательским задачам относятся задачи, допускающие разнообразные методы решения, параметрические задачи, задачи на изучение геометрических объектов для определения его свойственных особенностей. Итак, назовем шесть видов задач:

1)задачи, не содержащие требования;

2)задачи на установление истинности высказывания;

3)задачи, решаемые различными способами;

4)задачи с измененными условиями;

5)задачи, обратные данным;

6)задачи с параметрами.

Нас, безусловно, интересуют задачи последнего вида. Они позволяют ученикам быть в роли исследователя, так как дают возможность обучающимся проанализировать проблему с различных точек зрения, предоставить полное ее решение. [11, с. 106] Сформировывать такого рода метод решения задач можно на примере обобщенных задач, которые дают возможность проанализировать все частные случаи решения задачи.

Итак, в математике вовлечение учеников в конкретный вид деятельности совершается с помощью решения ими определенного типа задач. Средством развития навыка моделирования могут служить и задачи с параметром. Овладение навыком такого рода работы с одной стороны требует от учеников, а с другой развивает у них способности к самостоятельному осмыслению и поиску решения задач. [28, с. 31]Легко заметить, что данные два процесса связаны.

1.2.3 Методы решения задач с параметрами

1.2.3.1 Образовательная значимость задач с параметрами

Задачи с параметрами на сегодняшний день введены в программу многих подготовительных факультативов, а также ряда основных курсов алгебры и начал анализа по причине необходимости подготовки учеников к единым экзаменам и участию в олимпиадах.

Но важность задач данного вида никак не ограничивается только их диагностической ценностью, потому что практика их решения содействует увеличению качества знаний и умений обучающихся, их развитию интеллекта, а кроме того даёт возможность сформировывать у них понятие об особенностях моделирования в математике.

К постановке задач с параметрами приводят, к примеру, следующие исследовательские задачи:

- нахождение условий разрешимости каких-либо математических задач;
- вывод единой формулы для вычисления и установление области её использования;
- исследование условий сохранения и уровня варьирования свойств математических объектов;
- определение влияния характеристик реального объекта на какой-либо связанный с ним процесс, исследуемый при помощи математического моделирования и т.д.

С большинством из этих исследовательских задач ученики сталкиваются в ходе доказательства теорем нам уроках математики. Таким образом, к примеру, выведение формулы корней уравнения $\sin x=a$ - это стандартная задача на поиск решения уравнения в зависимости от значения параметра a.

В ходе решения геометрических и текстовых задач, которые содержат буквенные данный, ученики также могут встретить задачи с исследованием решений в зависимости от параметра. Примеры подобных задач даны ниже.

Задача 1. Как построить треугольник со стороной 6 см, прилежащим к ней углом a, если разность двух других сторон равна 3 см? Сколько решений имеет эта задача?

Задача 2. Имеется 2 сосуда с кислотой ёмкостью три литра. В первом налито 2 л 5%-го раствора кислоты, во втором – 2 л n%-го раствора той же кислоты. Как получить 15% - й раствор кислоты переливанием? При каких значениях n, после переливаниям раствора из второго сосуда в первый, мы добьемся требуемого результата?

Задачи с параметрами ученики встречают и на уроках физики. К примеру, им можно предложить такую физическую задачу.

Задача 3. Высота баскетболиста 1,8 м. Он стоит на трёхочковой отметке на расстоянии 6 м от кольца, находящегося на высоте 3 м. Какая сила броска должна быть у баскетболиста, чтобы мяч попал в корзину?

Приведенные нами образцы примеров подтверждают, что уравнения и неравенства с параметром совсем не считаются «хитрым замыслом экзаменаторов», а обладают реальным математическим и практическим значением. Следовательно, задачи с параметром являются очень ценным средством формирования навыков учеников к выполению математической деятельности.

Доказав образовательную важность данных задач, рассмотрим трудности обучения решению их на уроках математики.

1.2.3.2 Причины сложности обучения решению задач с параметрами в школе и пути их преодоления

Главными факторами тут, безусловно, считаются проблемы, характеризуемые особенностью такой деятельности по решению данных задач: она не алгоритмична, необходимо применять знания и умения комплексно, переносить их на новые условия. Существенную значимость кроме того представляет, то что технология введения имеющим отношение к этим задачам теоретических вопросов недостаточно разработана, и как результат, обращение педагогов к эмоциональной основе действий, выражаемое, к примеру, в предложениях: «представьте, что параметр - это определенное число, но не не следует забывать, что он переменная», «в некоторых случаях для удобства смотрите на уравнение с параметрами как на функцию», «чтобы решить задачу нужно отметить такие значения параметра, чтобы на получившихся интервалах можно было бы решить уравнение по определенному алгоритму, но отыскать их сразу нельзя» и т.п.

Ещё одним фактором считается невысокая результативность технологии обучения, основанная на классификации и подбору заданий по видам выражений (дробно-рациональные, целые, рациональные, иррациональные, тригонометрические, логарифмические, показательные, квадратные, линейные,), т.к. в этом случае алгоритм решения недостаточно обусловлен типом выражения. К примеру, меняя только расположение параметра в линейном уравнении, мы приходим к трем разным алгоритмам его решения («последовательно преобразовать», «исследовать на интервалах», «разложить на множители»).

1. $2x + a = 0 \leftrightarrow 2x = -a \leftrightarrow x = -\frac{a}{2}$ при любых $a \in R$.

2. $$ax + 2 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ 2 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{2}{a} \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow x = -\frac{2}{a}$$

3. $$ax + a = 0 \leftrightarrow a(x+1) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Предлагаемая технология подразумевает иной метод планирования обучения, т.е. по типам условий задач с параметрами, т.к. отличие между переменными (неизвестными и параметрами), а, следовательно, и особенность задач выражаются только относительно поставленной цели деятельности. [5, с. 67] Это представляет следующую очередность изучения неравенств и уравнений с параметрами.

Таблица №1

Тема	Основное содержание
Уравнения и неравенства с параметром: основные понятия	Уравнение (неравенство) с двумя переменными, связь переменных, неизвестная и параметр, уравнение (неравенство) с параметром, область допустимых значений, область допустимых значений параметра, область возможных значений неизвестной, решение *(a;x),* корень *x(a),* виды задач.
Задачи на нахождение множества корней уравнения (неравенства) зависимости от параметра	Критерии успешности решения, формула зависимости *x(a)*, контрольные значения параметра, условия выделения контрольных значений параметра, их связь с видом выражений
Задачи на нахождение значений параметра, удовлетворяющих условиям, на множество корней	Критерии успешности решения, виды условий, накладываемых на корни уравнения (неравенства), их роль в определении стратегии решения; приемы решения, их связь с видом выражений
Задачи, сводящиеся к решению уравнений и неравенств с параметром	Решение сюжетных, прикладных геометрических задач, на исследование свойств функции, сводящихся к уравнениям и неравенствам

Следует выделить, что классическая модель обучения заключается в информированности обучающихся об особенности решения каждого вида задач и о том, как организовать деятельность по применению этой информации. Но в случае задач с параметрами характерной будет только информация, носящая методологический характер (об аспектах успешности, способах решения, ситуациях нахождения контрольных значений и т.п.), а теоретические сведения и терминология, установленная для неравенств и уравнений с одной переменной, распространяется без тех или иных значительных изменений. По этой причине лучше применять другой подход к организации обучения, базирующийся не на усвоении готовой информации, а на рефлексивном рассмотрении своих затруднений и успехов при решении задач. Данный подход обуславливается особенностью природы методологического познания, которое относят к познанию рефлексивного вида (основой считается не воспринятие внешней реальности, а понимание внутреннего «Я»).

К категории рефлексивной деятельности специалисты по психологии и учителя обратились относительно не так давно в связи с вопросами гуманитаризации и гуманизации образования, увеличения его развивающей функции.

Специалисты по психологии И.Н. Семенов и С.Ю. Степанов доказали, что в мышлении выделяется некоторое количество иерархических уровней, высшие из которых - уровни умственного и индивидуального самоанализа. Самоанализ осуществляет стабилизирующую функцию в мышлении (планирует алгоритм работы, контролирует выполнение этого алгоритма, диагностирует трудности, корректирует образы и алгоритмы), а кроме того интегрирующую функцию - содействует раскрытию и обобщению знаний, которые содержатся в опыте. Непосредственно вторая функция самоанализа делает данной деятельность важной для образования.

Рефлексивные механизмы активируются только в случае возникновения умственных трудностей, по этой причине вовлечение учеников в рефлексивную деятельность нужно начинать с подведения их к осознанию трудности. Осуществление данного утверждения предполагается реализовать согласно последующей схеме. [16, с. 12]

1. Педагог ставит учащихся перед проблемой, связанной с рассмотрением их работы или оценкой итогов деятельности педагога.

2. Педагог обговаривает с учениками характеристики разбора, показывает диапазон всевозможных направлений реализации действий, критерии их оценки.

3. Педагог даёт ученикам возможность самостоятельно принимать решения.

1.2.3.3 Основные понятия уравнений с параметрами, общая схема решения уравнений F*(a; x)*=0

Начиная с шестидесятых годов В содержание вступительных экзаменов в университеты с 60-х годов, а затем с появление ЕГЭ в варианты КИМов включают неравенства и уравнения с параметром, а в настоящее время уже предлагается концепция внедрения раздела параметров в школьные учебники математики. Причиной её осуществления считается создание концепции понятий и отбор способов решения неравенств и уравнения с параметром данного типа (линейные, рациональные и т.д.).

Для каждого типа уравнений школьной математики определим единый способ решения определенных уравнений с параметром - общий как для одного, так и для двух параметров. Способ решения любого уравнения с параметром этого типа, в свою очередь, выведем из общей схемы решения произвольных уравнений $F(a;x)=0$ или $F(a;b;x)=0$ соответственно с одним или двумя параметрами.

Основные понятия уравнений с *параметрами.* В уравнении $F(x;y)=0$ с двумя переменными x и y фиксированному значению $x=a_o$ соответствует частное уравнение $F(a_o;y) =0$ с переменной y. Если $b_1, b_2, \ldots, b_k$ - все решения частного уравнения $F(a_o;y) =$ о, то $(a_o;b_1), (a_o;b_2), \ldots , (a_o;b_k)$ - все решения уравнения $F(x; y)=0$ с первой координатой, равной a_o. Изменяя значения $x=a_i$

и решая соответствующие частные уравнения $F(a_i;y)=0$, получим другие решения исходного уравнения $F(x;y)=0$. [13, с. 92]

Решим для каждого значения $x=a$, соответственное частное уравнение $F(a_i;y)=0$ с переменной y. В таком случае переменная x называют *параметром,* множество всех частных уравнений представлено в общей форме $F(a;y)=0$, где a-произвольное фиксированное значение переменной x.

Понятно, что мы можем перейти от уравнения $F(x;y)=0$ к уравнению $F(a;y)=0$ указав все решения в зависимости от значения первых координат. Так же поиск всех решений уравнения $F(x;y)=0$ в зависимости от фиксированных значений вторых координат $y=b_i$ приводит к уравнению $F(x;b)=0$ с параметром b и переменной x. Например, уравнение с двумя переменными

$$\frac{x-1}{2(y^2+2y)}-\frac{yx-1}{14(y+2)}+\frac{1-x}{7y}=0$$

мы можем рассматривать как линейное

$$\frac{x-1}{2(b^2+2b)}-\frac{bx-1}{14(b+2)}+\frac{1-x}{7y}=0,$$

и как рациональное

$$\frac{a-1}{2(y^2+2y)}-\frac{ay-1}{14(y+2)}+\frac{1-a}{7y}=0$$

Аналогичным способом уравнение $F(a;b;x)=0$ называется уравнением с параметрами a,b и переменной x, если для каждой упорядоченной пары значений переменных a и b нужно решить соответственное частное уравнение относительно переменой x. Так, уравнение

$$\frac{y(yx-2)-x(4+z)}{z-y-2}=1$$

удобно представить в виде линейного уравнения

$$\frac{a(ax-2)-x(4+b)}{b-a-2}=1$$

с параметрами *a* и *b* и переменной *x,* т.е. как множество частных уравнений первой степени для конкретных значений *a* и *b*.

