ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ КАК ФАКТОР ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМНОСТИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование
заочной формы обучения, группы 02041660
Руиса Максима Мариовича

Научный руководитель:
к. ф.-м. н. доцент
Есин В.А.

Рецензент:
"Почетный работник
общего образования РФ",
учитель математики высшей
квалификационной категории
МАОУ «СОШ №24 с УИОП»
г. Старый Оскол
Деренко В. М.

БЕЛГОРОД 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Именно школьное образование должно обеспечить качественное продолжение математического образования и создать основу формирования умений и навыков учащихся в познавательной деятельности. Овладение этой основой предполагает необходимость формирования системности знаний, что, в свою очередь, обеспечивается комплексным подходом к обучению учащихся общеобразовательной школы.

Проблема формирования системности знаний, как в целом, так и ее отдельные аспекты, исследовалась многими учеными. Одни акцентировали внимание на сущности и задачах математического образования, другие вместе с тем учитывали профессиональный аспект подготовки учителя.

В отечественной и зарубежной педагогике основательно исследованы многие аспекты формирования познавательной деятельности учащихся.

В работах В. А. Гусева, В. А. Далингера, Н. Б. Истоминой, Ю. М. Колягина, Г. И. Саранцева, Е. И. Смирнова, А. А. Столяра и других рассматривается роль различных средств обучения математике, в частности задач. Формирование основ математической культуры школьника начинается с усвоения математических понятий. А. Я. Хинчин предупреждал о вреде, наносимом математическому образованию расплывчатым усвоением понятий. А. Н. Колмогоров советовал о введении понятия в школьное обучение так, как оно формулируются в науке. О необходимости правильной формулировки математических понятий посвящен ряд исследований Г. И. Саранцева, по мнению которого системный анализ и деятельностный подход закладывают основу познавательной культуры учащегося. Одновременно он отмечает важность методических концепций, подчеркивает необходимость расширения функций обучения математике дополнением их такими функциями, как эвристической, прогностической, эстетической, практической, контрольно-оценочной, информационной, корректирующей, интегрирующей функциями. А. Л. Жохов предлагает комплексный подход сделать постулатом в формировании методической системы обучения. Исследования психологов посвящены усвоению материала различными способами познания, не ограничиваясь одним вариантом.

Однако методика формирования математических понятий в рамках комплексного подхода к обучению, рассматривается, в основном, применительно к конкретным понятиям и методам. В практическом плане методика обучения математике в школе, используя комплексный подход, особенно в средней общеобразовательной школе, недостаточно разработана.

Анализ школьных учебников и методических пособий убеждает в одностороннем раскрытии содержания изучаемого материала. Так, алгебраические понятия изучаются без привлечения их геометрических интерпретаций, а геометрический материал излагается без использования его алгебраических моделей. Чаще всего вне рамок изучения материала остаются его приложения, внутрипредментные и межпредметные связи. Сказанное свидетельствует о необходимости совершенствования методики обучения математике в общеобразовательной школе. Для достижения этой цели нужно обеспечить различное отражение учебной информации, расширить диапазон свободного выбора познавательных приемов информации, создать учащимся условия для творческого подхода к познанию изучаемого объекта (понятие, теорема, решение задачи), раскрывая его содержание и связи с другими объектами.

Однако достижение целей обучения математике, требования повысить качество знаний и умений предполагают осуществление обобщающего исследования роли комплексного подхода в формировании системности знаний. Сказанное подтверждают и феномены, характерные для обучения математике в средней школе. К ним относятся:

- недостаточная реализация в учебном процессе внутрипредметных связей, являющихся стержневой линией формирования системности знаний учащихся;

- комплексный подход к раскрытию содержания программного материала остается на уровне любительских поисков, что не способствует формированию у массы учащихся математической культуры в познании;
- смысл термина «усвоение базового материала» остается недостаточно реализованным в практике обучения в общеобразовательной школе.

В этих условиях **цель** нашего исследования заключается в поиске путей и средств формирования системности математических знаний учащихся средней школы, опираясь на комплексный подход в обучении.

Объектом исследования является процесс обучения математике в средних и старших классах общеобразовательной школы

Предметом исследования является содержательная, структурная и информационная специфика использования комплексного подхода в обучении математике и его влияние на формирование системности знаний, умений и навыков учащихся общеобразовательной школы.

Цель, объект и предмет исследования обусловили следующую **гипотезу:** если выделить особенности комплексного подхода к обучению математике учащихся, разработать систему заданий, адекватных им, то ее реализация будет способствовать сформированности системности знаний учащихся.

Для достижения поставленной цели и проверки сформулированной гипотезы нужно было решить следующие **задачи**:

1. выполнить анализ учебно-методической литературы по проблеме использования комплексного подхода к обучению математике в школе и рассмотреть возможность расширения ее прикладного характера с учетом целей исследования;
2. определить содержание комплексного подхода к обучению математике как средству формирования системности знаний;
3. исследовать вопрос о том, в какой степени может повлиять применение комплексного подхода при усвоении учащимися школы

программного материала на повышение качества их знаний;

4. разработать учебные материалы, как дополнение к традиционным учебникам, и методику их использования в процессе обучения математике в средней школе

5. провести экспериментальную проверку составленных учебно-экспериментальных материалов на предмет их влияния на качество знаний учащихся по математике, выполнить анализ качества знаний учащихся экспериментальных и контрольных классов и сформулировать соответствующие выводы относительно эффективности использования материалов в общеобразовательной школе.

Методы исследования: системный анализ; деятельностный подход; анализ философской, методической, психолого-педагогической литературы; опрос, интервьюирование и анкетирование учителей математики; организация и проведение констатирующего, поискового и обучающего экспериментов; обработка, интерпретация полученных данных в процессе проведения эксперимента. Кроме того, в ходе исследования учитывался собственный опыт работы автора, как учителя математики в школе.

Экспериментальной базой исследований послужило МАОУ «СОШ №24 с УИОП» г. Старый Оскол.

Теоретически в исследовании было раскрыто содержание комплексного подхода к обучению математике учащихся образовательных школ; выявлена специфика реализации комплексного подхода к обучению математике в школе как фактора формирования системности знаний учащихся; разработаны приемы использования комплексного подхода к обучению математике в школе; раскрыты возможности реализации инновационных приемов в методике обучения математике, используя комплексный подход с целью развития их мышления на основе реализации внутрипредметных и межпредметных связей.

Практические результаты исследования могут быть использованы в разработке методического обеспечения формирования системности знаний;

составлении учебно-методических материалов по обучению учащихся математике;

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО ПОДХОДА К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1.1. Понятия «системность знаний» и «комплексный подход» в учебно-методической литературе

Решение вопроса о специфических признаках системного подхода, в отличие от любого другого типа научного исследования, предопределяется тем, что понимается под системой.

Как и любое фундаментальное понятие, система конкретизируется в процессе рассмотрения ее основных свойств. На основе анализа литературы выделяются четыре основных свойства:

- система есть, прежде всего, совокупность элементов, которые при определенных условиях могут рассматриваться как системы;
- наличие существенных связей между элементами и (или) их свойствами, превосходящих по мощности (силе) связи этих элементов с элементами, не входящими в данную систему. Под существенными связями понимаются такие, которые закономерно, с необходимостью определяют интегративные свойства системы.
- наличие определенной организации, что проявляется в системе энтропии (системе неопределенности, хаоса), системы по сравнению с энтропией системообразующих факторов, определяющих возможность создания системы, число существенных связей, которыми может обладать элемент, число квантов пространства и времени;
- существование интегративных свойств, т.е. присущих системе в целом, но не свойственных ни одному из ее элементов в отдельности. Их наличие показывает, что свойства системы хотя и зависят от свойств элементов, но не окружают их полностью, т.е. система не сводится к простой совокупности элементов, и, расчленяя систему на отдельные части, нельзя познать все свойства системы в целом:

Система представляет собой совокупность элементов (объектов, субъектов), находящихся между собой в определенной зависимости и составляющих некоторое единство (целостность), направленное на достижение определенной цели.

Система может являться элементом другой системы более высокого порядка (надсистема) и включать в себя системы более низкого порядка (подсистемы).

Таким образом, понятия "элемент", "подсистема", "система", "надсистема" взаимно преобразуемы: система может рассматриваться как элемент системы более высокого порядка, а элемент - как система (при углубленном анализе).

В настоящее время ученые пришли к выводу, что математика неэффективна при исследовании широких проблем с множеством неопределенностей, которые характерны для исследования и разработки техники как единого целого. Вырабатывается концепция такого исследования, в котором упор делается преимущественно на разработку новых диалектических принципов научного мышления, логического анализа систем с учетом их взаимосвязей и противоречивых тенденций. При таком подходе на первый план выдвигаются не математические методы, а сама логика системного подхода, упорядочение процедуры принятия решений. И видимо, не случайно, что под системным подходом зачастую принимается некоторая совокупность системных принципов.

Говоря о системном подходе, можно говорить о некотором способе организации наших действий, таком, который охватывает любой род деятельности, выявляя закономерности и взаимосвязи с целью их более эффективного использования. При этом системный подход является не столько методом решения задач, сколько методом постановки задач.

На основе анализа по данной проблеме позволил нам выделить следующие основные принципы системного подхода:

целостность, позволяющая рассматривать одновременно систему как единое целое и в то же время как подсистему для вышестоящих уровней;

- иерархичность строения, то есть наличие множества (по крайней мере, двух) элементов, расположенных на основе подчинения элементов низшего уровня элементам высшего уровня. Реализация этого принципа хорошо видна на примере любой конкретной организации. Как известно, любая организация представляет собой взаимодействие двух подсистем: управляющей и управляемой. Одна подчиняется другой;
- структуризация, позволяющая анализировать элементы системы и их взаимосвязи в рамках конкретной организационной структуры. Как правило, процесс функционирования системы обусловлен не столько свойствами её отдельных элементов, сколько свойствами самой структуры.
- множественность, позволяющая использовать множество кибернетических, экономических и математических моделей для описания отдельных элементов и системы в целом;
- системность, свойство объекта обладать всеми признаками системы. В нашем исследовании рассматривается понятия «системность знаний», характеризующееся наличием в сознании структурно-функциональных связей между разнородными элементами знаний.

Например, система знаний предполагает понимание учащимися соотношения между разнопорядковыми понятиями, понятиями и законами, научными фактами и постулатами, постулатами и следствиями и пр., осознание личностью знаний по их месту в научной теории.

Как показывает школьная практика, от сознания ученика (независимо от его успеваемости, способностей и пр.) указанные выше связи ускользают. Непонимание учащимися структурных связей между разнородными элементами теоретических знаний, включённых в учебные предметы, отражается на осмыслении знаний, усвоенных в определённой последовательности, препятствует формированию целостности знаний, увеличивая нагрузку на память.

Использование системного подхода в решении проблем образования, таким образом, предполагает выполнение следующих требований:

- определять образование как систему;
- исследовать каждый компонент системы образования в целях определения и обеспечения полноты ее состава;
- определять всю совокупность структурных связей, и в случае необходимости изменять, делать структуру образования более совершенной;
- разобраться в механизме функционирования отдельных звеньев системы образования, ее целостной организации, управлять этим механизмом на научной основе;
- определять тенденции и предвидеть уровни развития системы образования как важнейшее условие совершенствования процесса в целом.

Системность знаний можно понимать, как качество совокупности знаний; это словосочетание характеризуется наличием в сознании структурно-функциональных связей между разнородными элементами. Системность знаний в высшей степени способствует прочности и надежности усвоения.

В исследовании понимается системность знаний в смысле прочности и надежности их усвоения.

Для решения данного процесса мы рассматриваем комплексный подход к обучению математике.

Необходимость осуществления комплексного подхода нашло определенное развитие в теории и практике отечественной педагогики.

Так, в последнее время в теории педагогики комплексный подход получил обоснование как один из ведущих принципов обучения и воспитания.

Немаловажное условие комплексного подхода, как уже подчеркивалось, - единство целей, содержания, форм и методов обучения и воспитания. Комплексность в таком контексте означает отсутствие противоречий между замыслом и путями его осуществления, соответствие результатов поставленным целям и задачам. Комплексный подход к воспитанию и обучению это принцип проектирования и организации функционирования педагогических систем и процессов. Состоит он в учете в процессе их проектирования различных сторон и аспектов деятельности, а также в учете различных внешних влияющих факторов.

Комплексный подход очень близок системному, приводящий во взаимосвязь и взаимодействие все компоненты педагогической системы (школы, гимназии, школ района или города) и процесса (цели, принципы, содержание, методы, средства, формы) и выделяющий ведущие звенья, системообразующие компоненты. Комплекс всегда менее полон, ограничен, с более жесткими связями между компонентами и меньшей их автономией, чем система.

«Нет сомнения в том, - пишет Пугачёв А. С. [18, с. 302], - что в ближайшее время получат разработку теоретические основы комплексного подхода в связи с созданием целостной системы непрерывного образования. В этом возникла настоятельная необходимость научного обоснования комплексного подхода к обучению и воспитанию учащихся».

Значит, возникает необходимость комплексного подхода к раскрытию содержания изучаемого материала.

Комплексный подход к педагогическому процессу с использованием интерактивных инновационных технологий позволяет существенно улучшить качество обучения на данный момент, включая междисциплинарную интеграцию и развитие математического мышления учащихся.

Итак, цель обучения: повышения качества знаний учащихся по математике и формирование у них умений пользоваться приобретенными знаниями. Добиться этой цели с максимальной отдачей возможно, если у них сформируется в процессе обучения системность знаний. Достижение таких результатов невозможно, если комплексный подход к обучению не использовать как один из главных принципов обучения

1.2. Дидактический аспект комплексного подхода к обучению математике в средней общеобразовательной школе

Исходя из того, что личность школьника выступает как субъект образования, под комплексным подходом мы понимает все, что способствует проявлению позитивных качеств этой личности, составляющих ее целостность как системы общественных отношений. В познавательном плане комплексный подход наиболее продуктивен, особенно на первоначальном этапе восприятия изучаемого материала, если обращать внимание на образование через способы усвоения его содержания. Здесь хочется выразить свое мнение по вопросу восприятия понятий словами И. Я. Лернера и М. Н. Скаткина [24, с.7]: «Осознанное восприятие и запоминание информации» - это основа наших исследований. В частности, комплексный подход в обучении математике более детально обосновывается и Г. И. Саранцевым, подчеркивающий, что: «… обучение доказательству есть обучение анализу готовых доказательств, их воспроизведению, самостоятельному открытию факта, поиску и конструированию доказательства, а также опровержению предложенных доказательств. Особенность данной концепции не только в расширенном толковании обучения доказательству, но и в том, что она не противопоставляет логику и эвристику, а объединяет обе составляющие в единое целое» [21, с. 124].

Итак, объективную основу реализации комплексных приемов обучения, составляет взаимопроникновение интеграции и дифференциации в науке. «Овладев категориальным строем мышления в области данной науки, пишет М. Н. Скаткин, - человек может впоследствии забыть многие частности, но всегда он сохранит способность осмысленно подходить к любому, даже неизвестному факту, относящему к данной области. Вот почему формирование категориального мышления – важнейшая задача обучения каждому учебному предмету» [24, с. 25].

Дидактическая основа проектирования обучения это прежде всего осмысление границ приложений и продуктивное использование традиционных дидактических принципов и разработка новых, более адекватных современному образовательному пространству. В частности, мы обращаем внимание на принципы преемственности и сопряженности традиционного понятийно-категориального аппарата теории обучения с новыми качествами, признаками, свойствами формируемого аппарата образовательного пространства, в котором проектируется обучение.