В уравнении *P(a;x)*=0 частные уравнения $F(a_i;x)=0$ могут быть определены не для всех значений параметра. К примеру, в уравнении $\sqrt{(a-1)x+a}=\frac{1}{\sqrt{a-3}}$ частные уравнения не определены для $a_i\in(-\infty;3]$ будем записывать кратко: $\frac{\{a|a\in(-\infty;3]\}}{\textit{не определено}}$), и $\{a|a\in(-\infty;3]\}$ - ОДЗ параметра. В общем случае ОДЗ параметра уравнения *P(a ;x)*=0 есть множество всех значений параметра, для которых частные уравнения определены.

В уравнении с параметром могут быть ограничения как на множество значений параметра, так и на множество значений переменной. В качестве примера опять приведем уравнение $\sqrt{(a-1)x+a}=\frac{1}{\sqrt{a-3}}$, где для допустимого значения параметра $a_i\in(3;+\infty)$ область определения частного уравнения имеет вид $\left\{x\middle|x\in\left[-\frac{a_i}{a_i-1};-\infty\right)\right\}$ в связи с этим имеет смысл говорить об области определения уравнения *F(a;x)*=0 как о множестве всех упорядоченных пар $(a_i;x)$, где *a=a,* принадлежит области допустимых значений параметра, а *x* принадлежит области определения соответствующего частного уравнения *F(ai;x)*=0. В данном случае область определения имеет вид $\left\{(a,x)\middle|a\in(3;+\infty),x\in\left[-\frac{a}{a-1};+\infty\right)\right\}$.

Таким образом, уравнение *P(a;x)*=0 - бесконечная совокупность частных уравнений *F(a*$_i$*;x)*=0 для допустимых значений параметра *a*=*a*$_i$. Его решение осуществляется в два этапа:

1. разделение множества всех частных уравнений на непересекающиеся виды;
2. поиск и отбор общих решений частных уравнений каждого вида.

В ходе разбиения частных уравнений выделяют:

- множество особых частных уравнений типа Ø - все ложные числовые равенства;
- множество особых частных уравнений типа ∞ - все истинные числовые равенства;
- вид не особых частных уравнений, не имеющих решений;
- виды (один или несколько) частных уравнений с одинаковыми общими решениями.

Пример 1. В линейном уравнении $\left(a^3-4a\right)x=a+2$ значению *a*=0 и *a*=2 соответствуют особые частные уравнения типа Ø, для *a*=-2 частное уравнение $0\cdot x=0$ является особым типа ∞. Значениям параметра из множества $A_K=\{a|a\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)\}$ соответствует тип не особых частных уравнений с общим решением $x=\dfrac{1}{a(a-2)}$.

В результате получаем ответ, который запишем компактно следующим образом:

$$\frac{\{a|a=0;2\}}{\varnothing};\ \frac{\{a|a=-2\}}{\infty};\ \frac{\{a|a\neq-2;0;2\}}{\left\{x|x=\frac{1}{a(a-2)}\right\}}$$ [12, с. 7]

Пример 2. В линейном уравнении $(a-2b)(ab-1)x=(a-2b)(2a+3b)$ всем точкам прямой $a=2b$ соответствуют частные уравнения $0\cdot x=0$ типа ∞, точкам гиперболы $ab=1$, отличным то точек прямой $a=2b$,соответствует тип

Ø особых частных уравнений $0 \cdot x = \frac{(a^2-2)(2a^2+3)}{a^2}$ с отличной от нуля правой частью (рис.1).

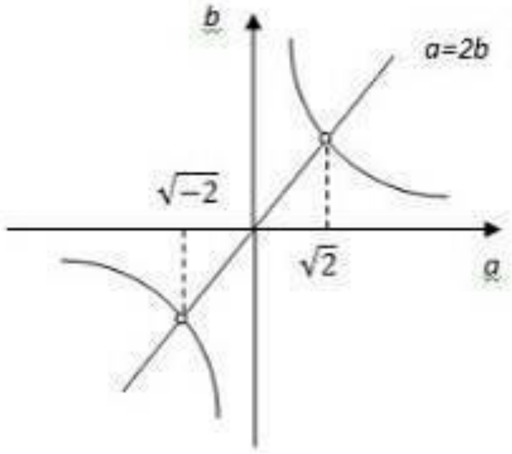

Рис. 1. Графическое решение примера 2

Для остальных точек плоскости *Oab* соответствующие частные уравнения имеют единственное решение, вычисляемое по формуле $x = \frac{2a+3b}{ab-1}$.

Итак:

$$\frac{\{(a;b)|a=2b\}}{\infty};\quad \frac{\{(a;b)|ab=1, a\neq 2b\}}{\varnothing};\quad \frac{\{(a;b)|ab\neq 1, a\neq 2b\}}{\{x|x=\frac{2a+3b}{ab-1}\}}$$

Пример 3. В квадратном уравнении $x^2-2(a-1)x+a+5=0$ ни одно из частных уравнений не является особым типа Ø или типа ∞. Дискриминант $D=4(a^2-3a-4)$ обращается в нуль для значений a=-1 и a=4, причем $D<0$ для $a\in(-1;4)$ и $D>0$ для $a\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. Тогда совокупность всех частных уравнений разбивается на три типа:

- тип J не особых частных уравнений, не имеющих решений в множестве всех действительных чисел и соответствующих значениям параметра $A_J=\{a|a\in(-1;4)\}$;
- тип K не особых частных уравнений, имеющих двукратные корни

вида $f(a)=a-1$ и соответствующих множеству $A_K=\{a|a=-1;4\}$;

- тип L не особых частных уравнений, имеющих различные общие решения $f_1(a)=(a-1)-\sqrt{a^2-3a-4}$ и $f_2(a)=(a-1)+\sqrt{a^2-3a-4}$ на множестве $A_L=\{a|a\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty\}$

Ответ: $\dfrac{\{a|a\in(-1;4)\}}{\textit{решений нет}}$; $\dfrac{\{a|a=-1;4;\}}{\{x|x=a-1\}}$;

$$\frac{\{a|a\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)\}}{\left\{x\middle|x=(a-1)-\sqrt{a^2-3a-4},x=(a-1)+\sqrt{a^2-3a-4}\right\}}$$

Обратим внимание на два факта:

- разделение частных уравнений на виды выполняется выделением областей однотипности во множестве допустимых значений параметров. В уравнениях с одним параметром выделение областей проводится некоторыми точками - контрольными значениями параметра ($a=0$ и $a=\pm2$ в первом примере, $a=-1$ и $a=4$ в третьем). В уравнениях с двумя параметрами области однотипности выделяются линиями контрольных значений параметров ($a=2b$ и $ab=1$ во втором примере).

- для видов не особых частных уравнений находятся общие решения - определенные функции, зависящие от параметров. При этом вид частных уравнений характеризуется либо одним общим решением, либо несколькими.

Определение. В уравнении $F(a;x)=0$ с параметром a и переменной x функция $x=f(a)$ называется общим решением на множестве A_f значений параметра, если для любого $a_i\in A_f$ значение $x=f(a_i)$ является решением частного уравнения $F(a_i;x)=0$.

В определении важен не только вид функции $x=f(a)$, но и множество A_f соответствующих значений параметра. Для уравнения $F(a;b;x)=0$ с двумя параметрами в качестве общих решений выступают функции $x=F(a;b)$ на множестве $A_f=\{(a;b)|F(a_i;b_i;f(a_i;b_i))=0\}$.

Разберем метод систематизации частных уравнений с помощью модели общих решений.

Пример 4. В рациональном уравнении $\frac{(x-|a-3|)(x-|a+1|)}{x-2+|a-1|}=0$

Функция $f_1(a)=|a-3|$ является общим решением для тех значений параметра, для которых $|a-3|-2+|a-1|\neq 0$. Поскольку

$$|a-3|-2+|a-1|=\begin{cases}2(1-a), \textit{если}\ \ a\in(-\infty;1)\\ 0, \textit{если}\ \ a\in[1;3]\\ 2(a-3), \textit{если}\ \ a\in(3;+\infty)\end{cases}$$

то $x=f_1(a)$ - общее решение уравнения на $A_{f_1}=\{a|a\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\}$.

Функция $f_2=|a+1|$ есть общее решение уравнения на множестве на $A_{f_2}=\{a||a+1|-2+|a-1|\neq 0\}=\{a|a\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)|\}$.

Построим модель общих решений в следующем виде(Рис. №2):

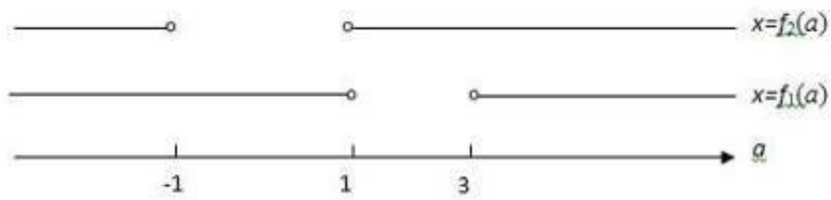

Рис. 2. Модель общих решений примера 4

На модели выделяем все типы частных уравнений:

$$\frac{\{a|a=1\}}{\varnothing};\ \frac{\{a|a\in[1;1)\}}{\{x|x=|a-3|\}};\ \frac{\{a|a\in(1;3]\}}{\{x|x=|a++1|\}};\ \frac{\{a|a\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)\}}{\{x|x=|a-3|, x=|a+1|\}}$$

Таким образом, на несложных примерах мы рассмотрели главные понятия уравнений с параметрами: область допустимых значений, область определения, общие решения, контрольные значения параметров, типы частных уравнений. Методы их нахождения будут устанавливаться в каждом виде уравнений отдельно.

На основе введенных понятий определим общую схему решения всякого уравнения F*(a;x)*=0 с параметром *a* (для случая двух параметров схема аналогична) :

- устанавливаются область допустимых значений параметра и область определения;
- определяются контрольные значения параметра, разбивающие область допустимых значений параметра на области однотипности частных уравнений;
- для контрольных значений параметра соответствующие частные уравнения исследуются отдельно;
- находятся общие решения $x = f_1(a),..., f_k(a)$ уравнения *F(a; x)* =0 на соответствующих множествах $A_{f_1},..., A_{f_k}$ значений параметра:
- составляется модель общих решений, контрольных значений параметра в следующем виде (Рис. №3):

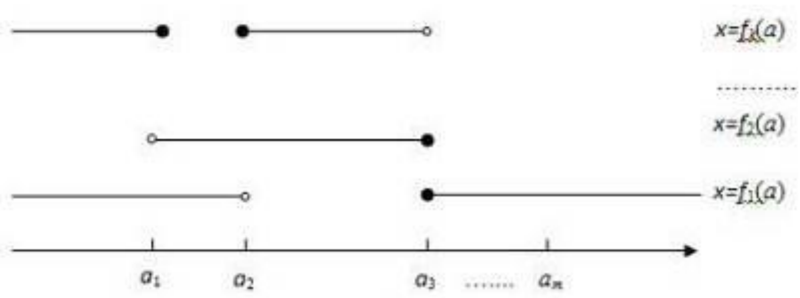

Рис. 3. Модель общих решений контрольных значений параметра

- на модели выделяются промежутки значений параметра с одинаковыми общими решениями (области однотипности);
- для контрольных значений параметра и выделенных областей
- однотипности записываются характеристики всех типов частных уравнений.

1.2.3.4 Общая схема решения линейных уравнений с параметром вида $f(a)x+g(a)=0$

В линейном уравнении $f(a)x+g(a)=0$ с параметром a и переменной x всякое частное уравнение принадлежит одному из следующих типов:

$$\frac{\{a\mid f(a)=0,\ \ g(a)\neq 0\}}{\varnothing};\quad \frac{\{a\mid f(a)=0,\ \ g(a)=0\}}{\infty};\quad \frac{\{a\mid f(a)\neq 0\}}{\{x\mid x=\frac{g(a)}{f(a)}\}}.$$

Приведенная классификация позволяет определить общую схему решения.

1. На числовой прямой отмечаются все значения параметра, для которых соответствующие частные уравнения не определены.

2. На области допустимых значений параметра исходное уравнение при помощи равносильных преобразований приводится к виду $f(a)x+g(a)=0$.

3. Определяются контрольные значения параметра, для которых $f(a)=0$. В множестве таких значений выделяются подмножества $A_x=\{a\mid f(a)=0,\ \ g(a)=0\}$ и $A_\varnothing=\{a\mid f(a)=0,\ \ g(a)\neq 0\}$. Значениям параметра из A_∞ соответствуют особые частные уравнения типа ∞. Значениям параметра из A0 соответствуют особые частные уравнения типа $\varnothing$.

4. Для значений параметра из множества $A_L=\{a\mid f(a)\neq 0\}$ соответствующие частные уравнения принадлежат типу L с общим решением $x=-\dfrac{g(a)}{f(a)}$.

Заметим, что если уравнение $f(a)=0$ имеет конечное множество решений $a_1,a_2,\dots,a_k$, то для каждого из найденных контрольных значений параметра соответствующие частные уравнения решаются отдельно. В случае, когда множеством решений уравнения $f(a)=0$ является числовой промежуток, удобнее найти также множество решений уравнения $g(a)=0$, пересечению найденных множеств решений соответствуют особые частные уравнения типа ∞.

1.2.3.5 Решение уравнений с параметрами не выше второй степени

Уравнения с параметрами не выше второй степени являются самыми распространенными в практике итоговых и конкурсных заданий. Их общий вид определяется многочленом $F(a;x)=f(a)x^2+g(a)x+h(a)$ с параметром a или многочленом $F(a;b;x)=f(a;b)x^2+g(a;b)x+h(a;b)$ с параметрами a и b не выше второй степени.

Отметим, что наиболее важными в практике являются следующие задачи:

- решить уравнение (неравенство) с параметрами;
- найти значение параметров, при которых общее решение уравнения (неравенства) обладает некоторыми свойствами.

В уравнении $f(a)x^2+g(a)x+h(a)=0$ не выше второй степени с параметром a и переменной x всякое частное уравнение принадлежит одному из следующих типов:

1) $\dfrac{\{a \mid f(a)=g(a)=h(a)=0\}}{\infty}$;

2) $\dfrac{\{a \mid f(a)=g(a)=0,\ \ h(a)=0\}}{\varnothing}$;

3) $\dfrac{\{a \mid f(a)=0,\ \ g(a)\neq 0\}}{\{x \mid x=-\frac{h(a)}{g(a)}\}}$;

4) $\dfrac{\{a \mid f(a)\neq 0,\ \ D=g(a)^2-4f(a)h(a)=0\}}{\{x \mid x=-\frac{h(a)}{2f(a)}\}}$;

5) $\dfrac{\{a \mid f(a)\neq 0,\ \ D<0\}}{\varnothing}$;

6) $\dfrac{\{a \mid f(a)\neq 0,\ \ D>0\}}{\{x \mid x=-\frac{-g(a)\pm\sqrt{D}}{2f(a)}\}}$

Контрольные значения параметра определяются уравнением $f(a)=0$ и уравнением $D=0$. На выделенных контрольными значениями промежутках допустимых значений параметра дискриминант D имеет определенный знак, соответствующие частные уравнения принадлежат одному из двух последних типов.

Тогда решение всякого уравнения с параметром не выше второй степени осуществляется по следующим этапам.

1. На числовой прямой отмечаются все контрольные значения параметра, для которых соответствующие частные уравнения не определены.

2. На области допустимых значений параметра исходное уравнение при помощи равносильных преобразований приводится к виду $f(a)x^2+g(a)x+h(a)=0$

3. Выделяется множество контрольных значений параметра, для которых $f(a)=0$.

Если уравнение $f(a)=0$ имеет конечное множество решений, то для каждого найденного контрольного значения параметра соответствующее частное уравнение решается отдельно. Проводится классификация частных уравнений по первым трем типам.

На бесконечном множестве решений уравнения $f(a)=0$ проводится решение уравнения $g(a)=0$, выделяются типы ∞ и $\varnothing$ особых частных уравнений. Множеству $\{a \mid f(a)=0,\ g(a)\neq 0\}$ Соответствует тип 3) не особых частных уравнений.

4. Выделяются контрольные значения параметра, для которых $D=g(a)^2-4f(a)h(a)$ обращается в нуль. Соответствующие не особые частные уравнения имеют двукратный корень $x=-\dfrac{g(a)}{2f(a)}$.

5. Найденные контрольные значения параметра разбивают область допустимых значений параметра на промежутки. На каждом из промежутков определяется знак дискриминанта D. [20, с. 4]

Множеству $\{a \mid f(a) \neq 0,\ D < 0\}$ соответствует тип не особых частных уравнений, не имеющих решений, для значений параметра $\{a \mid f(a) \neq 0,\ D > 0\}$ частные уравнения имеют два различных действительных корня.

Рассмотрим *пример:* Решить уравнение

$$x^2 - x + 1 = \frac{3x - 6x^2 - 1 + a}{a}.$$

Решение. В уравнении значение $a = 0$ является контрольным, для него соответствующее частное уравнение не определено.

На множестве $\{a \mid a \neq 0\}$ исходное уравнение равносильно $(a+6)x^2 - (a+3)x + 1 = 0$

$f(a) = a + 6$ обращается в нуль для $a = -6$. Соответствующее частное уравнение $3x + 1 = 0$ имеет единственное решение $x = -\frac{1}{3}$.

На множестве $\{a \mid a \neq -6;0\}$ частные уравнения являются квадратными с дискриминантом $D = a^2 + 2a - 15$. Дискриминант $D = 0$ для $a = -5$ и $a = 3$

Пусть $a = -5$, соответствующее частное уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$ имеет двукратный корень $x = -1$. Для $a = 3$ соответствующее частное уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$ имеет двукратный корень $x = \frac{1}{3}$.

На числовой прямой отметим найденные значения параметра и на каждом из полученных промежутков установим знак дискриминанта(Рис. №4).

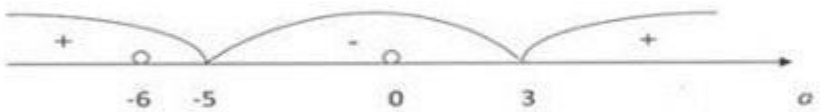

Рис. 1. Решение квадратного уравнения с параметром методом интервалов

Если $a \in (-5;\ 0) \cup (0;\ 3)$, то соответствующие частные уравнения не имеют решений. Для значений параметров из $\{a \mid a \in (-\infty;-6) \cup (-6;-5) \cup (3;+\infty)$ частные уравнения имеют два различных корня, их общие решения $x = \dfrac{a+3 \pm \sqrt{a^2+2a-15}}{2(a+6)}$.

Ответ: $\dfrac{\{a \mid a = 0\}}{не\ определено}$; $\dfrac{\{a \mid a = -6\}}{\{x \mid x = -\frac{1}{3}\}}$; $\dfrac{\{a \mid a = -5\}}{\{x \mid x = -1\}}$; $\dfrac{\{a \mid a = 3\}}{\{x \mid x = \frac{1}{3}\}}$; $\dfrac{\{a \mid a \in (-5;0) \cup (0;3)\}}{\varnothing}$; $\dfrac{\{a \mid a \in (-\infty;-6) \cup (-6;-5) \cup (3;+\infty)\}}{\{x \mid x = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2+2a-15}}{2(a+6)}\}}$ [28, с. 34- 35].

В уравнении $f(a;b)x^2 + g(a;b)x + h(a;b) = 0$ не выше второй степени с параметрами a и b и переменной x всякое частное уравнение принадлежит одному из выше перечисленных типов с аналогичными характеристиками. Контрольные значения параметров определяются уравнениями $f(a;b) = 0$ и $D = g(a)^2 - 4f(a)h(a) = 0$. В плоскости Oab эти уравнения выделяют области, на которых дискриминант D имеет определенный знак. Тогда общая схема решения уравнений с двумя параметрами не меняется, лишь вместо числовой прямой используется координатная плоскость Oab. Графическое изображение линий контрольных значений параметров и выделенных ими областей однотипности обеспечивает наглядность в выполнении каждого из этапов решения.

1.2.3.6 Интеграция алгебраического и геометрического методов при решении уравнений с параметром

Из истории математики известно, что оба метода, алгебраический и геометрический, формировались в тесной связи. Первоначальные компоненты алгебры возникли одновременно в двух равноправных интерпретациях: геометрической и буквенно-символической. Взаимосвязь алгебраического и геометрического методов стала причиной многих открытий в математике.

В общем, как подметил А.Д. Александров, «почти всю математику можно рассматривать как развивающуюся из взаимодействия алгебры (первоначально арифметики) и геометрии, а в смысле метода - из сочетания выкладок и геометрических представлений». Непосредственно данная связь всегда имеет отображение на занятиях математики в школе, демонстрирую обучающимся процедуру развития математического познания, делая их реальными свидетелями и участниками математических «открытий».

Проиллюстрируем интеграцию алгебраического и геометрического методов на примере решения уравнения с параметром.

Пример. При каких значениях параметра *a* уравнение

$|x+3|+|x-1|=a$ не имеет решений, имеет одно решение, два решения, бесчисленное множество решений?

Решение.

1. Алгебраический метод.

Разобьем всю числовую ось на три участка (Рис. №5):

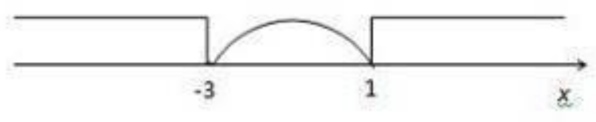

Рис. 5. Решение уравнения с параметром, содержащее модуль

Если $x<-3$, то получаем:

$$-x-3-x+1=a,\ -2x=2+a,\ x=-\frac{2+a}{2}.$$

Уравнение будет иметь решения, если

$$-\frac{2+a}{2}<-3,\ -2-a<-6,\ a>4.$$

При $a \le 4$ уравнение не будет иметь решений.

Если $-3 \le x < 1$, то имеем:

$x+3-x+1=a$, откуда $a=4$.

Уравнение имеет бесчисленное множество решений при $a=4$, в случае, если $a \ne 4$, не имеет решений.