Говоря о комплексном подходе в обучении математике, невозможно обходить такое важное понятие в педагогике как «метод», которое нами понимается как форма практического и теоретического освоения действительности, исходящего из закономерностей движения преобразующего или изучаемого объекта, как система направляющих принципов практической и познавательной деятельности.

Когда мы говорим об интегративном подходе при обучении математике, мы ограничиваемся одним из вариантов интеграции, именно интеграции различных методов познания одного и того же объекта, одного и того же материала, доказательства, решения задачи и т.д. В этом плане комплексный подход как метод познания в школьном курсе математике, хотя не новый, но недостаточно исследованный в практическом смысле. Нашей задачей стало рассмотрение этого метода на базе концентрации различных вариантов восприятия материала учащимися на первоначальном этапе его изучения, так как этот этап играет важную роль, как в исследовательском, так и в познавательном процессе обучения. Знания первоначально приобретаются в результате осознанного восприятия и запоминания новой информации, а навыки и умения формируются путем неоднократного воспроизведения действий. Опыт творческой деятельности усиливается в результате самостоятельного решения проблемных задач. Эмоционально-ценностная воспитанность достигается при эмоциональных переживаниях, возникающих в процессе усвоения знаний. Все эти варианты формирования личностного характера в познании взаимосвязаны, как элементы содержания образования. Однако, главным моментом на всей этой линии становится первоначальное восприятия математических понятий, ибо это понятие, становясь абстрактным, приобретает возможность своего применения на широком прикладном поле в практике. Такова судьба математических знаний. [19, с. 104]

Соблюдение культуры познания объектов, математических понятий, знаний – это главный элемент не только самого процесса познания, но и процесса обучения. Психологами определена связь между уровнями актуальных и ближайших знаний. Переход от первого уровня ко второму должен быть организован доступным «*мостиком*». При этом учащийся, без особой психологической нагрузки, комфортно чувствуя себя, должен владеть переходом к ближайшему уровню, опираясь на уровень актуальных знаний. Расширяя поле актуальных знаний, можно расширить поле возможностей для перехода к уровню ближайших знаний. Соблюдение такого пути познания способствует не только формированию прочных знаний учащихся, но и выработке у них умений применять эти знания в практике познавательной деятельности. Такая технология процесса обучения математике необходима, недостаточное соблюдение методики такого познавательного процесса сказывается на качестве знаний школьников. Свидетельством такого вывода становятся результаты ЕГЭ не только в отдельно взятой области, но и по всей России в целом. Ниже мы раскроем наш подход к познавательному процессу, как к одному, боле популярному примеру, например, к решению уравнений первой и второй степеней и построению графика квадратного трехчлена.

Уравнение (неравенство) считается простым и решенным, если оно приведено к такой форме: $x=a$ ($x<a$), где, $a \in R$ (C). Любое уравнение (неравенство), приведенное к такой форме, не подлежит дальнейшему исследованию. Однако, к нему можно применять свойства числовых равенств или неравенств, тогда получатся сложные уравнения (неравенства).

Решение уравнений и неравенств рассматривается в практике школы отдельно, хотя было бы желательным и целесообразным их совместное исследование. Мы остановимся на примере решения уравнений, поскольку такая же схема рассуждений целиком применима и к решению неравенств. Уравнение вида $x + b = 0$ легко приводится к простому виду переносом числа b из левой его части в правую часть: $x = -b$. Аналогично, уравнение $ax = b$ легко приводится к простому виду делением обеих его частей на a:$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$, где $a \neq 0$. Если этот этап решения уравнений воспринимается учащимися неплохо, то в дальнейшем, при переходе к ближайшему уровню не будут встречаться затруднения, поскольку в практике решения уравнений этот этап хорошо не отработан в учебных пособиях. Например, уравнение может быть задано в виде:

$$(ax + b)(cx + d) = 0 \qquad (1)$$

Решение подобных уравнений опирается только на одно, знакомое учащимся со второго класса, правило: *произведение равно нулю, если хотя бы один из его сомножителей равен нулю*.

Следующий шаг – это умение привести любое другое уравнение к виду (1), поскольку решение таких уравнений теперь стало уровнем актуальных знаний. Например, требуется решить уравнение вида

$$3x^2 + 5x + 2 = 0 \qquad (2)$$

Связь между уравнениями (1) и (2) заключается в том, что левая часть последнего уравнения не представлено разложением на множители. Следовательно, левую часть уравнения (2) нужно разложить на множители. А способов разложения многочлена на множители много, из которых пока учащиеся знают только три: 1) вынесение общего множителя за скобку; 2) способ группировки; 3) использование формул сокращенного умножения. Первый из этих способов невозможно применять к данному примеру – нет общего сомножителя для всех слагаемых. Для применения второго способа не хватает слагаемого, но его можно восстановить за счёт слагаемого 5x, представив его в виде суммы 5x = 3x + 2x: $3x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 1) + 2x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3x + 2) = 0$.

Значит, левая часть уравнения (2) разложена на множители и приведена к уравнению вида (1), оно решается как уравнение (1).

Часто учителя и учащиеся успокаиваются этим результатом, не рассматривая других возможных вариантов разложения левой части уравнения (2) на множители. Без рассмотрения третьего варианта разложения – это применение формул сокращенного умножения, нельзя считать вопрос завершенным.

В данном случае нужно рассмотреть такие варианты разложения:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ или же $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Обращая внимание учащихся на левую часть уравнения (2), нужно сразу же обратить внимание на первые два слагаемых, которые могут быть (после некоторого преобразования) приравнены к первым двум слагаемым формулы $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Разделив правую и левую части уравнения (2) на 3, получим $3x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{2}{3} = 0$. Второе слагаемое $\frac{5x}{3}$ занимает место второго слагаемого в квадрате суммы двучлена: $2ab$. Принимая букву a за букву x, остальной сомножитель $\frac{5}{3}$ за $2b$, представим $\frac{5}{3}$ как $2 * \frac{5}{6}$, то есть нужно во втором слагаемом видеть удвоенные произведения первого и второго слагаемых: $\frac{5}{3} = 2 * \frac{5}{6}$. Такая детализация в сравнении выражений $\frac{5x}{3}$ и $2ab$ необходима с целью осмысления учащимися того, что ими делается и зачем это делается. Итак, мы узнали первое слагаемое – это x, и второе слагаемое – это $\frac{5}{6}$. Для выделения полного квадрата не хватает квадрата второго слагаемого - $(\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$. Прибавим это не хватающее слагаемое и одновременно вычтем его, чтобы значение первоначального выражения не изменилось:

$$3x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{2}{3} = 0$$

Первые три слагаемых последнего равенства представляют квадрат суммы:

$$x^2+\frac{5x}{3}+\frac{25}{36}-\frac{25}{36}+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25-24}{36}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{36}=0$$

Используя формулу разложения $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ к полученному результату, будем иметь:

$$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{36}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)\Leftrightarrow\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1\ \vee x=-\frac{2}{3}$$

Итак, рассмотрев оба варианта разложении квадратного уравнения на множители и сравнивая их между собой, подчеркиваем мобильность второго варианта, поскольку при разложении способом группировки встречается ряд трудностей при подборе не хватающего слагаемого, хотя этот прием намного упрощает процесс преобразований. Более того, при построении графика квадратичной функции часто приходится выделить в ней квадрат двучлена.

К построению графика такой функции нужно подвести учащихся постепенно, расширяя актуальный уровень знаний за счёт усвоения ближайшего уровня. Сначала учащиеся учатся строить график функции $y=x^2$, далее – $y=x^2+c$; $y=(x+p)^2$; $y=a(x+p)^2$; $y=a(x+p)^2+c$.

Такая последовательность рассмотрения фактов, вытекающих один из другого, способствует осознанию внутрипредметных связей, с одной стороны, и формированию системности знаний учащихся, - с другой. При этом повышается познавательная способность школьников. Заметим, что при расширении зоны актуального уровня знаний учащихся системность знаний от темы к теме становится более прочной, повторяя то, что ими пройдено ранее и оперируя этими материалом многократно на различных уровнях его прохождения.

Таким образом, при соблюдении культуры познания укрепляется база актуального уровня знаний, сопровождая иллюстративными схемами (геометрическим языком), приобретаемые знания становятся прочной основой для познания и решения практических задач, учащиеся получают возможность умело использовать приобретенные знания в практике. Именно такой подход к познанию, раскрывая суть изучаемого материала в разнообразных вариантах его проявления, используя различные структурные компоненты математического языка (геометрического, алгебраического, теоретико-множественного, логического), позволяет делать процесс обучения познавательной деятельностью, представляющей базой формирования у учащегося его интеллектуального уровня развития и познания. При такой методике доминирующей особенностью становится деятельностный подход к развитию учащихся средствами комплексного восприятия. При этом учащиеся вовлечены в продуктивную творческую деятельность.

Приведем еще пример, демонстрирующий смысл сказанного. Учащиеся не всегда замечают единства различных форм записи одного и того же выражения, например, $a : b$ и $\frac{a}{b}$. Такие «*мелочи*» сказываются на осмыслении действий над алгебраическими выражениями. Аналогичная картина и в записях: $a^{\frac{3}{4}}$ и $\sqrt[4]{a^3}$ при $a > 0$.

Обратим внимание на доказательство теоремы косинусов, которое, к сожалению, редко кто из учащихся умеют доказывать. Почему? Потому что этот вопрос не рассматривается различными способами. Если разъяснить доказательство этой теоремы хотя бы в двух вариантах, то сравнивая эти рассуждения между собою, учащиеся могли бы запомнить один из этих способов. Читаем теорему косинусов: *«Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними».* Проводим словарную работу над текстом теоремы и поясняем смысл выражения *«без удвоенного произведения»*, что означает *«минус удвоенное произведение»*. С другой стороны, иллюстрируем текст теоремы на алгебраическом и геометрическом языках (рис.1):

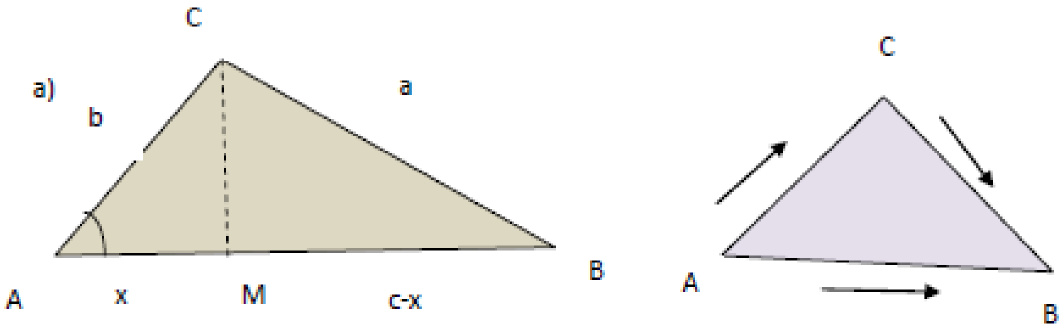


Рис. 1. Теоремы косинусов

Требуется доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\angle A$

Доказательство первое. На рисунке 5-а представлены два прямоугольных треугольника: $\triangle ACM$ и $\triangle MCB$. Выразим катет CM через другие стороны дважды: $CM^2 = b^2 - x^2$ и $CM^2 = \mathrm{a}^2 - (\mathrm{c} - \mathrm{x})^2$. Сравнивая правые части этих равенств, получим:

$b^2 - x^2 = \mathrm{a}^2 - (\mathrm{c} - \mathrm{x})^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, где $\mathrm{x} = bcos\angle \mathrm{A}$.

Итак, что и требовалось доказать:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\angle A$$

Доказательство второе. На рисунке 5-б стороны треугольника приняты за векторы. Вектор $\overrightarrow{CB}$ выразим через два других вектора: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Найдем скалярный квадрат этого вектора, то есть, возводим обе части этого равенства во вторую степень: $\overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^{\,2} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, где выражение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ представляет скалярное произведение двух векторов, оно равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть, что и требовалось доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\angle A$

Учащиеся, сравнивая ход рассуждений в обоих доказательствах, видят, что тут недоступного нет. В первом случае мы использовали теорему Пифагора, проводя высоту в этом треугольнике, и тригонометрическую функцию угла А. Во втором случае использовали векторы и операцию сложения векторов, возведение в квадрат данного вектора. Далее можно закрепить повторением, соревнуясь в качестве освоения доказательства. В таких технологиях рассуждений проблемный характер постановки вопроса дает основание для размышления, через актуальный уровень знаний учащихся мы выходим на ближайший уровень, а далее по такой цепочке учащиеся выходят на уровень познавательных рассуждений, на уровень поискового мышления, опираясь на имеющийся у него уровень знаний. Вот в чем заключается смысл культуры познания. При такой методике у школьников появляется желание в поисках других способов доказательства, учащийся выходит на уровень мыслительной деятельности применительно к данному уровню познания.

Технология познания должна быть многоликой, как, например, наличие многих путей приезда в какое-нибудь поселение. В поисках различных методов познания объекта и доказательств теорем главную роль играют элемент самостоятельности школьника, его проблемно-поисковое расположение к постановке вопроса, его мозговой штурм на поиск решения, пусть даже этот штурм безрезультатный. Только при этом учащийся учится вступить в диалог, игровую оболочку своих умственных действий; школьник учится искусству ведения рассуждений в конкретной ситуации, искусству самовыражения и ведения диалога. В итоге у школьника формируется культура познания непознанного, опираясь на собственный багаж знаний. Психологами, в частности Л. В. Занковым [11, с. 106], опровергаются ссылки на недоступность сложного и обширного материала, выходящего за границы издавна сложившегося объема и содержания знаний, все зависит от того, как будет представлен материал, обучение должно строиться не только на завершенных циклах развития, но прежде всего на тех функциях, которые ещё не созрели. Именно такой подход к обучению школьников способен двигать учащихся вперед. По их мнению, обучение свою ведущую роль в умственном развитии школьника осуществляет, прежде всего, через содержание усваиваемых им знаний. «Педагогика, - пишет Д. Б. Эльконин, цитируя Л. С. Выготского, - должна ориентироваться не на вчерашний, а на завтрашний день детского развития. Только тогда она сумеет вызвать в процессе обучения к жизни те процессы развития, которые сейчас лежат в зоне ближайшего развития» [28, с. 31]. Лежащие в зоне актуального развития знания о теореме Пифагора, или об операциях над векторами, должны работать на завтрашний день, на ближайшие уровни развития, иначе зона актуального развития теряет свои функции, эти знания должны непрерывно работать. Значит, важнейшим критерием умственного развития учащегося является соблюдение культуры познания ими в процессе обучения. Таким критерием является комплексное рассмотрение изучаемого материала, опираясь одновременно на несколько структурных компонентов понятия «математический язык».

Используя комплексный подход при восприятии изучаемого математического материала в школе, в основном в 5-9 классах, мы придерживались таких принципов, как:

1. использование метаматематические ситуации, имеющие прямое или косвенное отношение к раскрытию содержания вводимых математических понятий;
2. использование всевозможных приемов восприятия содержания вводимых понятий;
3. опора на структурные компоненты понятия «математический язык» по мере дидактической целесообразности;
4. отработка вербального содержания понятия и его соответствия абстрактному толкованию;
5. отработка перехода от алгебраического содержания понятия к его геометрическому содержанию, и наоборот, не искажая ни теоретико-множественного, ни логического отражения его смыла.