Если $x \ge 1$, то имеем:

$$-x+3+x-1=a,\ 2x=a-2,\ x=\frac{a-2}{2}.$$

Уравнение имеет решения, если $\frac{a-2}{2} \ge 1,$ откуда $a \ge 4$. При $a<4$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a<4$ уравнение не имеет решений; при $a>4$ уравнение имеет два решения; при $a=4$ уравнение имеет бесчисленное множество решений; одно решение уравнение не может иметь ни при каком значении *а.*

2. Геометрический метод.

На геометрическом языке уравнение $|x+3|+|x-1|=a$ означает, что надо найти такую точку $M(x)$,сумма расстояний от которой до точек $A(-3)$ и $B(1)$ равна *а.* На рис 6. Видно, что АВ=4, поэтому:

Если $a<4$, то такой точки $M(x)$, сумма расстояний от которой до точек $A(-3)$ и $B(1)$ равна *а,* не существует, так как для точек на отрезке АВ сумма расстояний до точек А и В равна 4, а для точек, лежащих вне отрезка АВ, сумма расстояний больше 4. Значит, при $a<4$ уравнение не имеет решений.

Рис. 2. Геометрический метод решения уравнений с модулем

Если $a > 4$, то всегда существуют две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ лежащие вне отрезка АВ и симметричные относительно него, сумма расстояний от каждой из которых до точек А и В равна *a.* И значит, уравнение имеет два решения.

Если $a = 4$, то существует бесконечно много точек $M(x)$, сумма расстояний от которых до точек А и В равна 4 (все они расположены на отрезке АВ). Значит, в этом случае уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Кроме того, не существует одной точки, сумма расстояний от которой до точек А и В равна *a.* Так как, если есть одна точка, то найдется всегда и ей симметричная относительно отрезка АВ. Следовательно, уравнение не может иметь одного решения ни при каком значении *a.*

В итоге ответ получаем такой же, как и в случае алгебраического метода.

Выводы по первой главе

Главное отличие учебного и научного моделирований в том, что единственная цель научного моделирования - «открытие», «изобретение» нового, в учебном же моделировании преследуется сразу несколько целей, и самая главная цель - обучение учащихся способам мыслительной деятельности, методу научного познания, методам моделирования, развитию интуиции и творческих способностей.

Перечислим характерные признаки учебного моделирования:

1) учебное моделирование - это деятельность, связанная с познанием и поиском (исследование, обнаружение, формирование чего-либо и т.д.);

2) цель учебного моделирования - получить новые знания, то есть необходимость узнать что-либо новое становится причиной моделирования;

3) учебное моделирование подразумевает самостоятельную деятельность учеников при выполнении заданий;

4) с помощью учебного моделирования достигаются дидактические цели обучения.

Под моделированием подразумевается учебная деятельность по получению теоретических и практических знаний, в большей степени самостоятельно используя научные методы познания, это главное средство и условие формирования у учащихся творческих умений моделирования.

Структуру моделирования устанавливают следующие элементы: учебно-исследовательская задача, учебно-исследовательские действия и операции, действия контроля и оценки.

Ознакомление учащихся с моделированием возможно осуществить посредством решения особых исследовательских задач либо через дополнительную работу над задачей.

Исследовательская задача – объект интеллектуальной деятельности, в котором в диалектической общности представлены составные компоненты: предмет, условие и требование получения определенного познавательного итога при выявлении взаимоотношений между неизвестными и известными компонентами задачи.

В итоге, в математике вовлечение обучающихся в конкретный тип деятельности совершается с помощью решения ими определенного типа задач. Средством развития навыка моделирования могут быть и задачи с параметром. Освоение навыком такого рода работы с одной стороны потребует от учеников, а с другой - создаст у них возможности самостоятельного осмысления и поиска решения задач.

В результате решены три первые задачи моделирования:

1.Изучены психолого-педагогические теории развития умений моделировать учащихся при изучении математики в школе.

2.Установлены развивающие функции задач в обучении.

3.Рассмотрена методика решения задач с параметром.

Глава 2. РАЗВИТИЕ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Система учебно-исследовательских задач с параметрами

2.1.1 Понятие параметра

Определение параметра непосредственно связано с определением *переменной величины. Переменной величиной* называется такая величина, которая может принимать различные значения. Внедрение переменной величины в математику в 17 века считается большим скачком в формировании науки в целом. Оно значило новую стадию познания явлений природы в их взаимосвязи и движении. На основе Декартовой переменной величины появилось определение функции.

Таким образом, *переменная* - это общее определение с целью обозначения разных изменяющихся величин.

Параметр - дополнительная переменная, входящая в состав формулы или алгебраического выражения. Как правило, параметр представляет из себя скалярную величину или действительное число; параметр обозначается буквой какого-либо алфавита. Зачастую параметр рассматривается и как постоянное число в условии данной задачи, но в другой задаче он рассматривается как переменная.

Примеры.

1. В квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ коэффициенты a,b,c являются параметрами, x переменная. При решении уравнения коэффициенты a,b,c считаются постоянными числами, но вообще они также могут быть приняты за переменные.

2. Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ в прямоугольной декартовой системе координат представляет собой уравнение множества *окружностей* единичного радиуса; числа a и b параметры окружности в рассматриваемом

множестве; если положить $a=1,\ b=3$, то мы получим вполне определенную окружность с центром в точке (1; 3) единичного радиуса из множества окружностей того же радиуса.

В задачах могут встретиться 2 тиаа символов: неизвестные переменные (обозначаются $x, y, z, ...$) и параметры $(a, b, c, ...)$. Отличие между ними крайне условно, и можно рассматривать параметр как переменную, значение которой считается фиксированным, и каждое значение параметра определяет относительно неизвестного соответствующее уравнение (неравенство, систему, функцию).

2.1.2 Употребление букв в математике

В связи с тем, что в математике часто используются буквы, следует учитывать их различные функции.

Первая функция - *обозначающая,* когда символ обозначает какое-либо число из данного множества, или даже какое-то выражение, точку, прямую, фигуру и т.д.

Для этого применяются строчные буквы $a, b, c, ...$ либо заглавные буквы *M, N, K,* ....

К примеру, при помощи символов записывают переместительный закон: $a+b=b+a$, где символы в записи обозначают любые числа. В записи $a||b$ символами обозначаются прямые. *MN* прямая (луч, отрезок). М точка (множество, фигура, выражение), π - обозначение конкретного числа.

Вторая функция - *обобщающая,* когда символ используется для обобщения возможных значений какой-либо величины, коэффициента и т.д. В данном случае такой символ называется *параметром.*

Для записи параметра как правило применяются первые строчные буквы алфавита. Так, в записи уравнения $ax + b = c$ буквы *a, b* и с являются параметрами.

Третья функция - *вопросительная,* необходимо найти те значения этих символов, при которых выполняются указанные в задаче условия. В данном случае данные символы обозначают неизвестные (искомые) значения задачи.

Для неизвестных используются строчные буквы алфавита *x, y, z*, ... или стандартные обозначения соответствующих величин: путь - s, S; время - *t, T;* скорость – v_1, v_2 и т.д.

2.1.3 Задачи с параметрами в V - VI классах

В V классе вместе с числовыми выражениями изучаются буквенные выражения. Рассматривается серия задач с заменой некоторого числа. Изменяющееся число обозначают буквой, получая новую задачу. Каждую из задач решают, составляя выражение. Выражение для решения последней задачи является буквенным.

Задача 1. Автомобиль ехал два дня. В первый день он проехал 980 км, а во второй - на 50 км больше. Сколько км проехал автомобиль за два дня?

Решение. $980+(980+50)$.

Задача 2. Автомобиль ехал два дня. В первый день он проехал 980 км, а во второй - на 65 км больше. Сколько км проехал автомобиль за два дня? *Решение.* $980+(980+65)$

Обозначим буквой *т* число, которое *меняется* от задачи к задаче. Получим новую задачу.

Задача 3. Автомобиль ехал два дня. В первый день он проехал 980 км, а во второй - на *т* км больше. Сколько км проехал автомобиль за два дня?

Решение. Выражением для решения этой задачи будет

$$980+(980+m)$$

Выражение, содержащее буквы, называют *буквенным выражением.* В этом выражении *буквы* могут обозначать *различные* числа.

Рассматриваются упражнения на запись, чтение буквенных выражений, определение компонентов операций, нахождение значений выражений и сравнение этих значений, решают задачи, составляя выражения.

Упражнения

1. Запишите выражения:

а) сумма 7 и a;

б) разность 16 и $3+p$;

в) разность 45 и $a+x-37$.

2. Назовите слагаемые в сумме:

а) $(18-7)+14$;

б) $(x-y)+(m-n)$.

Назовите уменьшаемое и вычитаемое: $(c+3)-(d+8)$.

Прочитайте выражение $(a+3)-(c-2)$.

5. Заполните таблицу

Таблица №2

Значение a	0	1	2	3	4	5
Значение $a+12$						
Значение $16-a$						

При каких значениях *a:*

а) 16 - *a* меньше, чем *a* + 12;

б) 16 - *a* больше, чем *a* + 12;

в) значения 16 - *a* и *a* + 12 равны?

6. Пусть цена брюк *a* руб., а цена рубашки *b* руб. Какой смысл имеет выражение: а) *a* + *b;* б) *a* - *b;* в) 250 - *(a* + *b)*?

Учащихся ориентируют на знание буквенной записи свойств сложения и вычитания:

$a + b = b + a$;

$a + (b + c) = (a + b) + c;$

$a + o = o + a = a;$

$a - (b + c) = a - b - c,\ b + c \leq a;$

$(a + b) - c = a + (b - c),\ c \leq b;$

$(a + b) - c = (a - c) + b,\ c \leq a;$

$a - o = a,\ a - a = O.$

Аналогичная работа проводится при изучении умножения и деления натуральных чисел. Определение умножения чисел дается с помощью букв: Умножить число m на натуральное число n - значит найти сумму n слагаемых, каждое из которых равно m:

$m \cdot n = m + m + ... + m.$ (n штук)

Свойства умножения:

$a * в = в * a;$

$a * (b * c) = (a * b) * c;$

$1 * n = n$. Исходя из переместительного свойства умножения условились $n * 1 = n$

$0 * n = 0$. Исходя из переместительного свойства умножения условились $n * 0 = 0$.

Появляются упражнения, при решении которых можно ввести понятие *параметр*.

Упражнения

1. Существует ли такое число n, что $0 * n = 6$?

2. При каких значениях m верно равенство $0 * m = 0$? Можно ли из этого равенства найти единственное значение m? Можно ли разделить 0 на 0?

В VI классе набор таких задач гораздо богаче. Среди них имеются и задачи с неравенствами:

3. При каких значениях *a* верно неравенство: а) $a < -a$;

б) $a > -a$;

в)$-a < a$;

г) $-a > a$?

Очевидно, наиболее удобным материалом для введения понятия *параметр* являются уравнения и неравенства, в которые входят вместе с неизвестной переменной буквы, обозначающие некоторые числа.

Обращается внимание на необычную форму ответов при выполнении заданий с параметрами.

Например:

Решить уравнение $x - a = 0$.

Ответ: $x = a$ при любом значении *a.*

Решить уравнение $3x = a$.

Ответ: $x = -\frac{a}{3}$ при любом значении *a.*

Решить уравнение $ax = 8$.

Ответ: $x = \frac{8}{a}$ при $a \neq 0$; нет решений при а=0

В V - VI классах не ставится задача полного освоения параметра. Тем не менее, желательно методично предлагать задачи с параметрами на уроках. Ими могут быть:

Задания:

1. Решить уравнения:

$x + 2 = 0;$

$5 \cdot x = a;$

$\frac{x}{2} = a;$

$a - x = 2;$

$(a-1)\cdot x = a+1;$

$|x| = a;$

$|x| = |a|.$

2. Решить неравенства:

$a\cdot x > 2;$

$a\cdot x < 2;$

Сравнить: $-a$ и $3a$ [21, с.14- 15].

2.1.4 Задачи с параметрами в VII классе

В VII классе задач, от которых можно перейти к задачам с параметрами существенно больше. Да и теоретический материал представляет богатые возможности. В VII классе, например, учащиеся решают линейные уравнения и неравенства, причем уравнение $ax=b$ они должны решать в общем виде и уметь выяснять знак корня при различных значениях a и b (то есть по существу ими решается задача с двумя параметрами).

Покажем *фрагмент урока* на тему «Линейные уравнения с параметром».

Решим уравнение $6x-x=x+6$ (1)

Получим: $6x-x=6+1; 5x=7; x=1.4.$

Если в уравнении (1) заменить какое-либо число, например, 6, другим числом, то можно получать новые уравнения:

$5x-1=x+5;$ (2)

$4x-1=x+4;$ (3)

$3x-1=x+3;$ (4)

Каждое из этих уравнений решается тем же способом, что и уравнение (1). Чтобы не решать несколько однотипных уравнений одним и тем же способом, решим задачу в общем виде, заменив изменяемое число *(параметр)* буквой:

$ax-1=x+a.$ (5)

Действуя по тому же плану, что и при решении уравнения (1), придем к уравнению $(a-1)\cdot x=a+1.$ (6)

Только не будем торопиться с делением на $(a-1)$, ведь это выражение при *a* = 1 обращается в 0, а на нуль делить нельзя. Случай *a* = 1 надо рассматривать отдельно.

1) Если *a* = 1, то уравнение (6) имеет вид $0\cdot x=2$. Очевидно, что уравнение (6) в этом случае не имеет корней.

2) Если же $a \neq 1$, то уравнение (6) имеет единственный корень $x=\frac{a+1}{a-1}$

Нетрудно убедиться, что по формуле $x=\frac{a+1}{a-1}$ мы получим корни уравнений (2) – (4), если в качестве *a* возьмем числа 5, 4 и 3 соответственно.

Задание, которое мы выполнили, обычно формулируют так: для всех значений параметра *a* решите уравнение $ax-1=x+a.$

Ответ к этому заданию можно записать так:

Ответ: $x=\frac{a+1}{a-1}$ при $a\neq 1$; нет корней при $a=1$.

Замечание. Наши рассуждения о параметре начались с уравнения (1), имевшего единственный корень, но после замены числа 6 на букву *a* оказалось, что полученное уравнение имеет единственный корень не при всех значениях *a*. При *a*=1 оно не имеет корней.

Оформление решений задач с *параметрами*

1. Решите уравнение $a\cdot x=b$

Ответ: при $a=b=0$, x – любое действительное число;

при $a\neq 0$ $x=\frac{b}{a}$;

при $a=0$ и $b\neq 0$ решений нет.

2. Решите уравнение $a - x = 1 - a^2 x.$

Решение. $(a^2 - 1) \cdot x = 1 - a^2 x.$

$a^2 - 1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$ и $a \neq -1,\ x = \dfrac{1-a}{a^2-1} = -\dfrac{a-1}{a^2-1} = -\dfrac{1}{a+1}$

$a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = 1$ или $a = -1$

а) $a = 1,$ то $0 \cdot x = 0$ и $x \in R;$ (или x – любое число);

б) $a = -1,$ то $0 \cdot x = 2$ - уравнение не имеет решений.

Ответ: $-\dfrac{1}{a+1}$ при $a \neq \pm 1;$ бесконечно много корней при $a = 1;$ нет корней при $a = -1.$

3. Решите неравенство $(m-1) \cdot x < 5m.$

Определим множество допустимых значений параметра: этим множеством является все множество чисел.

При $m = 1$получаем $0 \cdot x < 5.$. Оно верно при любых $x.$

При $m > 1 \rightarrow m - 1 > 0$. Разделим на $m-1$, получим $x < \dfrac{5m}{m-1}.$

При$m < 1 \rightarrow m - 1 < 0$. Разделим на$m-1$, получим $x > \dfrac{5m}{m-1}$ [15, с. 12].

2.1.5 Задачи с параметрами в VIII классе

В 8 классе существует множество тем, в которых возможно успешно применять задачи с параметрами : при решении уравнений и неравенств с одной переменной, при решении дробно-рациональных уравнений и, естественно, при решении квадратных уравнений. Здесь основное внимание уделяется не только вопросам теории, но и методам решения задач с параметрами . Например, можно ли дать определение квадратного уравнения следующим образом:

«Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x- переменная(неизвестное), a, b и c параметры (или выражения, зависящие от параметров), причем, $a\neq 0$, называется квадратным».

В особенности основательно рассматривается материал, который позволит обучающимся понять, когда квадратное уравнение с параметрами не имеет корней, имеет один корень (или два равных) и имеет два корня. Случай, когда корни квадратного уравнения должны быть или одного знака, или разных, или обладать другими свойствами подкрепляться необходимыми примерами. При решении неравенств особое внимание уделяется рассмотрению двух методов: методу разложения на множители и методу введения новой переменной.

Рассмотрим пример: при каких значениях параметра с уравнение $5x^2-4x+c=0$

а) имеет различные действительные корни;

б) имеет один (два равных) корень;

в) не имеет действительных корней;

г) имеет хотя бы один общий корень с уравнением $x^2+13-30=0$?

Решение.

а) $D_1>0\leftrightarrow 4-5c>0\leftrightarrow c<\frac{4}{5}: x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-5c}}{5}$;

б) $D_1=0\leftrightarrow 4-5c=0\leftrightarrow c=\frac{4}{5}$;

в) $D_1<0\leftrightarrow 4-5c<0\leftrightarrow c>\frac{4}{5}$;

г) Уравнение $5x^2-4x+c=0$ имеет корни при $c\leq\frac{4}{5}.$.

Рассмотрим уравнение $x^2+13x-30=0$

$$D_2=169+120=289=17^2$$

$x_1 = -15,\ x_2 = 2.$

Пусть $x_1 = -15$ общий корень двух уравнений, тогда $1125 + 60 + \tilde{n} = 0 \leftrightarrow \tilde{n} = -1185$

Пусть $x_2 = 2$ общий корень двух уравнений, тогда $20 - 8 + \tilde{n} = 0 \leftrightarrow \tilde{n} = -12$

Если -15 и 2 являются корнями обоих уравнений, то имеем систему $\begin{cases} c = -12 \\ c = -1185 \end{cases}$, которое не имеет решении.

Ответ: а) $c < \frac{4}{5};$ б) $c = \frac{4}{5};$ в) $c > \frac{4}{5};$ г) $c = -12$ или $c = -1185$.

2.1.6 Задачи с параметрами в IX классе

В девятом классе изучаются такие важные вопросы как степень с рациональным показателем, квадратичная функция, решаются уравнения и системы уравнений, неравенства. Поэтому включение в дидактический материал задач с параметрами должно содействовать более качественному усвоению учебного материала и одновременно создать условия и предоставить средства для дальнейшего развития логического мышления и творческих способностей учащихся.

В связи с тем, что тема «Квадратичная функция» изучается первой, с учащимися рассматривается следующий теоретический материал: необходимые и достаточные условия для заданного расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси, свойства. функции в задачах с параметрами, аналитические и графические приемы решения задач с параметрами.

На занятиях с ребятами теоретический материал обобщается, рассматриваются соответствующие задачи с параметрами. Например, для решения большинства задач с параметрами очень важно знать свойства квадратичной функции и зависимость этих свойств от возможных соотношений между коэффициентами. Причем исследование знака дискриминанта позволяет установить наличие действительных корней, а теорема Виета знаки действительных корней.

Однако для целого ряда задач требуется еще установить расположение действительных корней квадратного трехчлена на числовой оси относительно каких-либо фиксированных точек числовой оси. Эти вопросы рассматриваются более подробно, вводятся следующие обозначения:

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ - квадратичная функция,

$f(a)$ - значение функции в точке $x = a.$

$D = B^2 - 4AC$ - дискриминант,

x_1 и x_2 (причем $x_1 \le x_2$) – действительные корни уравнения $f(x) = 0,$

$x_0 = -\dfrac{B}{2A}$ - абсцисса вершины параболы,

$y_0 = -\dfrac{D}{4A}$ - ордината вершины параболы.

Ответом на поставленную задачу служат следующие четыре обобщающие теоремы:

<u>Т1</u>. $x_1 \le x_2 < a$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \ge a, \\ A * f(a) > 0, \\ x_0 < a. \end{cases}$

<u>Т2</u>. $a < x_1 \le x_2,$ т.е. $x_2 \ge x_1 > a$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \ge 0, \\ A * f(a) > 0, \\ x_0 > 0. \end{cases}$

<u>Т3</u>. $a < x_1 \le x_2 < b$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \ge 0, \\ A * f(a) > 0, \\ A * f(b) > 0, \\ a < x_0 < b. \end{cases}$

<u>Т4</u>. $x_1 < a < x_2$ тогда и только тогда, когда $A * f(a) < 0.$ (В этом случае $D > 0$ выполняется автоматически).

Эти теоремы часто применяются при решении задач с параметрами и поэтому имеют большое значение. Однако лишь немногие учащиеся знают их точные формулировки, поскольку они не входят в школьную программу, а большинство учащихся даже не в состоянии запомнить их, не говоря уже об аналитическом доказательстве теории, хотя оно и несложно (используется теорема Виета и свойство квадратичных неравенств). Именно поэтому с учащимися в школе предлагают рассматривать геометрическую интерпретацию теорем:

1)

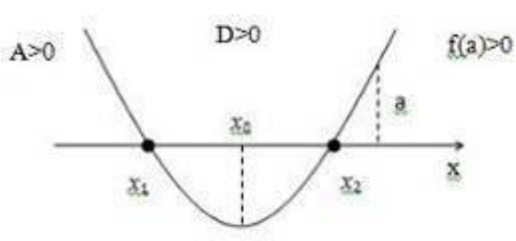

Рис. 7

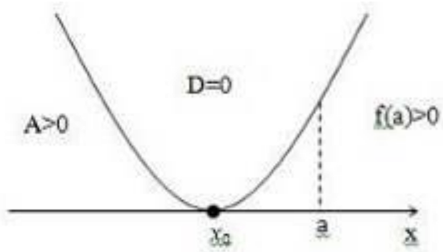

Рис. 8

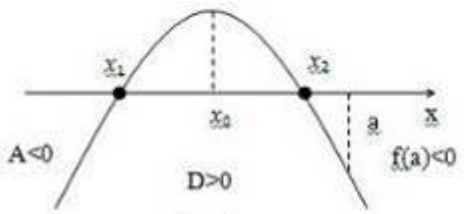

Рис. 9

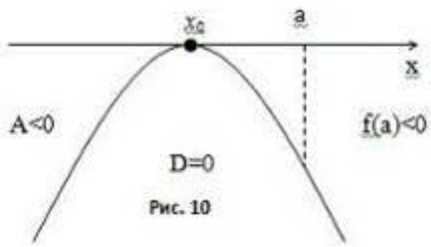

Рис. 10

Объединяя все четыре случая, получим систему Т1.