Раскроем смысл этих принципов на конкретном примере изучения понятия, например, понятия «вертикальные углы». Само название этого понятия содержит слово «вертикальное», которое не имеет прямого отношения к вертикальности в природе, а только буква «X» схематично представляет схему расположения вертикальных углов. Такое метаматематическое представление о том, к восприятию которого готовятся учащиеся, настраивает внимание школьников. То есть в соответствии с составом содержания понятия приведенный пример служит критерием некоторой оценки восприятия. С таких примеров объяснительно-иллюстративного подхода готовится школьник к зрительному, речевому, предметному вариантам восприятию того, что он должен усвоить. Следующий этап, это подготовка к определению понятия. Нужно восстановить в памяти учащихся определение угла вообще. Если провести на плоскости два луча, выходящие из одной и той же точки, то плоскость разбивается на две части, каждая из которых считается заключенной между ними, или же ограниченной этими лучами, значит, фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки, и вся часть плоскости между ними – это угол. Демонстрируется понятие угла, показывая его разными вариантами: двумя палочками или вырезанной из бумаги формой угла. В первом варианте не представлена часть плоскости между лучами, а в последнем примере представлен угол. Учащиеся воспринимают это понятие со всех его сторон, с необходимых свойств понятия (без двух лучей, выходящих из одной точки, невозможно построить угол). Но это еще недостаточно, чтобы был образован угол: нужно брать всю плоскость между ними. Такая предварительная подготовка к восприятию понятия «вертикальные углы» становится обязательной частью самостоятельной деятельности школьников. На основе этой работы продолжается процесс обучения. Лучи, образующие данный угол, дополняются им противоположными лучами. При этом образуются две пересекающиеся прямые, расположение которых напоминает букву X. Другими словами, мы имеем четыре луча, выходящие из одной и той же точки, причем каждый луч и ему дополнительный составляют прямую. На базе такой подготовки к восприятию закрашиваются углы, образованные этими противоположными лучами. Предлагается учащимся составить определения таких углов:

1. углы, образованные двумя пересекающимися прямыми;

2. углы, у которых лучи, образующие один угол, дополнительны лучам, образующим другой.

Анализируя эти определения, большинству учащихся нравится первое из-за его краткости. Вникая в суть определения, выясняется его некорректность. Во-первых, судьба самих прямых не ясна, входят ли они в угол или нет, во-вторых, в нем неизвестно, о каких углах идет речь. Во втором примере определения лишнего нет и неучтенного нет. Предлагается для запоминания то определение, которое принято общим мнением: Два угла называются вертикальными, если лучи, образующие один из них, дополнительны лучам, образующим другой. В принципе, такие углы образуются пересечением двух прямых, представление о них дается той буквой Х, которая появилась в качестве первоначальной информации. От такого представления мы дошли до логически верного, более строгого определения.

Аналогичная работа проводится нами и при доказательстве теорем. Например, нужно доказать теорему: «Вертикальные углы равны». Представленная в такой вербальности теорема нами преобразуется в другой формулировке: «Если даны два вертикальных угла, то они равны». До доказательства этой теоремы мы обращаем внимание детей на то, что обратная терема, образованная перестановкой условия и заключения местами: «Если даны два равных угла, то они вертикальные». Строим два равных угла и спрашиваем у учащихся: можно ли их считать вертикальными? Учащиеся убеждаются в том, что вторая теорема ложная. Доказательство истинности первоначальной теоремы начинается с иллюстрации смысла теоремы геометрическим языком, что дает учащимся возможность осмыслить суть постановки вопроса и пищу для дальнейших рассуждений. Раскрываем взаимосвязь между вертикальными и смежными углами. Каждый из вертикальных углов дополняется смежным углом до развернутого угла. Приведем схему рассуждений доказательства этой теоремы.

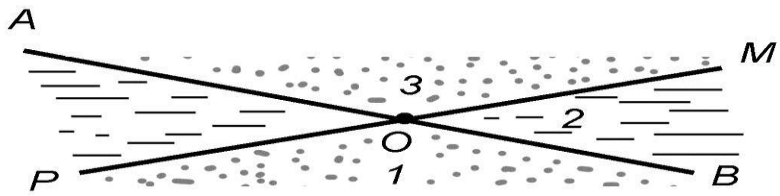


Рис. 2. Вертикальные углы

Всегда истинным является высказывание: «Вертикальные углы равны». Убедиться в этом нетрудно, рассуждая следующим образом: $\angle 3$ и $\angle 2$ смежные углы (рис. 2), поэтому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$ (3)

Точно также,

$\angle 2$ и $\angle 1$ смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 1 = 180°$. (4).

Правые части равенств (3) и (4) равны одному и тому же числу, поэтому равны и их левые части:

$$\angle 2 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 2 \quad (5).$$

В девой и правой частях равенства (5) содержится одно и то же выражение ($\angle 2$). Если мы вычтем это выражение из обеих его частей, то его истинность не нарушится, и получится: $\angle 3 = \angle 1$. Значит, истинность установлена.

В комплексном подходе к обучению математике помогают учащимся решать проблемные вопросы. С помощью различных вопросов к учителю устраняются сомнения учащихся, применяя словесные, схематические, иллюстративные приемы, самостоятельно вникая в суть содержания. Поэтому полнота познавательных стремлений учащихся раскрывается на начальном этапе изучения материала. С дидактической точки зрения учитель, объясняя и показывая учащимся способ деятельности, совокупность приемов, применяемых на данном этапе, достигает цели. При этом теория поэтапного формирования умственных действий [5; 67] применяется в прикладном плане различными подходами к раскрытию содержания рассматриваемого материала: это предварительная ориентировка обучаемого в задаче, преобразование действия в речевой план и перенос действия во внутренний умственный план.

Концепция модернизации образования, принятая Правительством РФ, выделяет следующие задачи: чтобы образование было качественным, общедоступным, эффективным. Обеспечение выполнения этих задач возможно, если осуществлять поиск и выбор методов и вариантов развивающей функции процесса обучения не только обновлением содержания, но и совершенствованием методов обучения. Ресурсов для этого много, если направить их на эффективное обновление, как в содержательном, так и в организационном плане. Под развивающей функцией обучения нами понимается выявление принципиально новых элементов структуры и функции приобретаемых знаний. Изучение соотношения усвоения и развития осуществлялось нами, прежде всего, в рамках выявления результативности обучения на уроках математики. Поэтому, когда мы говорим о прослеживании изменений в психическом облике учащихся, мы имеем в виду, прежде всего, изменения в знаниях и навыках по данному учебному предмету и в мыслительной деятельности, осуществляемой школьниками в процессе усвоения и применения знаний. В ходе решения задачи по выявлению соотношения между усвоением и развитием возник вопрос о значении самих понятий «усвоение» и «развитие»: что понимается нами под усвоением и развитием, какое соотношение существует между ними?

Исходная наша позиция заключается в том, что понятия «усвоение» и «развитие» не совпадают и обозначают разные явления психической жизни. Вместе с тем, оперируя этими понятиями в процессе анализа результативности обучения, мы обнаружили невозможность однозначного употребления каждого из них. В психолого-педагогической литературе они также употребляются в разных значениях. Например, Н. А. Менчинская и её сотрудники под развивающим обучением понимают такое обучение, которое обеспечивает формирование способов умственной деятельности. Понятие «развитие» здесь относится к процессуальной стороне психики, понятие «усвоение» к ее содержательной стороне. При этом вопрос о том, различаются ли пути возникновения новообразований в процессуальной и содержательной стороне психики, не стоит в центре внимания авторов.

Мотивированным должно быть не только содержание получаемых знаний, но и сами способы их приобретения и использования. Мы наблюдаем, что учащиеся часто стремятся использовать более привычные способы, избегая случайных трудностей. Важнейшей задачей при обучении математике является пробуждение у детей потребности активно мыслить, преодолевать трудности, искать наиболее рациональные пути достижения целей. По утверждению Н. А. Менчинской, необходимо «пробудить у детей стремление постоянно совершенствовать способы вычислений и решения задач, менее совершенные заменять более совершенными, более экономичными» [16, с. 12].

При всестороннем рассмотрении задания во всех его вариантах у детей знания, умения и навыки формируются как единое целое, где умения переходят в навыки, развитие памяти и мышления в целом происходит при активной учебной деятельности. Единство системного, деятельностного и личностного подходов находится в центре внимания социальной педагогики. Системный подход – это процесс изучения дисциплины как целостное образование из частей, компонентов, элементов, находящихся во взаимосвязи и имеющих определенные функции. Деятельностный подход – это теоретическое освоение учащимися дисциплины, он происходит в конкретной, значимой для них учебной деятельности, отвечающей интересам, потребностям, склонностям школьника. Личностный подход проявляется в ориентации на приоритетное развитие значимых качеств личности при применении этих знаний в практике познания. Умение учащихся анализировать, задавать проблемного характера вопросы на уроке и выходить на рефлексивную позицию, способствует более успешному формированию индивидуального стиля мышления школьников.

Мы рассматриваем рефлексию как качественный уровень мышления, как фундамент, на котором будут развиваться творческие способности учащихся. Г. А. Клековкин утверждает, что «На начальном наглядно-опытной геометрии, который по глубокому убеждению автора должен начинаться в 5 классе, образный диалог предстанет в эмпирической деятельности с материальными моделями и их изображениями (взаимно обратимые переходы от графической работы с моделями, к чертежам и специальным знакам), вербальный в терминологическом уточнении и знаковом обогащении естественного языка, образно-вербальный – в комментировании и обосновании предметных действий» [13, с. 263]. Таким образом, комплексный подход приводит к мысли о специальной организации плана учебно-познавательной деятельности, который будет адекватен тенденциям возрастного развития детского мышления на каждом этапе обучения, а это соответствует содержательной, структурной и пространственно-временной организации формируемого внутреннего плана обучения и восприятия.

В указанных нами принципах прослеживается способ познания, взаимодействие людей между собою и миром математики. Такая картина в процессе обучения требует строить деятельность учителя и учащихся во взаимодополняющих и поддерживающих друг друга связях и как преобразующие изучаемые математические объекты. При этом это взаимодействие развертывается различными методами познания: генетическим способом, функциональном, содержательном, репродуктивном и продуктивном. И во всех видах и формах познания прослеживается познавательно-преобразующая деятельность. При этом у учащихся формируется признаки познавательной культуры, где сочетаются компоненты гносеологического, проектировочного, нормативного, информационного и рефлексивного способов познания. В своем взаимодействии структурные и функциональные компоненты образуют технологическую систему. Усиление внимания к комплексному использованию различных приемов в процессе обучения математике в настоящее время является закономерной тенденцией развития образования. От учителя требуются не только способность реализовать учебный процесс, но и умение проектировать его. Другими словами, изначально закладывается инструмент для проектирования наиболее эффективных, комплексных приемов и методов познания. Тем самым учитель может достичь цели, с одной стороны, безусловного достижения учащимися обязательной математической подготовки, а с другой, - одновременно создать условия для усвоения материала на более высоких уровнях.

Интегративные связи между объектами той или иной науки являются необходимым теоретическим фундаментом для реализации соответствующих интегративных связей в школьных курсах. Эти связи, генетически восходя к научным связям, выражают структурное единство учебных предметов, они призваны способствовать систематизации и обобщению знаний, выработке у учащихся обобщенных умений и навыков, что ведет к целостному восприятию понятий, наук, на основе которых построены учебные предметы. Тут следует подчеркнуть, что, хотя логика науки и занимает большое место в построении понятийной её структуры, опора лишь на логические понятийные связи не решит всех дидактических проблем. В этом плане нам хочется ссылаться на мнение С. П. Баранова, отмечая, что «если целью научного познания является познание предмета, явления в реальных условиях посредством изучения моделей, то целью обучения является познание моделей, в которых зафиксированы знания из опыта человека, посредством изучения предмета, явления в реальных связях и отношениях» [1, с. 18].

Глава II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПРИЕМОВ К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

2.1. Методические приемы реализации комплексных приемов к обучению математике в школе

Возрастающее значение комплексного подхода к приемам восприятия содержания математического образования в общеобразовательной школе связано с требованием общества в повышения социального уровня жизни людей. Более того, такое требование в повышении качества знаний учащихся связано с теорией философских концепций диалектического метода познания. Проектируя это положение на образовательную плоскость, мы исходили из следующих условий, которые нами поставлены перед своей исследовательской деятельностью:

- интеграция приемов восприятия математического материала на основе требований социума;
- раскрытие взаимосвязи теоретического и практического способов познания с учетом требований времени.

В рамках общенаучной методологии задача исследования интеграции приемов восприятия математического материала в образовательном процессе является важным этапом формирования системных знаний. По характеристике Б. М. Кедрова, «системный подход и есть методологическое средство изучения интеграции, точнее интегрирующих объектов и интегральных зависимостей, и взаимодействий» [12, с.7]. Проекция сказанного на плоскость обучения относительно интеграции приемов восприятия содержания математического материала в общеобразовательной школе способствует повышению качества образования не только в математике, но и качества применения этих знаний в практике познания вообще, повышая уровень математической культуры личности в познании.

Приведем пример из практики работы в этом направлении. Структурные компоненты треугольника, в частности такие понятия, как высота, медиана, биссектриса треугольника – это наиболее часто встречаемые в практике решения задач. Несмотря на это, прочное осознание этих понятий всеми учащимися не наблюдается. Медиану путают с биссектрисой, высоту путают с любым отрезком из вершины и т.д. Причина, главная, на наш взгляд, заключается в том, что при первоначальном их восприятии не учтены все детали их взаимосвязи и их отличительные признаки или свойства. С одной стороны, нужно создать атмосферу для комплексного представления этих понятий, исходящих из единой основы одновременно как в вербальном, так и в геометрическом, алгебраическом восприятии. Более того, определения этих понятий должны быть четкими, где отражаются и необходимые, и достаточные свойства понятий, сопровождая иллюстрацией геометрическим языком. Все эти понятия имеют одну родовую основу – они являются отрезками, выходящими из вершины треугольника, а таких отрезков немало. Из массы этих отрезков нужно выделить тот, который представляет данное понятие. Зрительное, схематическое и вербальное восприятие понятия станет основой раскрытия его реального содержания. Поэтому в вербальной регистрации должно быть отражено все это и самостоятельно фиксировано учащимися. В частности, (рис. 3): 1) медиана – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны – это отрезок AM (рис.3а); 2) биссектриса – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с противолежащей стороной, разделяя угол пополам – AP (рис..3б); 3) высота – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с прямой, содержащей противоположную сторону, под прямым углом – AK (рис.3в).

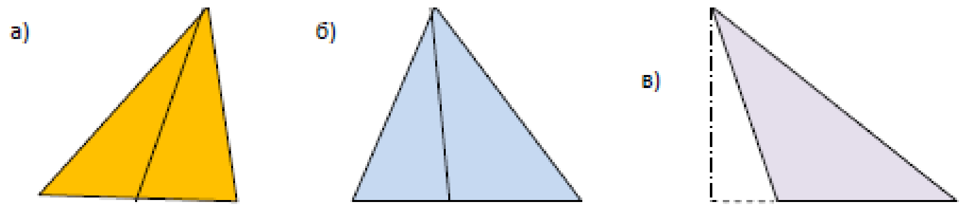


Рис. 3. Структурные компоненты треугольника (высота, медиана, биссектриса)

В рамках общенаучной методологии такое восприятие всех трех понятий, как в сопоставительном, так и индивидуальном различии позволяет прочно формировать в сознании школьников эти понятия, поскольку тут и анализ, и синтез протекают одновременно, комплексно, дополняя друг друга, создавая базу для системных знаний. Такой подход коррелирует с общеметодологическим анализом систем, при котором в качестве главного отличительного свойства указывается то, что лежит в основе их интеграции для восприятия, в данном случае таким элементов является отрезок, соединяющий вершину треугольника с противолежащей стороной или с ее продолжением. Значит, и обобщение доступно для каждого учащегося: в треугольнике столько медиан, биссектрис и высот, сколько в нем вершин. Более того, все три понятия могут быть представлены одним отрезком в конкретных случаях. Например, если треугольник равносторонний, медианы одновременно являются и высотами, и биссектрисами. После такого восприятия учащиеся сами самостоятельно рассматривают частные случаи, исходя из определения каждого понятия. Здесь принцип взаимосвязи теоретического и практического содержания понятий раскрывается со всей полнотой. Часто многие учителя или учебные пособия недооценивают важность правильного восприятия учащимися понятия функции и не отдают ему должного внимания. В виду сложившейся ситуации важным остается вопрос о формировании правильных представлений о ней. Этот процесс намного упрощается с помощью функциональной пропедевтики, которая должна вестись во всех классах до появления самого понятия в 7-8 классах. В нашей практике мы рассматриваем многочисленные примеры из различных областей деятельности общества, в которых принимают участие два элемента попарно. Например, пары: муж и жена; человек и его имя; ученик и его стол в классе, за которым он сидит; завод и название какой-нибудь продукции, выпущенной на нем; координаты точки на плоскости, задаваемые парами (x; y); автомашина и ее водитель; мама и ее ребенок; и т.д. Рассматривая многочисленные пары таких взаимосвязанных элементов или объектов, выделяются такие пары, где первые элементы не имеют права повторяться, не могут быть фиксированы в двух различных парах. Например, если мы возьмем пары (мама и ее ребенок), то первый элемент не может быть всегда различным, поскольку у мамы может быть и другой ребенок; а если мы возьмем пару (ребенок и его мама), то первый элемент всегда различный. Аналогичная картина и с другим содержанием, например, с дежурством в классе (имя ученика и название дня недели, когда он дежурит) и т.д. В этих примерах выделяется то, что лежит в основе понятия «функция». Когда такая подготовительная работа отработана, нужно подвести учащихся к осознанию такого сложного понятия как функция. Из многочисленных взаимосвязанных величин, причин и следствий выбирают тот элемент пары, который является следствием наличия первого элемента пары (который появляется на основе связи с первым элементом пары); при этом первый элемент пары выступает как основа возникновения второго элемента пары, как аргумент для появления второго элемента пары. Все эти примеры становятся основой для абстрагирования этого понятия, как второго элемента пары, где первые элементы не повторяются, а вторые элементы могут быть любыми объектами, символами, знаками и т.д. То есть, мы имеем множество пар (x; $f(x)$), где второй элемент этой пары становится следствием наличия первого элемента, второй элемент пары принимается как зависящий от первого элемента, что символически обозначается через $f(x)$. Например, на руках одного гражданина имеются часы. Это первый элемент пары. Вторым элементом может выступать завод, где выпущены эти часы. Завод в данном случае становится функцией от часов.

Поскольку понятие функции относится к первоначальным, неопределяемым понятиям и такой конструктивный подход к восприятию этого понятия, рассматривая многочисленные приемы составления пар на основе связи между этими элементами в практическом плане, то строгое определение может быть некорректным, оно может быть частным случаем прикладного направления этого понятия. Из-за отсутствия подробного и глубокого рассмотрения содержательной базы этого понятия в ряде учебных пособий, учащиеся, даже студенты вузов функцию определяют, как зависимость между двумя переменными. На основании таких упущений, учащиеся не видят различия между причиной и ее следствием, между аргументом и функцией. Например, в записи $sinx;$ они не видят основы для множества пар (x; $f(x)) = (x;\ sinx\ )$, что и является причиной отсутствия комплексного подхода к формированию этого понятия, то есть объект деятельности не был рассмотрен как систему взаимодействующих элементов. Без тщательного рассмотрения первого этапа формирования понятий учителя или в учебных пособиях часто переходят ко второму этапу, к абстрактному его представлению, ослабляя этап рассмотрения содержания понятия «предматематикой».

Остановимся еще на одном из приемов комплексного восприятия понятий в общеобразовательной школе. Не секрет, что учащиеся, даже выпускники средней школы, затрудняются обнаружить связь между решением уравнения, скажем, $sinx = 0$ и уравнением $sin(3-2x)$, с одной стороны, и между решением этих уравнений и построением графиков функций $y = sinx$, $y = sin(3-2x)$, с другой. Во-первых, понятие тригонометрической функции, как функции, аргументом которой (первый элемент пары) является угловое значение вращения вектора вокруг начала координат, раскрывается локальным подходом к этому понятию, рассматривая его как отношение катета к гипотенузе, или катета к катету в прямоугольном треугольнике. Этот вариант введения тригонометрической функции не раскрывает полноту содержания этого понятия, поскольку при таком подходе значение тригонометрической функции не будет равно отрицательному числу, в то время как тригонометрическая функция принимает значения и отрицательные. На самом деле значение тригонометрической функции представляется как отношение координаты вектора к его длине, или как отношение координат вектора, заданного на координатной плоскости. При этом синус данного угла вращения вектора вокруг начала координат представляется отношением второй координаты вектора к его длине. Исходя из такого определения, $sinx = 0$ означает, что отношение $\frac{y}{R} = 0$, где y – вторая координата вектора, а R – длина этого вектора. Значит, из такого равенства следует, что y = 0, то есть вектор совпадает с осью OX, а угол между этим вектором и осью OX равен или 0^o, или же 180^o. Следовательно, данное уравнение имеет два решения в одном поворота вектора вокруг начала координат: $x = 0^o$ или $x = 180^o$. Если вектор вращается непрерывно, то эти значения повторяются, то есть прибавляются к этим значениям значение полного угла, умноженного на целое число, в итоге получается решение: $x=180^o \cdot n$, где n – любое целое число. Разница между решениями уравнений $sinx = 0$ и $sin(3 - 2x) = 0$ только в том, что вместо аргумента x в первом уравнении нужно поставить выражение $3 - 2x$, то есть решение второго уравнения находится из уравнения:

$$3 - 2x = 180° \cdot n \Rightarrow 2x = 3 - \pi n \Rightarrow x = (3 - \pi n)/2.$$

Решение таких простейших тригонометрических уравнений не становятся некоторым средством построения графиков функций, например, $y = sin(3 - 2x)$. Во-первых, эта функция непрерывная, то есть линия, соответствующая этой функции, нигде не имеет разрыва. Во-вторых, функция принимает значения в пределах от -1 до 1. В-третьих, функция пересекает ось OX в точках, где соответствующее уравнение $sin(3 - 2x) = 0$. Такой анализ, охватывающий многие аспекты учебной деятельности и имеющий связь с изученным материалом, дает возможность ориентироваться в ходе решения поставленной задачи: нужно решить соответствующее уравнение и этим самым мы получим те точки, где график пересекается с осью ОХ. При этом достаточно найти только два решения уравнения, поскольку остальные точки пересечения графика функции с осью ОХ отстоят друг от друга на таком же расстоянии, какое имеется между двумя найденными двумя корнями. Итак, корни уравнения нами уже найдены: $x = (3 - \pi n)/2.$, остается вычислить только значения двух корней, придавая числу n два последовательных значения, например, 0 и 1. x_o=1,3 и x_1=−0,071. Расстояние между этими корнями равно $|x_0 - x_1|$=1,371≈1,4.

При таком подходе к восприятию данного задания хорошо раскрывается взаимосвязь между понятиями и их функциями по отношению друг к другу. Учащиеся, выполняя одно задание, одновременно вспоминают о другом. Решая уравнение, выясняют точки пересечения графического представления с осью ОХ. Такое комплексное восприятие работает на формирование системности в знаниях, знания переходят в умения и одновременно отрабатываются навыки их применения в практике.

Учащиеся увлекаются учением только тогда, когда учебный материал доступен им, когда этот материал вписывается в знания, получаемые ими в данный момент, и опирается на их жизненный опыт, на различные пути познания. На основе подобных ситуаций урок становится для учащихся увлекательным занятием. В педагогической науке поиск гибких структур системы уроков принимается как инновационный метод, за основу построения системы таких уроков мы принимаем расположение учащихся к умению учиться через мотивационные элементы в учебе. При построении такой системы уроков формируется методологический ориентир поиска и систематизации ведущих идей обучения математике, в частности развитие личности учащегося и формирование у него культуры рассуждений средствами математики явно замечаются, при этом реализуется единство усвоения учебного материала и развития личности школьника, в том числе и развития их познавательных способностей.

Идея развивающегося обучения определяет необходимость получения математического образования всеми учащимися в том или ином объеме. Эта мысль находит подтверждение и во введенных новых стандартах математического образования, которые описывают совокупность требований к математической подготовке учащихся по ступеням обучения, задаваемых на двух уровнях возможностей и уровне обязательной подготовки, характеризующем тот минимум, который должны освоить все учащиеся. Вот почему нашей задачей стало развитие учащихся средствами математики, начиная от формирования понятий, кончая умениями рассуждать.

Возьмем такое популярное в школьной программе понятие «число». Учащиеся даже старших классов не представляет осознанное его содержание во всех этапах его расширения. Комплексный подход к изучению числа пробелы в знаниях учащихся по этой теме сводит к минимуму. Рассматривая многочисленные обыкновенные дроби и их замену десятичными дробями, учащиеся приходят к выводу о том, что период в дробной части числа все равно наступит. Такой вывод основывается на том, что при бесконечном делении одного целого числа на другое целое число остатков равно делителю, они будут повторяться при продолжении процесса деления. Рассматривая этот процесс обратным вопросом, восстановлением первоначальной обыкновенной дроби, имея ее замену десятичной дробью, учащиеся видят взаимосвязи между периодическими десятичными дробями и обыкновенными дробями. Далее, не ограничиваясь, связывая измерением величин. При этом раскрывается ранее нераскрытое свойство числа. Оно может являться не только рациональным числом, но и иррациональным, не равным обыкновенной дроби (периодической десятичной дроби). При этом обнаруживается, что и рациональные, и иррациональные числа расположены на одной числовой прямой, образуя сплошную линию чисел. При таком комплексном подходе раскрывается системный характер в числовом множестве, учащиеся осознано разбираются в смысле слов «действительное число» - число, которое получается в результате измерения реальных величин [20, с. 106]. Отсутствие такого комплексного подхода к изучению числа порождает неосознанность детьми природы этого понятия лишает учащихся творческого мышления во многих областях познания в дальнейшей познавательной деятельности.

2.2. Образцы учебно-тренировочных упражнений при комплексном подходе к обучению математике в общеобразовательной школе

2.2.1. Числовые множества

1. Напишите любую правильную обыкновенную дробь с однозначным числом в знаменателе. Иллюстрируйте значение этого числа рисунком (прямоугольником, кругом, отрезком).

Образец: $\frac{3}{4}$

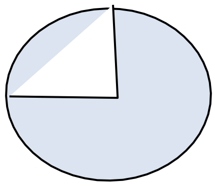


Рис. 4. Изображение обыкновенной дроби

2. Запишите любую неправильную дробь с однозначным числом в знаменателе. Иллюстрируйте значение этого числа рисунком.

3. Запишите по 5 дробных чисел, равных каждому из чисел: 3, 4 и 5.

4. Какую из данных десятичных дробей можно считать конечной: 0,7777…; 0,9999…; 0,4000…; 0,181818…?

5. Какая из данных обыкновенных дробей заменяется конечной десятичной дробью: $\frac{18}{16}$; $\frac{13}{14}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{8}{3}$?

6. Напишите 5 примеров десятичных дробей так, чтобы все они были конечными десятичными дробями.

7. Можно ли точно показать ту часть круга, которая соответствует числу 1/3?

8. Площадь прямоугольника равна 40 см^2. Начертите все прямоугольники с такой же площадью, у которых стороны равны целым числам.

9. Площадь прямоугольника равна 40 см^2. Начертите прямоугольники такой же площади, но стороны не были равны целым числам?

10. Запишите числа: $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{13}, \frac{18}{24}$ - в порядке возрастания, приводя их к

общему знаменателю.

11. Перепишите числа: $\frac{3}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{13}{15}$ – в порядке убывания, не приводив их к общему знаменателю и не обращая в десятичные дроби.

12. Перепишите числа: $\frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{3}{8}, \frac{7}{11}$ – в порядке возрастания, ориентируясь на десятичные дроби.

13. Запишите 4 числа, имеющие делителем число 12.

14. Запишите 4 числа, кратные числу 140.

15. Найдите НОД чисел 52 и 78 двумя способами: разложением на простые множители и делением большего из них на меньшее число.

16. Найдите НОК чисел 72 и 96 двумя способами: разложением их на простые множители и с помощью их НОД.

17. Изобразите схематично (рисунком) НОД и НОК чисел 24 и 96.

18. Начертите 4 различных треугольника, имеющих одну и ту же высоту, равную 3 см.

19. Закрасьте 40% рисунка 5:

Рис 5.

20. Замените числа процентами, а проценты – числами: $1{,}5$; $4\frac{5}{9}$; $131\frac{2}{5}$; 37%, $42\frac{3}{5}\ \%$, 240%.

21. Сколько рублей приходится на: $40\%, 56\%, 85\%, 90\%, 15\%$от 30 рублей?

22. Отмечено 5 точек. Сколько отрезков можно начертить с концами в этих точках?

23. Имеется пятиугольник (рис.6). Сколько диагоналей можно провести в нем?

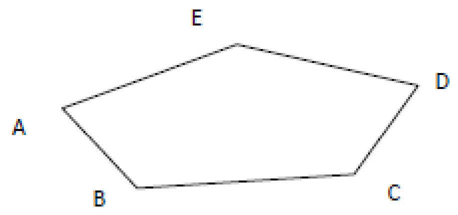


Рис. 6

24. Выясните взаимосвязь между числом вершин многоугольника и числом диагоналей в нем.

25. Начертите любой треугольник и попытайтесь из него выкроить прямоугольник, ничего не добавляя и ничего не теряя.

26. Начертите любой треугольник и дополняйте его до прямоугольника.

27. Вычислите площадь треугольника, переделав его в прямоугольник.

28. Вычислите площадь треугольника, дополнив его до прямоугольника.

29. Вычислите площадь параллелограмма несколькими способами, разбивая его на треугольники и выкраивая его в прямоугольник.

30. Начертите трапецию и вычислите её площадь несколькими способами: разбивая её на треугольники, переделывая в один треугольник; в один прямоугольник.

31. Выясните взаимосвязь между длиной окружности и длиной её диаметра. Для этого выполните следующие задания.

а. Приготовьте нитку (или тонкий шнур), линейку, три различных круглых предмета (монеты, пуговицы и другие предметы, имеющие форму круга).

б. Измерьте длины их окружностей и диаметров и результаты занесите в таблицу.

Таблица 1

	I круг	II круг	III круг
Длина диаметра – D			
Длина окружности – C			
Отношение длины окружности к её диаметру – C:D			

Сравните числа, полученные в последней строке. При достаточно точном измерении и выполнении действий, независимо от размера круга, эти числа будут приближенно равны 3,14. Если диаметр заменить двумя радиусами: D = 2R, где R радиус окружности, то формула длины окружности имеет вид: C = 2πR.

Пример 1. Вычислим длину окружности с радиусом в 3 см.

Решение: $\mathrm{C} = 2\pi R \approx 2 \cdot 3 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$ (см).

Пример 2. Вычислите длину диаметра, если длина окружности равна 36 см.

Решение: $\mathrm{C} = 2\pi R$, отсюда: $2R = C / \pi \approx 36 : 3{,}14 = 11{,}46$(см).

32. Начертите круг. Опишите вокруг него квадрат, сторона которого совпадает с диаметром круга, и впишите в него другой квадрат так, чтобы все вершины его лежали на окружности. Измерьте площадь обоих квадратов и их сумму разделите на 2. Это и есть площадь круга приближенно.