2)

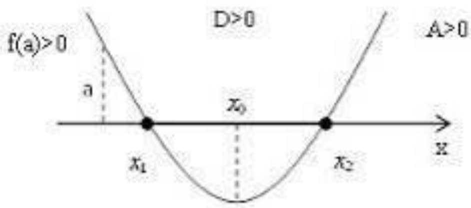

Рис. 11

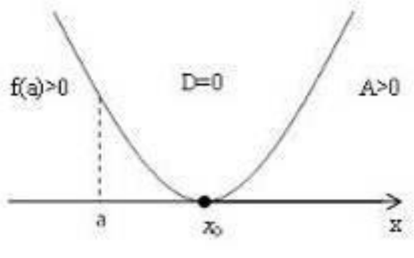

Рис. 12

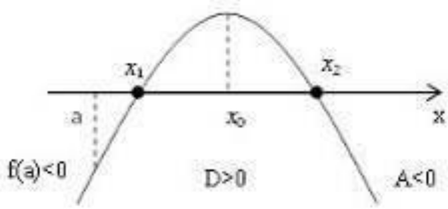

Рис. 13

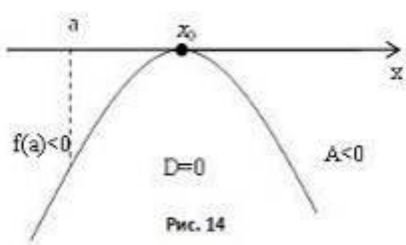

Рис. 14

Объединяя эти условия, получим систему Т2.

3)

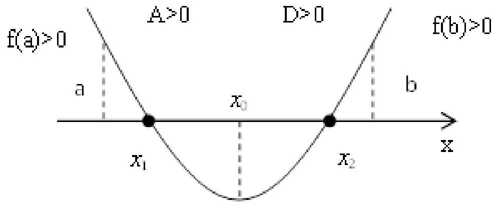

Рис. 3

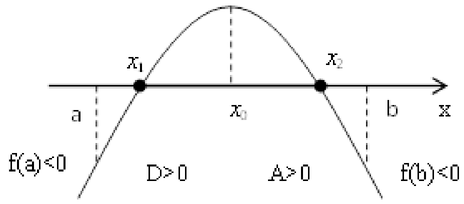

Рис. 4

В результате получим систему Т3.

4)

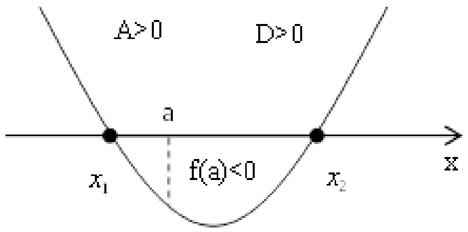

Рис. 5

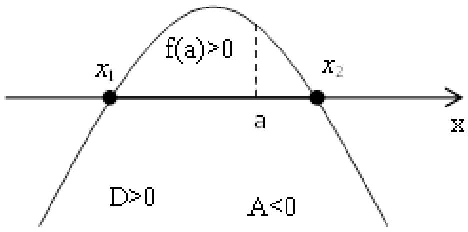

Рис. 6

Оба случая объединяются в одно условие: Т4.

Приведенная графическая интерпретация доказательства теории является не только более наглядной, но и избавляет учеников от необходимости запоминания условий этих теорем.

Рассмотрим конкретную задачу:

Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$(a-1)x^2+(2a+3)x+(a+2)=0$ имеет корни одного знака.

Решение.

Здесь возможны два случая:

$x_1 \le x_2 < 0$ и 2) $0 < x_1 \le x_2$.

Разбираются эти варианты в отдельности.

Случай 1. Искомыми являются такие значения параметра *a,* при которых график квадратного трехчлена из левой части уравнения занимает положение, схематично изображенное на рисунке №19 сплошной линией, или положение, изображенное пунктирной линией:

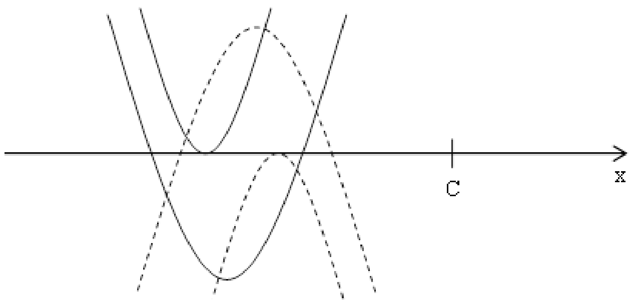

Рис. 7

Это можно описать системой неравенств:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ (a-1) * f(0) > 0, \\ x_0 = -\frac{2a+3}{2(a-1)} < 0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (2a+3)^2 - 4(a-1)(a+2) \ge 0, \\ (a-1)(a+2) > 0, \\ -(2a+3)(a-1) < 0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a \ge -\frac{17}{8}, \\ (a-1)(a+2) > 0, \\ (2a+3)(a-1) > 0. \end{cases}$$

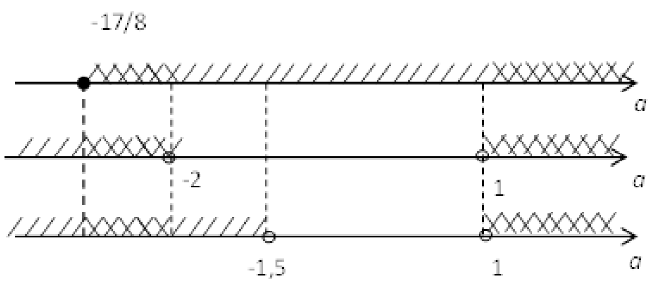

Рис. 8

Возьмем пересечение решений неравенств системы и получим ответ: $-\frac{17}{8} \le a < -2, a > 1.$

Случай 2. Он описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ (a-1) * f(0) > 0, \\ x_0 = -\frac{2a+3}{2(a-1)} < 0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a \ge -\frac{17}{8}, \\ a < -2, a > 1, \\ -1.5 < a < 1. \end{cases} \leftrightarrow a \in \varnothing$$

Таким образом, случай 2 не реализуется ни при каких значениях параметра.

Ответ: $a \in [-\frac{17}{8}; -2) \cup (1; +\infty)$ [10, с. 19- 20].

2.1.7 Задачи с параметрами в X-XI классах

в старших классах рассматриваются более сложные уравнения с параметрами: иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические.

При решении параметрических иррациональных уравнений полезно пользоваться общими формулами. *Пусть* f и g-некоторые функции, $k \in N,$ тогда:

$$\sqrt[2k]{f} * \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{fg}, f \ge 0, g \ge 0;$$

$$\frac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k]{g}} = \sqrt[2k]{\frac{f}{g}}, f \ge 0, g \ge 0;$$

$$| f | * \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{f^2 g}, g \ge 0;$$

$$\sqrt[2k]{\frac{f}{g}} = \frac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k]{g}}, g \ge 0;$$

$$\sqrt[2k]{fg} = \sqrt[2k]{| f |} * \sqrt[2k]{| g |}, fg \ge 0.$$

При этом следует иметь в виду, что ОДЗ левой и правой частей могут быть различными, то есть ОДЗ правой её части может быть шире ОДЗ левой. Например, выражение $\sqrt{f}\ \sqrt{g}$ определено при $f \ge 0, g \ge 0$, а выражение $\sqrt{fg}$ - как при $f \le 0, g \le 0.$

В то же время преобразования уравнений с формальным использованием формул 1) - 5) «справа налево» не допустимы, так как возможно сужение ОДЗ исходного уравнения, а, следовательно, и потеря корней.

Уравнение вида $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x), k \in N,$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^{2k}(x). \end{cases}$

Проиллюстрируем все вышесказанное на примере.

Решите уравнение $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a.$

Решение.

Функция $y = \sqrt[2k]{t},\ t \ge 0,\ k \in N$ монотонно возрастающая: $|x|+1 > |x|,\ \forall x \in R \rightarrow \sqrt{|x|+1} > \sqrt{|x|} \leftrightarrow \sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} > 0,\ a \in R,\ x \in R.$

Если $a \le 0,$ то $x \in \varnothing.$

Если $a > 0,$ то сделаем замену: $|x| = y,\ y \ge 0.$

$$\sqrt{y+1} - \sqrt{y} = a \leftrightarrow \sqrt{a+1} = \sqrt{y} + a \leftrightarrow y+1 = y + a^2 + 2a\sqrt{y} \leftrightarrow 2a\sqrt{y} = 1 - a^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1-a^2}{2a} \leftrightarrow y = (\tfrac{1-a^2}{2a})^2$$ и $0 < a \le 1.$

$$|x| = \frac{(1-a^2)^2}{4a^2} \leftrightarrow x = \pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}.$$

Ответ: $\pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$ при $0 < a \le 1;$ нет корней при $a \le 0$ или $a > 1.$

При решении показательных и логарифмических уравнений с параметром важным является использование свойства монотонности этих функций. Именно эту мысль необходимо довести учителю до сведения учащихся. Покажем это на следующем уравнении:

При каждом а решите уравнение $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0.$

Решение.

Пусть $2^x = t,\ t > 0.$

Тогда исходное уравнение примет вид: $t^2 - a(a+1)t + a^3 = 0$ (*)

Если $a = 0,$ то $t^2 = 0,$ т.е. $x \in \varnothing.$

Если $a \neq 0,$ то $D = a^2(a+1)^2 - 4a^3 \geq 0 \leftrightarrow (a+1)^2 - 4a \geq 0 \leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0,$

т.е. $a \in R \setminus \{0\}.$

Корни уравнения (*) могут быть только положительными.

Рассмотрим два случая:

1. Оба корня положительные: $\begin{cases} D > 0 \\ t_1 + t_2 = a(a+1) > 0, \leftrightarrow a > 0, \\ t_1 t_2 - a^3 > 0. \end{cases}$

$t_{1,2} = \dfrac{a(a+1) \pm \sqrt{a^2(a-1)^2}}{2},$ откуда $t_1 = a,\ t_2 = a^2$

2. Корни разных знаков $\begin{cases} D > 0, \\ t_1 t_2 = a^3 < 0 \end{cases} \leftrightarrow a < 0$

Получим $t_1 = a,\ t_2 = a^2.$ Так как $t_2 < 0,$ поэтому он не может быть корнем уравнения (*). Остается один корень $x = \log_2 a^2.$

Ответ: $\log_2 a,\ \log_2 a^2$ при $a > 0;\ \log_2 a^2$ при $a < 0;$ нет корней при $a = 0$.

Что касается тригонометрических уравнений, то их хорошо использовать в качестве повторения темы « Тригонометрические уравнения ». Ибо, с одной стороны, учащиеся вспоминают методы решения тригонометрических уравнений, с другой стороны, закрепляются навыки решения линейных и квадратных уравнений с параметром.

Исследуйте уравнение $a\sin^2 x + \cos x = 0$

Решение.

Рассмотрим два случая:

1) $a = 0,$ тогда имеем частный случай простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $a \neq 0,$ тогда исходное уравнение приводим к виду:

$a(1 - \cos^2 x) + \cos x = 0.$

Пусть $\cos x = y,$ где $|\,y| \leq 1$, тогда уравнение перепишем в виде:

$ay^2 - y - a = 0,$ решение которого не вызывает затруднений:

$y_{1,2}=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}$, $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}+2\pi n,$ где $n\in Z,$ при условии

$$\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}\ge -1\\ \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}\le 1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(1+2a-\sqrt{1+4a^2})a\ge 0\\ (1-2a-\sqrt{1+4a^2})a\le 0\\ a\ne 0\end{cases}$$

Рассмотрим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\ 1+2a-\sqrt{1+4a^2}\ge 0,\\ 1-2a-\sqrt{1+4a^2}\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\ 1+2a-\sqrt{1+4a^2}\le 0,\\ 1-2a-\sqrt{1+4a^2}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

Решив которую, получаем ответ.