Пример. Вычислите площадь круга с радиусом в 2 см.

Решение: $S = \pi R^2 \approx 3{,}14 \cdot 2^2 = 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$ (см^2).

33. Вычислите диаметр любого дерева в лесу, саду, парке, во дворе. Как вы выполните это задание?

34. Составьте 5 уравнений, имеющих такое же решение, как и уравнение x=7.

35. Приведите уравнение $17x + 5 = 39$ к простому уравнению.

36. Составьте 5 уравнений, равносильных между собою.

37. Чем можно отличать уравнение от тождества? Приведите

примеры. В чем заключаются их общность и различие?

Уравнение - это форма числового равенства, истинного не всегда. Тождество – это форма числового равенства (неравенства), истинного всегда.

38. Составьте 2 примера уравнения, 2 примера тождества и 2 примера числового равенства (неравенства).

39. Имеется ли разница в смыслах следующих словосочетаний: 1) соответствие между элементами двух множеств А и В; 2) однозначное соответствие между элементами двух множеств А и В; 3) взаимно однозначное соответствие между элементами множеств А и В.

40. Совпадают ли смыслы предложений: 1) второй элемент однозначного соответствия из множества А в множество В; 2) функция, заданная на множестве А со значением в множестве В?

41. Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Приведите примеры двух функций, заданных на А со значением в В, и ещё два примера функций, заданных на В со значением в А.

42. Задайте два соответствия между элементами множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{a, b, c\}$ так, чтобы они не содержали функции.

43. Какое из слов можно считать родовым по отношению к другому: функция или соответствие? Ответ поясните примерами.

44. Каким образом классифицируются функции? Почему функция называется линейной? Напишите её алгебраические формы задания.

45. Какие из данных равенств представляют прямые линии: $y = 0; x = 0; 2x = 0; -7y = 0; -2x + 2 = 0; x + y = 0; 3x = 0{,}7y; 4x^2 = y; 7x = y^2; 3x - 5y = 8$?

46. На координатной плоскости отмечены прямые линии (рис. 7). Напишите их условные (приближенные) уравнения, выбрав масштаб.

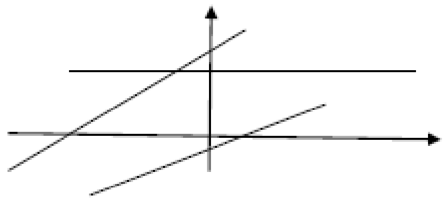


Рис. 7

47. Разъясните расположение прямых линий на координатной плоскости, если они заданы уравнениями: $7x = 1; 12y = 1; 5x + 3y = 0; -7x + 5y = 5$.

48. Составьте уравнения трех параллельных прямых.

49. На координатной плоскости заданы прямые. Напишите примерные уравнения этих прямых, выбрав масштаб (рис.8):

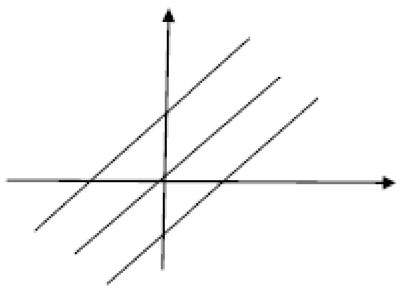


Рис. 8

50. Составьте уравнения четырех прямых линий, параллельных прямой, заданной уравнением $7x + 3y = 0$.

51. Не решая систем уравнений, скажите, имеют ли они решения и сколько:

$$1)\ \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

52. Составьте 3 системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными так, чтобы одна из них не имела ни одного решения.

53. Сделайте рисунок по смыслу задачи: «На двух полках вместе было 100 книг, причем на одной из них было на 10 книг больше, чем на другой. Сколько книг было на каждой полке отдельно?»

54. Составьте текст задачи по рисунку (рис.9):

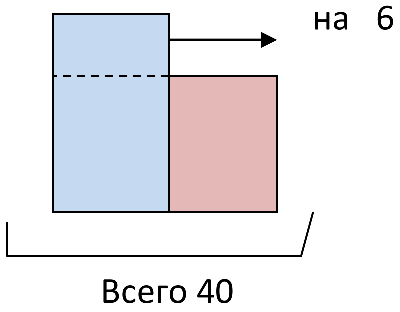


Рис. 9

55. Сделайте рисунок по смыслу задачи: «В двух автобусах вместе было 80 человек. Когда 5 человек перешли из одного автобуса в другой, в обоих автобусах людей стало поровну. Сколько человек было в каждом автобусе первоначально?»

56. Вычислите ширину прямоугольного участка земли, длина которого равна 600 м, а площадь составляет 3 га.

57. Три фермера имели земельные участки, площади которых соответственно равны 70 км^2, 2400 га, 1500000 м^2. Какая из этих площадей больше остальных?

58. Вычислите длину полосы прямоугольного участка земли с площадью 8 км^2, если его ширина равна 0,8 км.

59. Начертите любой пятиугольник. Вычислите его площадь, разбивая его на треугольники и измеряя нужные вам элементы линейкой.

60. Начертите на координатной плоскости фигуру, удовлетворяющую неравенству $y > 3x - 5$.

61. Не прибегая к чертежу, определите, принадлежат ли точки А $(-2; -7)$ и В $(-1; -12)$, фигуре, соответствующей неравенству: $y > 3x - 5$.

62. Назовите координаты хотя бы трех точек, принадлежащих фигуре, соответствующей неравенству: $y > x + 1$.

63. Даны неравенства: $y < x - 1$ и $y > 2x - 1$. Измерьте величину угла, определяемого этими фигурами.

64. На рисунке 10 даны одинаковые по площади квадраты. Составьте

алгебраические выражения, соответствующие площадям этих квадратов.

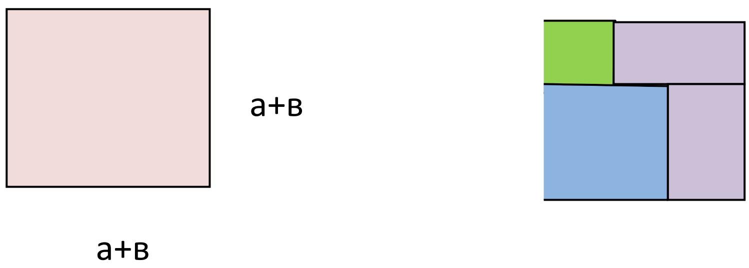


Рис. 10

65. Составьте равенство, соответствующее данному рисунку (рис. 11):

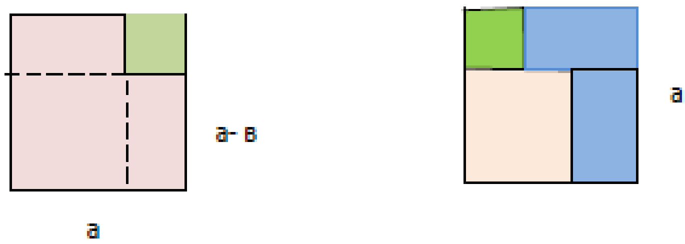


Рис. 11

66. Вычислите массу сена в сарае формы прямоугольного параллелепипеда с размерами: длина 5 м, ширина 4 м и высота 3 м, если 1 м3 сена имеет массу 75 кг.

67. Вычислите объем камня, не имеющего определенной формы. Как это сделать?

68. Вычислите стоимость чистого золота в кольце массой 4 г 56-й пробы, если 1 г золота в данный момент стоит 2515 рублей. (56 проба на золотом изделии - это проба, существовавшая в России до двадцатых годов прошлого века. По содержанию золота соответствует современной 585 пробе).

69. Перечислим свойства биссектрисы треугольника:

биссектриса треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной его стороной, разделяя угол на две равные части;

биссектриса делит противоположную сторону треугольника на две части, пропорциональные длинам прилежащих к ним сторонам треугольника;

любая точка биссектрисы находится на одинаковом расстоянии от прилежащих к ней сторон;

точка пересечения всех трех биссектрис треугольника находится на одинаковом расстоянии от всех его сторон.

70. Длины сторон треугольника ABC соответственно равны: $а = 5$ см, $в = 6$ см, $с = 7$ см. Постройте такой треугольник и проведите в нем высоту, биссектрису и медиану из вершины C. Вычислите длины этих отрезков.

71. Вычислите длины отрезков стороны AC, образуемых концом биссектрисы из вершины B, если длины сторон треугольника такие же, какие даны в № 70.

2.2.2. Многоугольники и координатная плоскость

72. Научимся перестраивать треугольник в прямоугольник, а затем вычислять его площадь как площадь прямоугольника. Вырежем из бумаги (картона) треугольник и отметим в нем линию высоты и линию средней линии (рис.12). Отрежем треугольник ⊿KEC, а затем его разрежем на два треугольника по линии высоты, приложим их к четырехугольнику с разных сторон. При этом образуется прямоугольник. Площадь образовавшегося прямоугольника ABMP равна площади ⊿ABC. Длина прямоугольника и основание треугольника совпадают, ширина равна половине высоты ⊿ABC, то есть $S_{ABC} = S_{ABMP} = |AB| \cdot 0{,}5|CD|$.

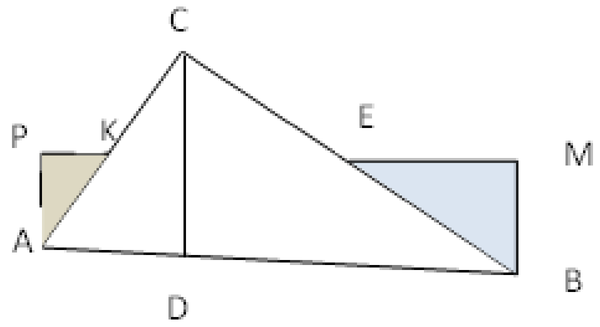


Рис. 12

73. В предыдущем номере мы научились вычислить площадь треугольника, переделывая его в прямоугольник. Теперь вы сами можете прийти к такому же результату, дополняя данный треугольник до прямоугольника. Итак, площадь треугольника равна половине произведения длин одной его стороны и высоты на эту сторону: $S\varDelta = 0{,}5a \cdot h_a = 0{,}5b \cdot h_b = 0{,}5c \cdot h_c$.

74. Даны точки A $(3; -2)$ и B $(1; 5)$. Используя пропорцию, найдите координаты середины этого отрезка. Решение: Пусть эта точка C (x; y). Она делит отрезок AB на две равные части, то есть отношение длин отрезков AC и CB равно 1.

$|AC| = |x - 3|; |CB| = |1 - x|. (x - 3): (1 - x) = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2;$ точно также находим y: $\big(y - (-2)\big): (5 - y) = 1 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = 1{,}5.$ Ответ: C $(2; 1{,}5)$.

75. Даны точки A $(3; -2)$ и B $(1; 5)$. Используя пропорцию, найдите координаты точки, делящий этот отрезок на две части, пропорциональные числам $3: 5$. Решается задача как предыдущая, с той лишь разницей, что отношение этих частей равно не 1, а $3/4$.

76. Даны точки A $(3; -2)$ и B $(1; 5)$. Используя пропорцию, найдите координаты точки этого отрезка, делящий отрезок на две части, пропорциональные числам $2: 7$.

77. Теорема Пифагора. Площадь одного квадрата равна сумме площадей двух других квадратов. Если такое случится, то длины сторон этих

квадратов образуют прямоугольный треугольник (рис.13).

Дано: 1) ABC - прямоугольный, $\angle C$ - прямой; 2) a, b - длины катетов, c - длина гипотенузы (рис. 13, а).

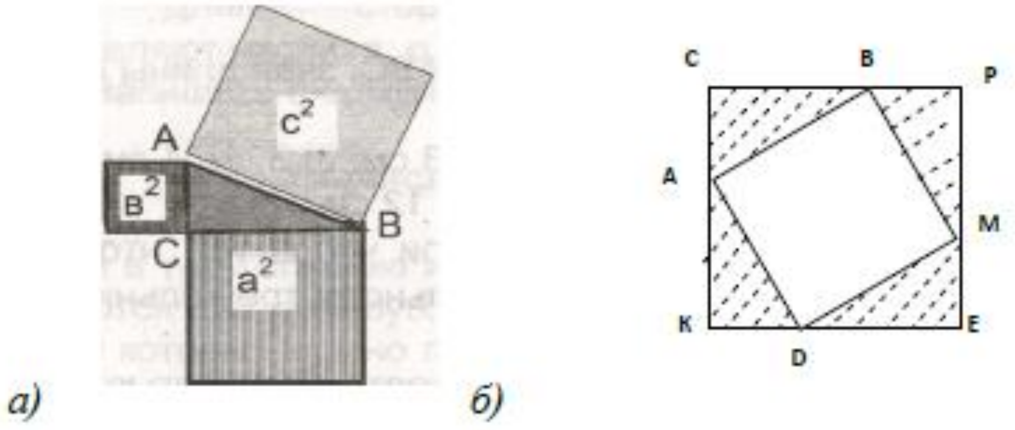


Рис. 13

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$, где c^2 - площадь квадрата, построенного на гипотенузе, a^2 и b^2 - площади квадратов, построенных на катетах.

Доказательство. Построим квадрат CKEP, сторона которого равна сумме длин двух катетов данного прямоугольного треугольника (рис. 13, б). Этот квадрат разобьём на 5 частей: на четыре прямоугольных треугольника и один квадрат BADM. Все четыре образовавшихся треугольника равны по первому признаку равенства треугольников. BMDA - квадрат, так как его стороны представляют гипотенузы равных прямоугольных треугольников, а углы его прямые. Действительно, например, в точке D развернутый угол состоит из трёх углов, два из которых равны острым углам прямоугольного треугольника, они в сумме всегда равны 90°. Значит, оставшийся угол из развернутого угла также равен 90°.

Площадь большого квадрата CKEP равна сумме площадей фигур, из которых он составлен. Вычислим её площадь двумя способами:

1) $S_{\square}CKEP = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (7)
2) $S_{\square}CKEP = 4. S_{\triangle}ABC + S_{\square}BADM = 4 \cdot 0,5 \cdot a \cdot b + c^2$. (8)

Сравнивая полученные равенства (7) и (8), имеем:

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

Вычтем $2ab$ из обеих частей последнего равенства и получим:

$c^2 = a^2 + b^2$.

На основании теоремы Пифагора напрашиваются *утверждения*: "*Если a, b, c - длины сторон треугольника, причём число c - длина большей стороны, то мы имеем одно из соотношений:*

1. $a^2 + b^2 = c^2$ - *при наличии прямоугольного треугольника;*
2. $a^2 + b^2 > c^2$ - *при наличии остроугольного треугольника;*
3. $a^2 + b^2 < c^2$ - *при наличии тупоугольного треугольника".*

78. Определите вид треугольника ABC, если даны длины его сторон: 7 см, 2 см и 8 см; 2) 7 см, 6 см и 8 см; 3) 3 см, 4 см и 5 м; 4) 3 см, 4 см и 6 см; 5) 5 см, 13 см и 12 см; 6) 1 см, 2 см, 1,5 см.

79. Вычислите длину гипотенузы прямоугольного треугольника и его площадь, если даны длины его катетов: 1)4 см и 3 см; 2) 5 см и 7 см; 3) 2,3 см и 5,6 см; 4) 3,4 см и 1,2 см.

80. Вычислите длину одного из катетов прямоугольного треугольника, если известны длины другого его катета и гипотенузы: 1) 7 см, 10 см; 2) 5 см, 10 см; 3) 5см, 8 см; 4) 10 см, 15 см; 5) 2 см, 12 см.