Ответ: $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}+2\pi n,$ где $n\in Z,$ при $a<0$ или $a>0;\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

2.2 Организация, проведение и основные итоги педагогического эксперимента

В ходе педагогической практики (МАОУ «СОШ №24 с УИОП» Старооскольского городского округа) нами проводился педагогический эксперимент. Он осуществлялся поэтапно: констатирующий, поисковый, обучающий и контрольный. В ходе его проведения нам было необходимо получить подтверждение эффективности разработанной методики моделирования в процессе обучения учащихся решению задач с параметрами. Эксперимент проводился на дополнительных занятиях.

1. Констатирующий эксперимент.

На данном этапе происходило выявление исследуемой проблемы (развитие у учащихся умений моделирования при решении уравнений с параметрами) в теории и практике обучения, изучалась и анализировалась психолого-педагогическая литература, опыт учителей по интересующей нас проблеме (параграфы 1.1 и 1.2 главы 1).

Были отобраны 10 учащихся для проведения с ними самостоятельной работы с целью выявления их знаний по теме «Уравнения с параметрами». Работа состояла из 10 заданий, из которых последние три были более сложными. Для каждого задания предлагалось три ответа, один из которых правильный, а два другие - неверные. Учащиеся должны были не просто указывать букву правильного ответа, но и оформить подробное решение задания. Уравнения были новыми, необычными для учащихся, вызывали у них интерес, побуждали к активным поискам решения.

<u>Критерии оценок</u>: оценка «5» - за 9 - 10 верных ответов; оценка «4» - за 7 - 8 верных ответов; оценка «3» - за 5 - 7 верных ответов; оценка «2» - за 0 - 4 верных ответов. Итоги тестирования были занесены в специальную таблицу, в которой рядом с каждой фамилией ученика знаком «+» отмечались верные ответы, знаком «-» - неверные, указывалось количество верных ответов и оценка.

Таблица №3

		№ задания											
№	Ф.И ученика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Кол-во верных ответов	Оценка
1	Бучнева Татьяна	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	5	«3»
2	Данилкин Дмитрий	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	2	«2»
3	Дягилева Екатерина	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	6	«3»

4	Зубков Евгений	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	3	«2»
5	Кайсаканова Валерия	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	6	«3»
6	Мишустина Анастасия	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	8	«4»
7	Сальникова Екатерина	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	5	«3»
8	Сторожев Максим	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	3	«2»
9	Хасанов Даниил	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	6	«3»
10	Шукронаева Мадина	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	7	«4»

С целью иллюстрации итогов констатирующего этапа эксперимента приведем сравнительную диаграмму (рис. №21).

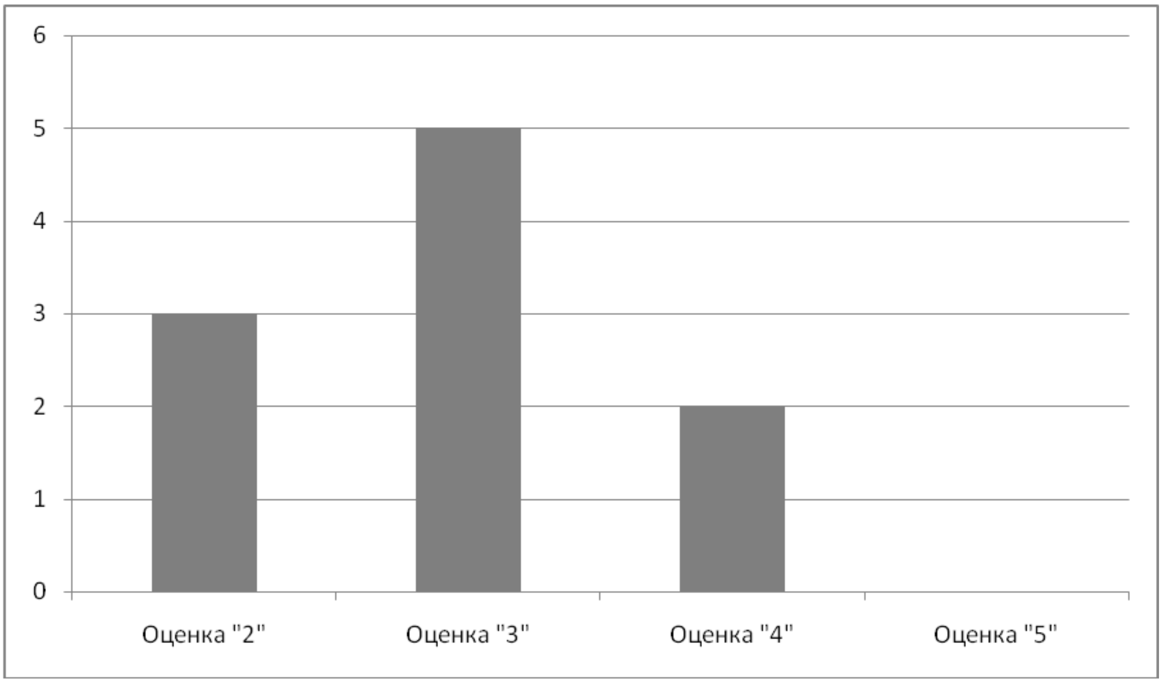

Рис. 9. Итоги констатирующего эксперимента

Анализ проведенной самостоятельной работы показал, что учащихся испытывают затруднения при решении уравнений с параметрами. Это означает, что этот материал изучался ими формально. У учащихся плохо развиты умения моделирования, значит предыдущее преподавание мало способствовало их формированию у учеников, поэтому целесообразно уделить больше внимания развитию данного вида умений, с помощью решения уравнений с параметрами.

2. Поисковый эксперимент.

На данном этапе проводилась разработка комплекса учебных занятий, направленных на развитие у учащихся умений моделирования в процессе решения уравнений с параметрами. Для этого было продумано поэтапное повторение и отработка знаний, с использованием специального комплекса заданий. Для разнообразия и возбуждения интереса учащихся были включены нестандартные задания(параграф 2.1 главы 2). После анализа первой самостоятельной работы каждый из учащихся выполнял дома работу над ошибками. В этой работе ученик должен был представить подробное решение задачи, по которой был дан неверный ответ, с теоретическим обоснованием допущенной ошибки.

Комплекс занятий:

Таблица №4

№	Тема	Количество часов
1	Уравнения с параметром: основные понятия	1
2	Решение простейших уравнений с параметрами	1
3	Решение задач на нахождение множества корней уравнения в зависимости от параметра, моделирование задач с параметром.	1
4	Решение задач на нахождение значений параметра, удовлетворяющих условиям, накладываемым на множество корней, построение моделей таких задач	1
5	Анализ самостоятельной работы	2
6	Итоговое занятие по проделанной работе	1

3. Обучающий и контрольный эксперимент.

Здесь с учащимися был проведен разработанный на втором этапе эксперимента комплекс заданий и проверка эффективности разработанной методики – проведение письменной самостоятельной работы.

На выходе мы получили следующие результаты:

Таблица №5

		№ задания											
№	Ф.И ученика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Кол-во верных ответов	Оценка
1	Бучнева Татьяна	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	7	«4»
2	Данилкин Дмитрий	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	5	«3»
3	Дягилева Екатерина	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	7	«4»
4	Зубков Евгений	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	5	«3»
5	Кайсаканова Валерия	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	8	«4»
6	Мишустина Анастасия	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	9	«5»
7	Сальникова Екатерина	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	7	«4»
8	Сторожев Максим	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	9	«5»
9	Хасанов Даниил	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	7	«4»
10	Шукронаева Мадина	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10	«5»

В таблице №6 более наглядно представим результаты проведенной работы до эксперимента и после.

Таблица №6

	Количество полученных оценок			
	«5»	«4»	«3»	«2»
До эксперимента	0	2	5	3
После эксперимента	3	5	2	0

Ниже с целью иллюстрации эффективности внедрения разработанного комплекса заданий приведем сравнительную диаграмму (рис. №22)

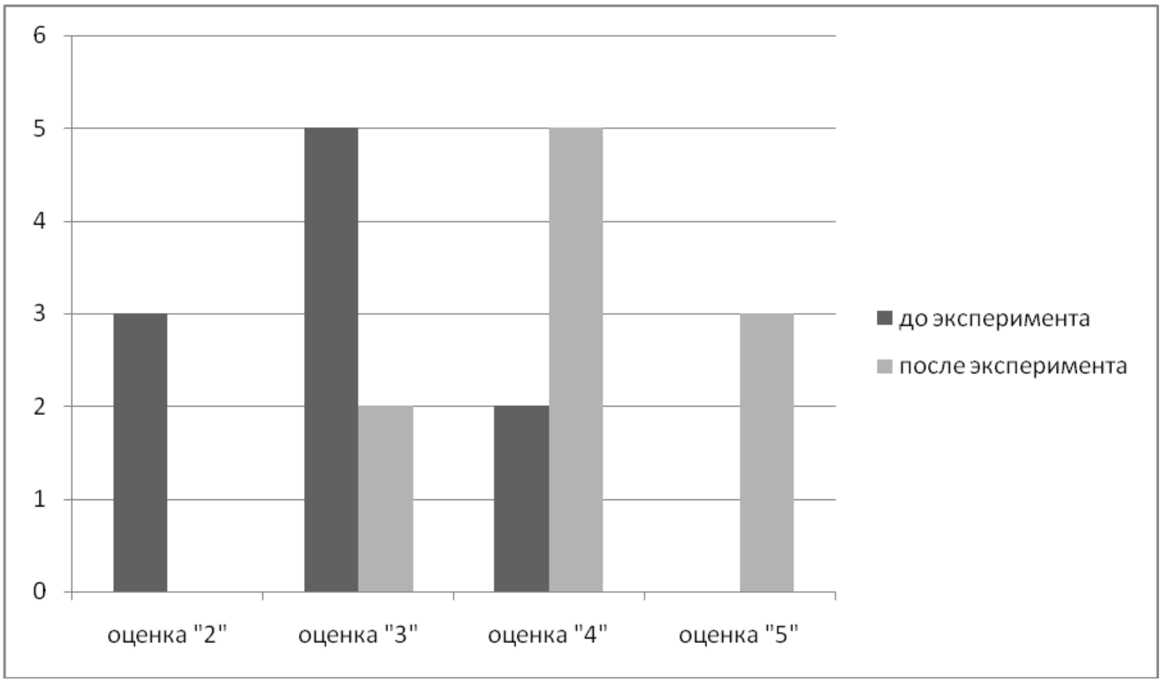

Рис. 10. Сравнительная диаграмма эффективности внедрения разработанного комплекса заданий

Из таблицы видно, что уровень развития у учащихся умений моделирования после проведения эксперимента значительно повысился. Таким образом, мы экспериментально подтвердили гипотезу нашего исследования - если в процессе обучения учащихся решению задач с параметрами, использовать специальный комплекс упражнений, то можно ожидать развития у учащихся умений моделирования.