81. Пользуясь теоремой Пифагора, вычислите длину любой высоты треугольника, зная a, b, c – длины его сторон. Получаются такие формулы:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

82. В упражнениях №73 и №74 мы нашли формулу вычисления площади треугольника:

$$S = 0{,}5ah_a = 0{,}5bh_b = 0{,}5ch_c.$$

Подставляя значение высоты из упражнения №82 в эту формулу, получим другую формулу вычисления площади треугольника, если известны длины его сторон: $S = p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, которая называется формулой Герона, где р – полупериметр треугольника

83. Длины сторон треугольника соответственно равны 8 см, 6 см и 12 см. Определите вид треугольника и его площадь, пользуясь формулой Герона.

2.2.3. Векторы

84. Когда мы говорим вектор, имеем в виду не только отрезок, где указаны начало и конец, но и бесконечное множество таких же векторов того же направления и стой же длины во всем пространстве. Например, на рис. 14 задан один вектор:

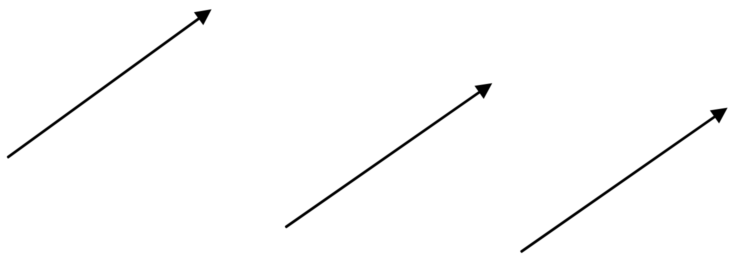


Рис. 14

В качестве основного вектора среди всех ему равных берется любой, остальные все как «невидимки» расположены везде. На координатной плоскости в качестве представителя равных ему векторов берется тот вектор, начало которого находится в начале координат. Например, даны векторы координатами их начала и конца: $\overrightarrow{AB}$, где $A\ (0; 0), B\ (3; 4)$. Координаты этого вектора совпадают с координатами его конца, поэтому пишется: $\overrightarrow{AB}$ (3;4).

Другие векторы, равные ему, например, вектор $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$, где $\mathrm{C}\ (2;3)$ и $\mathrm{K}\ (5;7)$, дается указанием координат его начала и конца отдельно. Определить его координаты можно вычитанием из координат конечной точки координат начальной точки. Например, даны точки М (1;5) и Р (7;2). Координаты вектора $\overrightarrow{MP}(7-1;\ 2-5) = \overrightarrow{\mathrm{MP}}\ (6;-3)$. Координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ (−6;3).

85. Назовите (без построения), в каком координатном углу расположен вектор: $\overrightarrow{\mathrm{OK}}(3;-2), \overrightarrow{\mathrm{OM}}(-2;\ 3), \overrightarrow{\mathrm{OH}}(-1;\ 5), \overrightarrow{\mathrm{OP}}(3;\ 3), \overrightarrow{\mathrm{OC}}(0;\ 5)$

86. Определите координаты вектора, если даны координаты его начала и конца:

1) $\mathrm{A}\ (3;-3)$и $\mathrm{B}\ (7;-2)$; 2) $\mathrm{C}\ (-5;\ -2)$и $D\ (3;\ -5)$; 3) $\mathrm{M}\ (0;\ 6)$ и $P(-7;-4)$.

87. Дан вектор ОС (−1;2). Постройте 3 вектора, равных ему, указывая координаты их концов, и ещё 2 вектора, равных тем же, не указывая координаты концов.

88. Даны два вектора: $\overrightarrow{AB}$ где А (5; 3) и В (4; 5), и $\overrightarrow{\mathrm{C}D}$, где С (4; 7) и D(2; 9). Выясните, равны ли векторы$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

89. Отметьте на координатной плоскости два вектора своими координатами так, чтобы они могли быть сторонами: а) квадрата; б) прямоугольника.

90. Даны вершины треугольника: $\mathrm{A}(3;4), \mathrm{B}(-2;1)$ и $\mathrm{C}(1;-3)$. Найдите координаты двух векторов, образующих такой треугольник.

91. Вычислите длины векторов: $\overrightarrow{OM}$(0;6) ;$\overrightarrow{OE}$(3;4); $\overrightarrow{OA}$(5;-12) ;$\overrightarrow{OP}$(-1;7) ;$\overrightarrow{OB}$(0;-4); $\overrightarrow{OD}$(-7;0) ; $\overrightarrow{O\mathrm{C}}$(1,2;0,8) ; $\overrightarrow{O\mathrm{K}}$(-2,6;1,25) ;$\overrightarrow{DE}$, где E(-2;4) и D(6;4).

92. Даны координаты начала и конца вектора. Находятся ли среди данных векторов такие, которые равны вектору $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (3; 4):

а) С (5; 6) и В (8; 10); б) М (1; −5) и Р (2; −1); в) Е (6; −4) и Н (9; 0)?

93. Даны координаты трёх вершин четырехугольника: A (2;3), B (0; 5), C (6; 7). Определите координаты четвёртой вершины D, если $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{DC}$.

94. Постройте треугольник, образуемый векторами: $\overrightarrow{O\mathrm{A}}$ (3;4) и $\overrightarrow{O\mathrm{B}}$ (−2;3). Постройте другой треугольник, симметричный ему относительно начала координат. Определите координаты его вершин.

95. Начертите два равных вектора, а затем найдите их сумму и разность. Всегда ли сумма или разность векторов представляет вектор?

96. По рисунку 15 назовите сумму и разность векторов и представьте

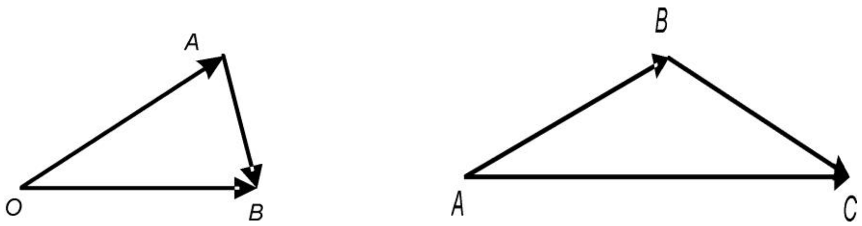


Рис. 15

97. Начертите два не параллельных вектора. Найдите их сумму и разность. В каком случае два вектора и их сумма принадлежат одной прямой?

98. Начертите два не параллельных вектора. Найдите их сумму и разность. В каком случае два вектора и их сумма принадлежат одной прямой?

99. Сделайте рисунок по каждой записи:

$$\text{а) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathrm{C}D} = \overrightarrow{\mathrm{A}D}; \qquad \text{б) } \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{EP} .$$

100. Начертите любой вектор, а затем найдите вектор, являющийся суммой трёх таких векторов.

101. Дана одна точка. Образуется ли вектор этой точкой? Как называется такой вектор? Чему равна его длина?

102. Даны векторы $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$. Постройте ΔABD , две стороны которого соответственно представляют векторы: 1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{CD}$; 2)

$\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{\text{AB}}$ +2 $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{\text{AB}}$ +2 $\overrightarrow{CD}$ и 2 $\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{CD}$.

Указание. Сначала постройте векторы, соответствующие обоим выражениям, а затем треугольник.

103. Начертите два произвольных вектора $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{ME}$, а затем построите векторы 1) $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{ME}$; 2) $\overrightarrow{KD} - 3\overrightarrow{ME}$ 3) $2\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{ME}$ 4) $\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{KD}$ 5) $\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{ME}$

104. Начертите два произвольных вектора $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{ME}$. Постройте векторы 1) $4\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{ME}$; 2) $3\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{ME}$; 3)$3\overrightarrow{KD} - 3\overrightarrow{ME}$

105. Начертите вектор $\overrightarrow{AB}$, а затем постройте векторы:

106. $\overrightarrow{\text{C}D} = -2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{KE} = -3\overrightarrow{AB}$.

107. Что может означать равенство: $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{AB}$? $\overrightarrow{MP} = k\,\overrightarrow{AB}$, где $k \in R$?.

108. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OP}(1{,}1)$и $\overrightarrow{OC}(2;1)$, если угол между ними равен $18^0 17'$.

109. Угол между двумя векторами равен 150^0. Равно ли их скалярное произведение положительному числу? Почему? Скалярное произведение двух векторов равно отрицательному числу. Объясните смысл такого факта на примерах из физики.

110. Вычислите скалярное произведение каждой пары векторов, выполнив рисунок и измерив угол между векторами:

$$\overrightarrow{OA}(2;-3);\ \overrightarrow{OB}(1;3);\ \overrightarrow{OK}(-2;2);\ \overrightarrow{OE}(-1;4);\ \overrightarrow{OD}(-2;-2)\,.$$

111. Ребёнок тащит сани, прилагая силу в 30 Н под углом в 30^0 к пути перемещения. Определите величину работы, совершённой ребёнком, если сани переместились на 50 м.

112. Даны два вектора, угол между которыми равен 90^0. Чему равно их скалярное произведение? Зависит ли оно от длин векторов?

Проиллюстрируйте такую картину рисунком. Произойдёт ли перемещение?

113. Заданы векторы $\overrightarrow{OA}(3;2)$ и $\overrightarrow{OB}(-2;1)$. Найдите их скалярное произведение, измерив угол между ними.

114. Даны векторы $\overrightarrow{OA}$ (1;1) и $\overrightarrow{OB}$ (−1;3). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OM} = 3 \cdot \overrightarrow{OA} - 5 \cdot \overrightarrow{OB}$.

115. Даны векторы: $\overrightarrow{OA}$ (2;5), $\overrightarrow{OB}$ (−2;−5), $\overrightarrow{OC}$ (−5;2), $\overrightarrow{OK}$ (3;−1), $\overrightarrow{OP}$ (6;−2), $\overrightarrow{OM}$ (1;−3). Найдите среди них параллельные и вычислите скалярные произведения каждой пары, измерив углы между векторами.

116. Представьте вектор $\overrightarrow{OA}$ (3;4) в виде суммы двух векторов, принадлежащих координатным прямым, а затем найдите скалярное произведение вектора $\overrightarrow{OB}$ (−1;1) с каждым из этих трёх векторов.

117. Легковой автомобиль застрял в грязи. Найдите величину работы (механической), если машину нужно сдвинуть на 1м и для этого требуется сила в 80Н. Может ли случиться, что необходимая сила была приложена, но машина не двигается с места?

118. При каком расположении двух векторов их скалярное произведение равно: 1) нулю; 2) отрицательному числу; 3) положительному числу; 4) наибольшему значению; 5) наименьшему значению? Ваш ответ разъясните примерами.

119. Даны три вектора:$\overrightarrow{OA}$ (1;3),$\overrightarrow{OB}$ (−1;4),$\overrightarrow{OK}$ (5;1). Докажите верность равенства, измеряя углы между ними:

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OK} .$$

120. Найдите скалярные произведения векторов:

1) $3\overrightarrow{OA}(-2;-2) + 5\ \overrightarrow{OC}(0;-3)$ и $\overrightarrow{OK}(4;4)$;

2) $\overrightarrow{OP}$(1;5) и 5 $\overrightarrow{D\mathrm{M}}$ (-2;3);

3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}(3;-2)$и $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(1;3) + \overrightarrow{\mathrm{O}D}(-2;-1)$.

121. Постройте векторы $\overrightarrow{OA}$ (1;1) и $\overrightarrow{OB}$ (−1;3). Найдите их скалярное произведение двумя способами: 1) вычислив длины векторов и измерив угол между ними; 2) с помощью их координат. Какой из этих способов проще и дает более точный результат? Какой из них можно применять в любом случае?

122. Вычислите скалярные произведения векторов удобным вам способом:

а) $\overrightarrow{OA}$ (3;5) и $\overrightarrow{OB}$ (2;–2); б) $\overrightarrow{OC}$ (0;1) и $\overrightarrow{OK}$ (3;2); в) $\overrightarrow{OP}$ (1;1) и $\overrightarrow{OD}$ (5;3); г) $\overrightarrow{OM}$ (−6;4) и $\overrightarrow{OE}$ (3;0).

123. Даны точки A (1;2), B (−1;5), C (3;2). Вычислите скалярные произведения: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

124. Находятся ли среди векторов взаимно перпендикулярные:

$\overrightarrow{OA}\,(3;2)$; $\overrightarrow{OB}\,(-2;3)$; $\overrightarrow{OK}\,(5;3)$; $\overrightarrow{OM}\,(-5;7{,}5)$; $\overrightarrow{OD}\,(2;-3)$; $\overrightarrow{OE}\,(3;-5)$?

125. Даны векторы $\overrightarrow{OA}$ $(x_1;y_1)$ и $\overrightarrow{OB}$ $(x_2;y_2)$. Какое из равенств свидетельствует о параллельности или перпендикулярности векторов:

1) $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$; 2) $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$?

126. Выясните, находятся ли среди данных векторов параллельные или перпендикулярные между собой векторы: $\overrightarrow{OK}$ (3; 4), $\overrightarrow{OA}$(1;2), $\overrightarrow{OD}$(−2;–4), $\overrightarrow{OE}$ (4;–3), $\overrightarrow{OB}$ (6;8)?

127. Вычислите величину механической работы, совершаемой мальчиком при перемещении тачки на 50м, если он прилагает к ней силу в 5кГ под углом в 30^0 к плоскости Земли.

128. Скалярное произведение векторов равно 45. Найдите длину одного из векторов, если длина другого равна 8 м и угол между ними равен 40^0.

129. При перемещении предмета на 10 м была совершена работа в 40 кг/м. Определите величину силы, приложенной к этому предмету под углом к

пути перемещения в: а) 0^0; б) 20^0; в) 35^0. В каком из этих случаев затрачена меньшая сила?

130. Даны вершины $\triangle ABC$: А $(1;3)$, В $(-1;-1)$, С $(0;\ 2)$. Вычислите величины внутренних его углов как значения углов между векторами. Находятся ли среди данных векторов взаимно перпендикулярные векторы: $\overrightarrow{OA}$ (1;2), $\overrightarrow{OB}$ $(2;-1)$, $\overrightarrow{OP}$ $(3;4)$, $\overrightarrow{OK}$ $(1{,}5;-1{,}125)$,

$$\overrightarrow{OC}\ (3;5), \overrightarrow{OE}\ (-3;2),\ \overrightarrow{OM}\ (4{,}2;-1{,}2), \overrightarrow{OH}\ (1{,}2;\ 4{,}2)?$$

131. Составьте пары векторов, указывая их координаты, так, чтобы угол между ними был равен:

а) 0^0; б) 90^0; в) острому углу, г) тупому углу; д) 180^0.

132. Каким должен быть угол между векторами, если они параллельны? Находятся ли среди векторов векторы, параллельные вектору $\overrightarrow{OA}$ $(3;-1)$: $\overrightarrow{OB}$ $(6;-2)$, $\overrightarrow{OK}$ $(-6;2)$, $\overrightarrow{OE}$ $(3;5)$, $\overrightarrow{OD}$ $(-9;3)$?

133. Даны векторы $\overrightarrow{OM}$ $(1;2)$, $\overrightarrow{OD}$ $(-2;3)$, $\overrightarrow{OK}$ $(3;1)$. Найдите числа x и y такие, чтобы равенство было верным: $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OM} + y \cdot \overrightarrow{OK}$.

134. Выясните вид треугольника с вершинами: А (5;2), В (2;5), С (8;5). Сколько способов выполнения этого задания существует?

135. Докажите, что □ ABO равнобедренный, если он образован векторами: $\overrightarrow{OA}$ (1;3) и $\overrightarrow{OB}$ (−1;3). Вычислите значение угла при его вершине.