Выводы по второй главе

в V - VI классах не ставится задача полного освоения параметра. Тем не менее, желательно методично предлагать задачи с параметрами на уроках. В VII классе круг задач, От которых легко перейти к задачам с параметрами значительно шире. Да и теоретически материал представляет богатые возможности. В VIII классе имеется много тем, где можно с успехом использовать задачи с параметрами: при решении уравнений и неравенств с одной переменной, при решении дробно-рациональных уравнений и, естественно, при решении квадратных уравнений. Здесь основное внимание уделяется не только вопросам теории, но и методам решения задач с параметрами. В IX классе изучаются такие важные вопросы как степень с рациональным показателем, квадратичная функция, решаются уравнения и системы уравнений, неравенства. Поэтому включение в дидактический материал задач с параметрами должно содействовать более качественному усвоению учебного материала и одновременно создать условия и предоставить средства для дальнейшего развития логического мышления и творческих способностей учащихся. В старших классах рассматриваются более сложные уравнения с параметрами: иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические.

В результате решены три последние задачи исследования:

1. Выполнен анализ содержания школьного курса алгебры с точки зрения

подготовки учащихся к решению задач с параметрами.

2. Разработан комплекс учебно-исследовательских задач с параметрами.

3. Организован педагогический эксперимент и подведены его основные итоги.

Заключение

В процессе исследования мы получили следующие результаты:

1. Выявлено, что проблема формирования у учеников умений моделирования «через задачи» действительно не достаточно проработана и по этой причине весьма значима и актуальна.

2. Аргументирована потребность привлечения интереса к задачам с параметром, т.к. их решение помогает развитию умений моделирования у обучающихся.

3. Создана методика развития умений моделирования у учеников в ходе их обучения решению задач с параметром.

4. Опытным путём доказано предположение: если в ходе обучения школьников решению задач с параметрами, применять специально предназначенный для этого набор задач, то можно добиться формирования умений моделирования у обучающихся.

Абсолютно понятно, что на уроках математики должны решаться подобные задачи и упражнения, решение которых помогает глубоко понять и прочно усвоить учениками той системы математических знаний и умений, которые предусмотрены учебной программой и федеральным стандартом. Но, помимо этого, в курсе математики в школе должны быть достаточно хорошо представлены и задачи по формированию умений моделирования. К числу подобных задач относят задачи с параметрами, которые дают возможность сформировывать у обучающихся понятия о характерных чертах моделирования в математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин, Н.Я. Математика [Текст]: учеб. для 5 кл. средней школы / Н.Я. Виленкин, А.С. Чесноков, В.И. Жохов.- М.: Просвещение, 2013.- 154с.

2. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст] / Л.В. Виноградова- Ростов н/д: Феникс, 2005.- 252с.

3. Голубев, В.И. О параметрах – с самого начала [Текст] / В.И. Голубев, А.М. Гольдман, Г.В. Дорофеев // Репетитор. - 2012. - №2 - с. 3-13.

4. Горбачев, В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами [Текст] // Мат. в шк. г: 1999. - №6.- С. 60-68.

5. Горбачев, В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами [Текст] // Мат. в шк. - 2000. - №2.- С. 61-68.

6. Горнштейн, П.И. Задачи с параметрами [Текст] / П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский. - М.: Просвещение, 1997.- 182с.

7. Дубич, С.Л. Линейные и квадратные уравнения с параметрами [Текст] / / Математика. - 2001. - №3.- С. 28 - 31.

8. Егерман, Е.В. Задачи с параметрами. 7 - 11 классы [Текст] // Математика. - 2003. - №1. - С. 18 - 20.

9. Капкаева, Л.С. Алгебраические и геометрические методы в обучении математике [Текст] // Мат. в шк. - 2009. ·-№7. - С. 27-33.

10. Котухов, С.К. Различные способы решения задач с параметрами [Текст] // Мат. в шк.- 1998.-№6.- С. 9-12.

11. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика [Текст]: учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов пед. институтов.- М.: Просвещение, 1975.- 462с.

12. Копылов, В.С. Учебно-методические материалы спецкурса по методике преподавания математики «Задачи с параметрами в средней школе» [Текст] / В.С. Копылов, Т.М. Савина.- М.: Прометей, 2006.- 29с.

13. Леонтович, А.В. Исследовательская деятельность школьников [Текст] / / Школьные технологии.- 2006.-№6.- С. 89- 98.

14. Мишин, В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. [Текст]/ В.В. Мишин.- М.: Экзамен, 2009.- 176с.

15. Моденов, В.П. Задачи с параметрами [Текст]/ В.П. Моденов.-М: Экзамен, 2012.- 86с.

16. Мордкович, А. Уравнения и неравенства с параметрами [Текст] // Математика. - 2010. -№38.- С. 2 - 3.

17. Мягкий О.В. Сущность деятельности учащихся при обучении моделированию / О.В. Мягкий // Перспективы науки и общества в условиях инновационного развития: Сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции (Саратов, 03 ноября 2018 г.). - Стерлитамак: АМИ, 2018. - 188 с

18. Мягкий О.В. Формирование деятельности учащихся при обучении моделированию / О.В. Мягкий // Перспективы науки и общества в условиях инновационного развития: Сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции (Саратов, 03 ноября 2018 г.). - Стерлитамак: АМИ, 2018. - 188 с

19. Пескова, Т.А. Первое знакомство с параметрами в уравнениях. 7 класс [Текст] // Математика. - 1999. -№36.- С. 29.

20. Пронина, Е.С. Линейные уравнения с параметрами: методические рекомендации [Текст] // Мат. в шк.- 2000. -№12.- С.3-5.

21. Романов, П.Ю. Решение задач с параметрами [Текст] // Математика. - 2006. -№12. - С. 13-15.

22. Савенков, А.И. Исследовательская деятельность учащихся [Текст] // Школьные технологии.- 2008.- №1.- С. 11- 20.

23. Цыпкин, А.Г. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы [Текст] / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – 2-е издание, перераб. и доп. – М.: Наука, 2009. – 576 с.

24. Шабанова, М.В. Уравнения и неравенства с параметрами [Текст] // Математика. - 2007.-№38.- С. 27 - 31.

25. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 10-х классов средней школы [Текст] / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

26. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 11 класса средней школы [Текст] / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. – М.: Просвещение, 2007. – 384 с.

27. Шахмейстер, А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами [Текст]/ А.Х. Шахмейстер.-М.: Виктория плюс, 2015,-136с.

28. Шерстаков, С.В. Уравнения с параметром [Текст] / С.В. Шерстаков, Е.Н. Юрченко.- М.: Слог,1993.- 107с.

29. Шихалиев, Х.Ш. Уравнения и неравенства с параметрами [Текст] // Мат. в шк.- 1980.-№21.- С. 34- 35.

30. Ястребинецкий, Г.А. Задачи с параметрами [Текст] / Г.А. Ястребинецкий.- М.: Просвещение, 2011.- 128с.

Приложение

Вариант 1

1)Сумма цифр двузначного числа равна а. Если в этом числе переставить цифры, то новое число будет больше искомого на 63. Найдите это число, определив все допустимые значения величины а.

2) В двузначном числе цифра единиц на а больше цифры десятков. Если увеличить в 7 раз число, выраженное цифрой его десятков, и то же самое сделать с цифрой его единиц, а затем к первому произведению приписать справа второе, то получится четырехзначное число, в 61 раз больше искомого. Найдите это число, определив все допустимые значения а.

3) Для погрузки m одинаковых машин на завод был подан подвижный состав в 30 товарных вагонов двух типов. Вагоны одного типа вмещают по а машин, вагоны второго типа – по 4 машины каждый. Сколько вагонов каждого типа было подано под погрузку машин? Найдите для величин m и а такие числовые значения, при которых задача имеет решение неопределенного характера и истолковать его.

4) Отцу 45 лет, сын моложе его на а лет. Сколько лет назад отец был или через сколько лет он будет в 8 раз старше сына, если известно, что каждый год день рождения они праздновали одновременно. Определите допустимые значения величины а и найдите все решения задачи, если искомое число целое и $a>18$.

5) По какому одинаковому числу надо прибавить к числителю и знаменателю дроби ¾, чтобы она стала равной числу k ?

6) Охотник предложил своему сыну стрелять в цель на следующих условиях: за каждое попадание он платит ему по 50 руб., а за неудачный выстрел удерживает с него 35 руб. Сделав n выстрелов, сын получил 425 рублей. Сколько удачных выстрелов он сделал, если известно, что была использована начатая пачка патронов, содержащая в запечатанном виде 25 штук?

7) 335 дынь надо уложить в 34 ящика. Ящики двух размеров: малые и большие. Большие ящики вмещают а дынь, меньшие - 9 штук. Узнайте, сколько ящиков большого размера, а затем и меньшего размера следует взять для упаковки дынь.

8) Некоторое двузначное число, у которого число десятков больше количества единиц, имеет своими цифрами корни уравнения $6x^2 + 5ax + a^2 = 0$. Найдите это число, выбрав для **а** соответствующие числовые значения.

9) 15 литров молока разлито в несколько бидонов одинаковой емкости. Если это молоко разлить в бидоны, емкость каждого из которых на **а** литров меньше, то потребуется на **а** бидонов больше. Во сколько бидонов было разлито молоко?

10) В книжном магазине на одной полке стояло несколько одинаковых томиков стихотворений Пушкина, а на другой полке такое же количество книжек с рассказами Гоголя. После того, как с первой сняли **n** книг, а на второй добавили столько же книжек с рассказами Гоголя, стоимость книг на каждой полке стала равной 60 рублям. Сколько книг первоначально было на каждой полке, если известно, что покупатель, взявший томик стихотворений Пушкина и книжку с рассказами Гоголя, заплатил 10 рублей.
Число **n** считать меньшим 10.

Вариант 2

1)Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если от искомого числа отнять число а, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

2) Для погрузки 185 одинаковых машин на завод было подано 30 вагонов двух типов. Вагоны одного типа вмещают по а машин каждый, другого типа по 4 машины. Сколько вагонов каждого типа было подано на завод? Определите допустимые значения и найдите все решения задачи, если известно, что никакой вагон не может вместить больше 20 машин каждый.

3) Две бригады рабочих заработали 900000 рублей. Каждый рабочий одной бригады получил по 35000 рублей, а другой по 25000 рублей. Сколько рабочих было в каждой бригаде, если в одной из них было на а человек больше, чем в другой? Определите допустимые значения величины а и найдите все решения задачи.

4) Брат и сестра копили деньги на покупку книг. Один из них ежедневно откладывал в копилку на m гривенников больше другого. Известно, что таким путем брат откладывал в день по одному рублю. К первому июля в копилке брата было 7 рублей, а в копилке сестры 6m гривенников. К какому числу брат собрал или соберет вдвое больше, чем сестра?

5) Отцу а лет. Сын на n лет моложе. Через сколько лет отец был или будет в k раз старше сына?

6) В школе два параллельных девятых класса с общим числом обучающихся в а человек. В начале года из класса с большим числом обучающихся перевели в другой класс двух человек, после чего в меньшем классе стало 8/9 того количества, что в большем. Сколько обучающихся было в каждом классе вначале, если предельная норма обучающихся для класса 30 человек.

7) Если на каждую из скамеек в парке посадить по а человек, то четверо останутся без места, а если на каждую посадить по шесть человек, то на последней скамейке останется три незанятых места. Узнайте, сколько было скамеек и человек.

8) Двузначное число оканчивается цифрой **а**. Если это число помножить на число, выраженное цифрой его единиц, то полученное произведение будет в 7 раз больше разности квадратов его цифры десятков и цифры единиц. Найдите это число.

9) Несколько человек должны были заплатить поровну всего 20 рублей. Если бы их было на **n**человек меньше, то каждому из них пришлось бы заплатить на **2n** рублей больше. Сколько лиц должно уплатить требуемую сумму?

10) В двузначном числе цифра десятков на **а** больше цифры его единиц. Сумма квадратов цифр числа равна 65. Найдите это число.