136. Определите величину угла между медианой m_a и стороной СА в □ABC, если $A(4;\ 2)$, $B(-1;\ 4)$ и $C(-2;-1)$.

2.2.4. Выражение площади треугольника через синус угла

137. Вычислите площадь $\triangle$ABC, если c=7см, b=8 см, $\angle$A $=33^0$.

138. Постройте $\triangle ABC$ зная, что a =7 см, b = 6 см, c = 8 см. Вычислите его площадь рациональным способом.

139. Постройте $\triangle ABC$. Вычислите его площадь способом, требующим наименьшее число измерений.

140. Вычислите площадь треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{OA}$ (5;2) и $\overrightarrow{OB}$ (1;3). Какая из знакомых вам формул вычисления площади треугольника здесь более приемлема?

141. Вычислите площадь треугольника, используя наиболее удобную в каждом случае формулу, если известны:

1) a = 5см, b = 4см, c = 6см; 2) a = 4см, b = 7см, C = 800;

3) a = 8см, b = 6см, c = 10см; 4) b = 6см, h_b = 8см.

142. Дан равносторонний треугольник со стороной в 2 см. Найдите скалярное произведение двух векторов, принимая его стороны за векторы. Найдите площадь этого треугольника.

143. Даны уравнения прямых линий: 1) $x - y - 2 = 0$; 2) $x + y = 0$; 3)$y = 1$. Вычислите площадь треугольника, образованного точками пересечения этих прямых.

144. Даны координаты середин сторон $\triangle ABC$, если: M(1;1), D(3;2) и K(−1;3). Определите площадь $\triangle ABC$ и длины всех его медиан.

145. Даны координаты трёх вершин ABC: A (2;5), B (−1;7) и C (−2; −4). Определите координаты середин сторон и площадь треугольника, образованного серединами сторон данного треугольника.

146. Даны точки A (3;4) и B (−5;2). Найдите координаты точки, находящейся на одинаковом расстоянии от точек A и B. Сколько таких точек может оказаться?

147. Начертите любой отрезок и перпендикуляр к нему через его середину. Докажите, что любая точка этого перпендикуляра находится на одинаковом расстоянии от концов этого отрезка.

2.2.5. Вписанные и описанные окружности

148. Отметьте три точки, не лежащие одновременно на одной прямой. Научимся построить окружность, проходящую через эти три точки. Для этого нужно найти точку, отстоящую от данных трёх точек на одинаковом расстоянии. Здесь можно использовать ход решения задачи построения серединного перпендикуляра отрезка. Данные три точки соединим последовательно отрезками, получаются три отрезка, образующих треугольник. Серединные перпендикуляры двух сторон этого треугольника пересекаются в одной точке, которая находится на одинаковом расстоянии от данных трех точек. Значит, эта точка будет центром искомой окружности. Расстояние от этой точки до данной точки представляет радиус окружности, которую легко можно начертить с центром в точке пересечения двух серединных перпендикуляров к двум сторонам треугольника. Такая окружность называется описанной около треугольника. Окружность считается описанной около многоугольника, если принадлежат ей все вершины этого многоугольника.

149. Начертите окружность и проведите в нем две хорды с одним общим концом (хорды выходят из одной и той же точки окружности в разные стороны). Они образуют угол, вершина которого находится на окружности.

Итак, угол, вершина которого находится на окружности, а сторонами являются её хорды, называется вписанным углом в окружность.

150. Постройте любую окружность и проведите в ней три вписанных угла. Какой угол называется вписанным углом в окружность? Какой треугольник называется вписанным в окружность? Сколько градусов стягивает (соответствует) вся окружность? Скольким градусам равна сумма всех трех углов треугольника?

151. Если вся длина окружности стягивает 360°. а углы вписанного в неё треугольника в сумме соответствует половине 360°, то каждый угол треугольника соответствует половине тех градусов, которые стягиваются дугой, заключенной между его сторонами. То есть, верна такая теорема: любой вписанный в окружность угол содержит половину градусов дуги, заключенной между его сторонами.

152. Какие из данных фигур (рис.16) считаются вписанными в окружность? Почему?

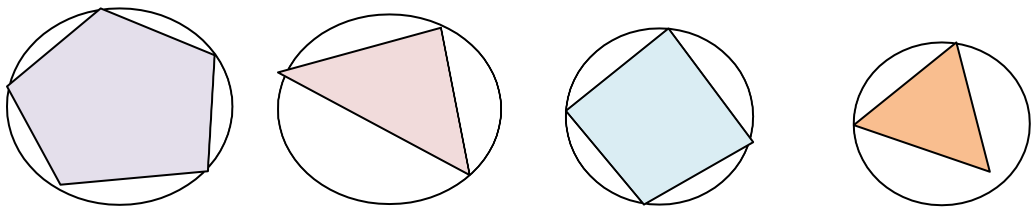


Рис. 16

153. Догадайтесь о верности такого утверждения: сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.

154. Сколько прямоугольных треугольников можно вписать в окружность? Ваш ответ иллюстрируйте рисунками.

155. Может ли быть больше диаметра окружности самая длинная сторона вписанного в окружность треугольника? А равной её диаметру? А меньше него?

156. Докажем такое утверждение: *отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около него окружности.* Эта теорема в школьных учебниках называется теоремой синусов и читается иначе: *стороны треугольника пропорциональны синусам соответственно противолежащих им углов:* (a:b:c=sinA:sinB:sinC).

2.2.6. Дробно-линейная функция. Графическое изображение дробно-линейной функции

157. *Функция считается дробно-линейной, если она задана в виде алгебраической дроби, у которой аргумент содержится в знаменателе, а числитель и знаменатель представляют линейные функции от этого аргумента.* Например, $y = \frac{7}{x}; y = \frac{7}{x-3}; y = \frac{8+x}{2x+5}$ – примеры дробно-линейных функций

В дробно-линейной функции не для всякого значения аргумента существует соответствующее значение функции. Например, в функции $y = \frac{8}{2x-1}$ значение дроби не существует, если знаменатель будет равен нулю, а это может случиться при $x = \frac{1}{2}$, то есть для этого значения x не существует соответствующего значения y.

Пусть дана функция $y = \frac{7}{x}$. Найдем несколько пар чисел, соответствующих этой функции. Для этого берем значения для x только из области ее определения ($x \neq 0$).

Построим эти точки на координатной плоскости (рис. 17а) и соединим их линиями в каждой четверти отдельно:

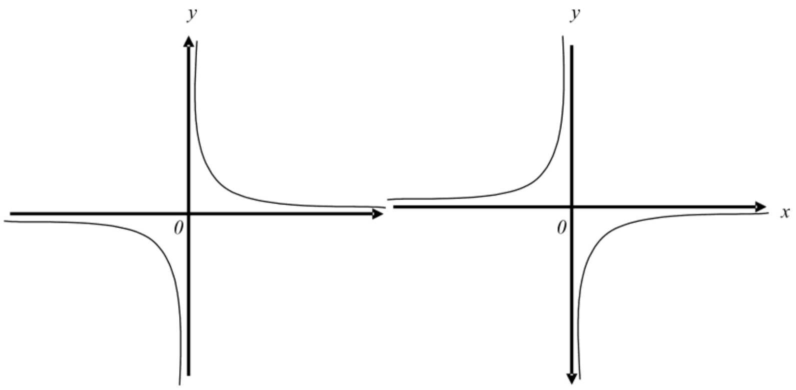
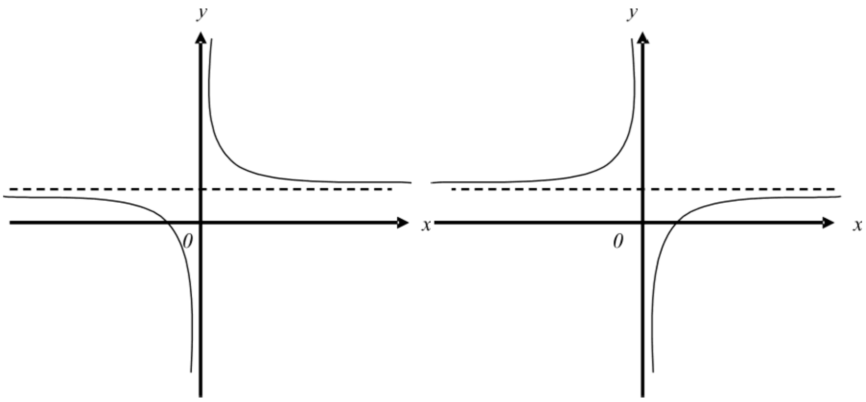


Рис. 17

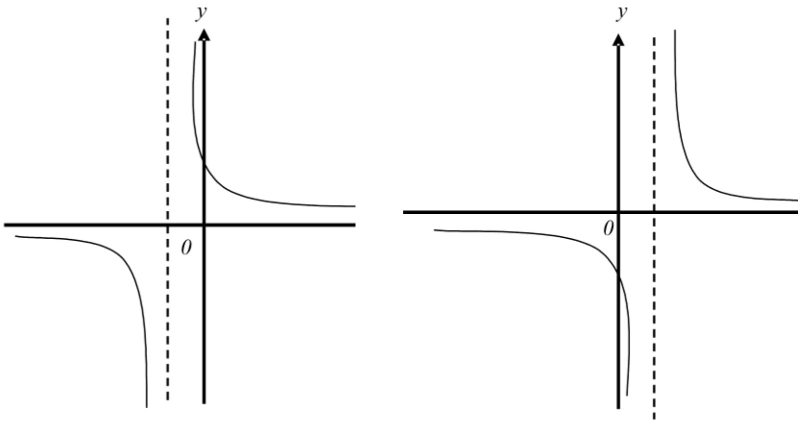
Для функции $y = -\frac{7}{x}$ также построим график, определив несколько пар соответствующих значений: $(1; -7)$; $(-1; 7)$; $(7; -1)$; $(-7;\ 1)$; $(-2;\ 3{,}5)$; $(2;\ -3{,}5)$; $(3{,}5;\ -2)$; $(-3{,}5;\ 2)$ и т. д. (рис. 22б).

Сравнивая функции $y = \frac{7}{x}$ и $y = -\frac{7}{x}$ и их графики, видим, что в обоих случаях графиком являются кривые линии, симметрично расположенные относительно начала координат. Такая пара кривых называется гиперболой, причем при положительном значении числителя гипербола расположена в первом и третьем координатных углах, а при отрицательном значении числителя – во втором и четвертом координатных углах. Если бы мы имели функцию $y = 2 + \frac{7}{x} = \frac{2x+7}{x}$, то графиком такой функции была бы та же самая гипербола $\mathrm{y} = \frac{7}{x}$, смещенная по прямой ОУ вверх на 2 единицы (рис. 18, а). Аналогично, и функция $y = 2 + \frac{-7}{x} = \frac{2x-7}{x}$ и также представляет гиперболу $\mathrm{y} = \frac{7}{x}$ смещенную вверх по (ОУ) (рис. 18, б).



а) Рис.18 б)

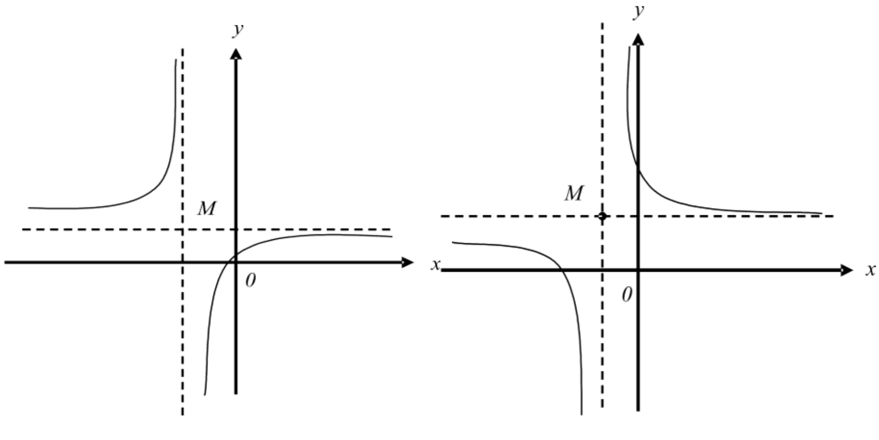
В случае функции $y = \frac{7}{x+2} (\frac{7}{x-2})$, то графиком такой функции также была бы гипербола $\mathrm{y} = \frac{7}{x}$, смещенная по (ОХ) на 2 единицы (влево или вправо), так как область определения изменяется, то есть прямая ОУ параллельно переносится в точку х= –2 (х=2) (рис. 19, а, б)



а) б)

Рис. 19

Если функцию представить в виде $y = 2 + \frac{7}{x+2}$ то графиком такой функции также является гипербола $y = \frac{7}{x}$, смещенная по (ОУ) вверх на 2 единицы и по (ОХ) влево на 2 единицы, то есть начало координат переносится в точку $M_a(-2;\ 2)$ (рис. 25,а). В случае $y = 2 - \frac{7}{x+2}$ имеем (рис.20,б)



а) Рис. 20 б)

Заметим, что для построения графика дробно-линейной функции нужно найти координаты точки, являющейся началом параллельно перенесенных координатных прямых. Для этого нужно найти значения x, где функция не определена, и значение y получим, разделив числитель дроби на её знаменатель.

158. Постройте графики функций:

1) $y = \frac{3}{x}$; 2)$y = -\frac{4}{x}$; 3) $y = \frac{3}{7x}$; 4)$y = -\frac{5}{2x}$; 5) $y = \frac{6}{-x}$; $\frac{6}{\ }$

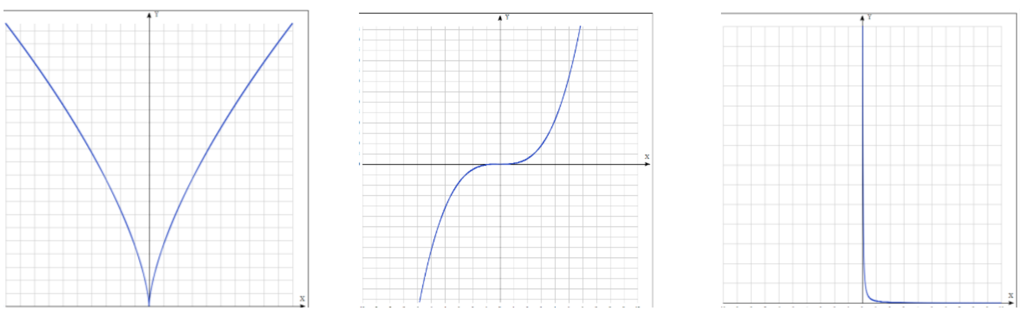
6)$y = \frac{4}{x}$; 7)$y = \frac{4}{5x}$; 8)$y = -\frac{1}{3x}$; 9)$y = -\frac{8}{3x}$;

10)$y = \frac{3}{4x}$; 11)$y = \frac{3}{4-x}$; 12) $y = 3 - \frac{1}{x}$; 13)$y = -2 - \frac{1}{x}$;

2.2.7. Степенная функция

159. *Степенная функция* – это понятие объемное. Это любая функция вида $y=x^к$, где k - действительное число, исключая 0 и 1, поскольку при этих значениях k функция становится линейной. Если k>0, то мы имеем функцию, геометрическая форма которой связана со словом «парабола» (кубическая парабола, часть параболы, и т.д.). Если k < 0, то имеем функцию, геометрическая форма которой связана со словом «гипербола» (или одна ветвь гиперболы, или симметрично расположенные части гиперболы и т.д.). Например, $y = x^{\frac{2}{3}}$, показатель степени k>0 (рис. 26, а): $y = \sqrt[3]{x^2}$, y>0, x∈R. Если $y=x^3$ то график – кубическая парабола (рис. 26, б).

Если $y = x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ (рис. 21, в)



а) б) в)

Рис. 21

Среди степенных функций чаще всего встречается квадратичная функция, то есть степенная функция, где k=2. Графиком таких функций является парабола. Обратим внимание на различные варианты задания квадратичной функции. Наиболее простая форма - это y=x2. Это парабола с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вверх (рис. 22, а). В случае y=−x2, та же самая парабола, ветви которой направлены вниз (рис. 22, б)

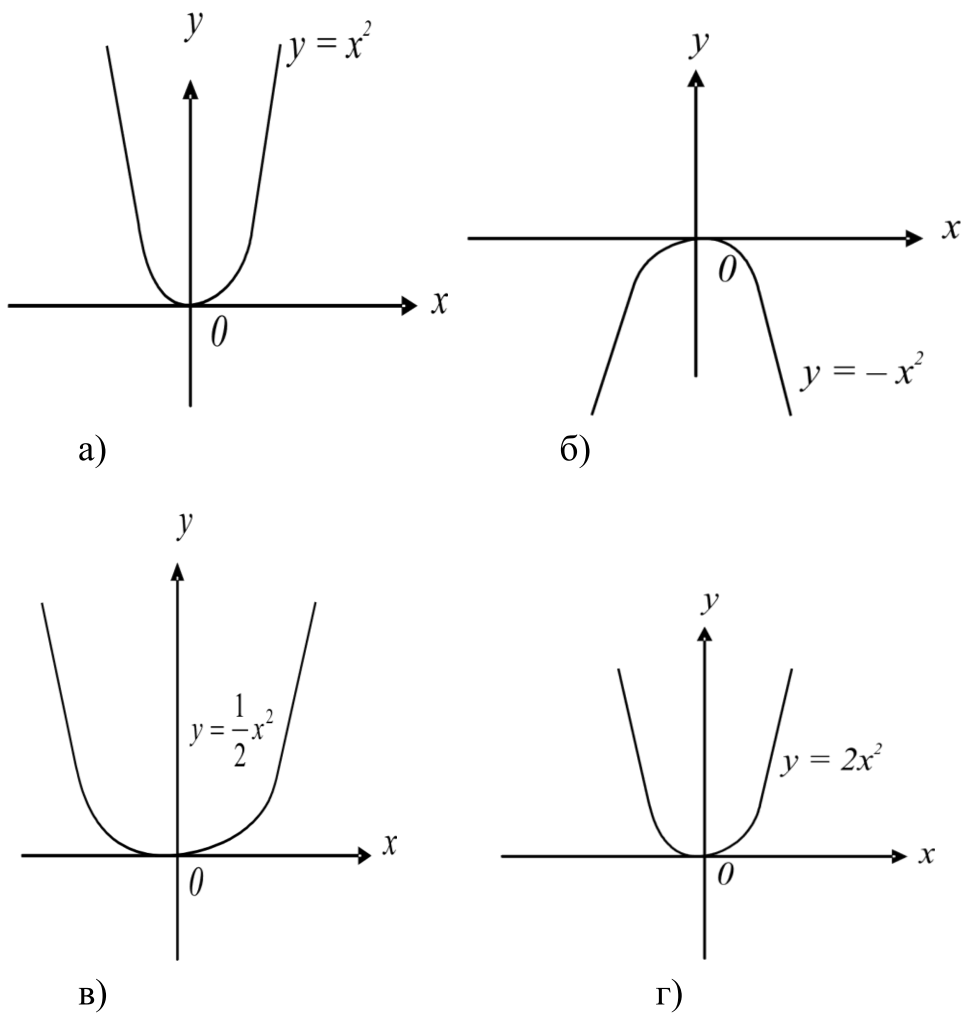


Рис. 22.

Последовательное и поэтапное преобразование алгебраической формы и переход к геометрической форме дают учащимся возможность осмыслить их взаимосвязь, что легко демонстрируется геометрическим языком (рис.23).

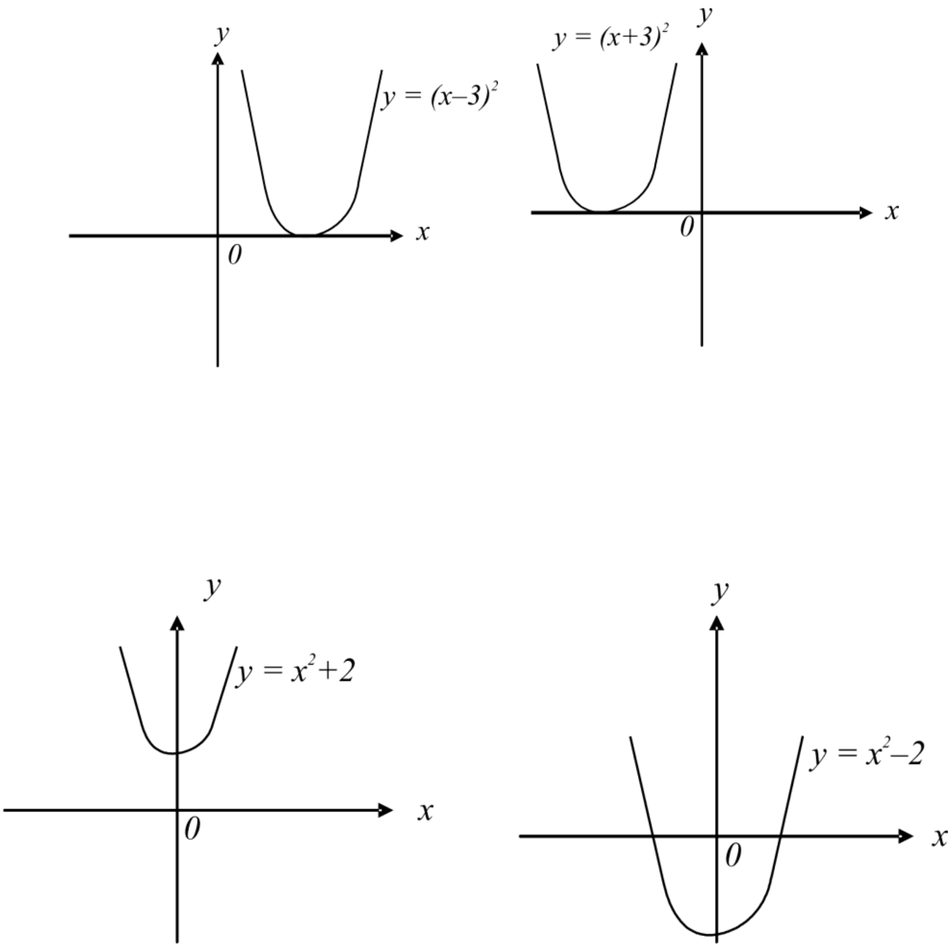


Рис. 23

2.3. Методика организации и проведения экспериментальных исследований

Экспериментальное исследование проводилось в три этапа. В 2015-2018 годах в МАОУ «средняя общеобразовательная школа №24 с углубленным изучением отдельных предметов» г. Старый Оскол.

Задачей первого, констатирующего эксперимента было:

1. установление реального уровня постановки преподавания математики в 5-11 классах и качества знаний учащихся;
2. выявление причин мало эффективной методики относительно отражения в ней различных подходов при обучении математике и возможностей реализации системных заданий по математике с ориентиром на развитие школьников, опираясь на комплексный подход при обучении;
3. уточнение путей реализации методики, в которой обращается внимание на комплексное восприятие материала.

От точности полученных результатов зависела методика проведения поискового и обучающего этапов эксперимента. В связи с этим было обращено особое внимание на констатирующий этап эксперимента, целью которого было получение данных, позволяющих установить понимание сути комплексного применения приемов при обучении математике и уровня постановки методики в этом плане. При этом разработан ряд вопросов в двух вариантах учителям математики и учащимся школ. В частности, учителям предлагали такие вопросы:

1. Как вы понимаете смысл фразы «комплексного подхода при обучении математике»?
2. Читали ли вы какую-нибудь литературу, где затрагиваются вопросы комплексного подхода при обучении математике? А если да, то какую именно?
3. Смогли ли вы привести пример задания, при выполнении которого происходит большее восприятие изучаемого материала?

4. Определите, какое из заданий вы могли бы разъяснить разными способами:

а) вычислить периметр прямоугольника;

б) написать целые числа парами так, чтобы эти числа были бы длинами сторон прямоугольника с площадью 36 $см^2$;

в) начертить пять равных векторов;

г) решить уравнение $\sin(2x-30^o) = 0$;

д) составить 4 уравнения, эквивалентных уравнению $2x-7=9$;

е) подобрать в лесу дерево с диаметром в 30 см для рубки?

ж) решить уравнение $5x2+3x-2=0$;

з) доказать теорему: «Сумма внутренних углов треугольника равна 180^o» двумя способами.

Предлагались вопросы для школьников:

а) Для 7-9 классов:

1. Постройте треугольник с длинами сторон 3см, 5см, 7см.
2. Составьте три различных уравнения, имеющих своим решением только одно число 3.
3. Напишите три примера функции, графики которых параллельны графику прямой $y=4x+1$.
4. Какая из формул представляет площадь круга: $S=2\pi R$, $S=2\pi R^2$, $S=\pi R^2$, $S= 2R^2$?
5. Верно ли равенство $\sin 40^o = \cos 50^o$?
6. Как можно определить высоту дерева во дворе?

Сопоставительный анализ ответов в контрольных и экспериментальных группах показал, что экспериментальные группы выполнили задания на 20 – 25% лучше по сравнению с теми же ответами в контрольных группах

Нас интересовало особенно качество ответов учащихся, где в экспериментальных группах ответы отличались с таким же отрывом, какой соответствовал ответам учителей (25 – 30 %). В частности, в указанное время учащиеся экспериментальных классов верно ответили 58 человек из 79, а в контрольных классах из 79 человек верно ответили 27 учащихся (см. рис. 24).

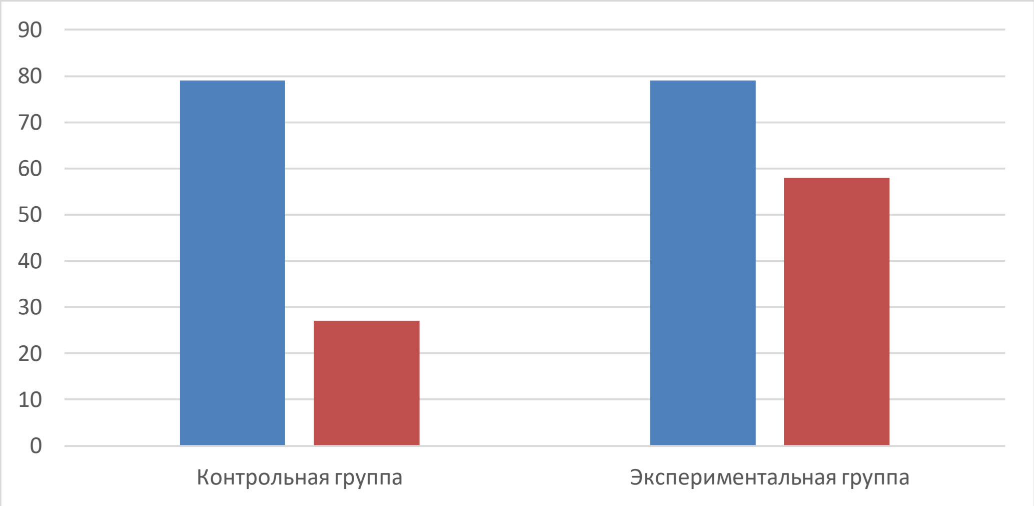


Рис. 24. Сопоставительный анализ качества ответов в контрольных и экспериментальных группах

Ответы учащихся убедили нас в том, что систематическое их привлечение к выполнению тех или иных упражнений, ориентированных на поисковую деятельность, способствует их умственному развитию, ускорению сообразительности, поиску вариантов альтернативы и т.д. Тут можно определить уровни подготовленности учащихся к такой системе, их нужно подготовить поэтапно.

Критериями оценки уровня умений учащихся пояснить усвоенное разными способами мы определили:

I уровень – умение решать (выполнять) предложенные задания без дополнительных пояснений, изменений, дополнений, не учитывая вариативности достижения цели.

II уровень – умение деформировать задание, расширяя вариативность его выполнения, хотя бы в неполном объеме учета всех возможных ситуаций.

III уровень – это умение составлять задания, выполнять предложенное задание с учетом его вариативности хода выполнения, умение различными вариантами комментировать ход выполнения заданий.

Предложенные на констатирующем этапе задания в контрольных классах были выполнены почти на уровне требований первой категории, а в экспериментальных классах, где проведено предварительно некоторые пояснения, учащиеся перешли к умениям второго уровня, за счет этого и повысилось качество выполнения заданий, хотя до третьего уровня умений большинство детей не доходили, редко кто проявлял полную самостоятельность. Более того:

- большинство учащихся контрольных классов имеет низкий или же средний уровень освоенности знаний, развитости воображений.
- слабое использование системы упражнений этими учащимися, при выполнении которых требуется самостоятельное и поисковое мышление, служит причиной слабого уровня развитости детей.

Констатирующий эксперимент убедил нас в возможности достижения цели, оправдания гипотезы о результативности интегрированного подхода к восприятию математического материала.

Второй этап экспериментального исследования в основном касался глубокого изучения научно - методической литературы по вопросам интегрированного подхода к восприятию математического материала. Этот этап работы посвящён составлению системы упражнений по классам и темам, в проведении дополнительных собеседований с учителями.

На этом этапе уточнялся ряд вопросов, касающихся системы упражнений и методики их реализации, подготовки всей методики для следующего обучающего этапа экспериментального исследования. Были разработаны экспериментальные материалы. Эта система упражнений не выходила по своему содержанию за пределы программы.

Эти материалы частично внедрялись в практику, проходили апробацию, обсуждались в учительских коллективах, а также уточнялись, выступая на конференциях, совещаниях учителей и преподавателей вузов. В итоге поискового эксперимента была уточнена гипотеза, предложены сама система упражнений и методика ее использования в процессе обучения математике.

Последний, обучающий этап экспериментального исследования проходил в 2017-2018 учебном году и преследовал цель: проверить, как влияют внедрение разработанной нами системы упражнений и методика ее использования на предмет повышения умственного развитие детей, формирование у них умений самостоятельно сформулировать вопросы и отвечать на предложенные задания. Для этого были выделены по одному классу в каждой параллели школы.

В конце обучающего эксперимента в контрольных и экспериментальных классах были предложены задания:

1 Напишите пять чисел, больших $1{,}11$, но меньших $1{,}111$.

2 Решите пример двумя способами: $12{,}5 - (17{,}5 - 7{,}5)$.

3 Составьте три примера пропорции, используя дробь $\frac{4}{5}$.

4 Найдите НОК $(32;\ 56)$ тремя способами.

5 Вычислите площадь круга, если длина его окружности равна 4.

6 Найдите три пары чисел, находящихся в отношении 40% одного из них к другому.

7 Разложите многочлен $7a^2 - 3ab - 4b^2$ на множители двумя способами.

8 Найдите НОД и НОК для выражений $ab - b$ и $a^2 - 1$.

9 Докажите теорему о вычислении площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.

10 Вычислите площадь сегмента круга с радиусом 3 см, если дуга сегмента стягивает 30°.

11 Составьте три уравнения прямых линий, параллельных вектору $\overrightarrow{OA}$ (1;3).

12 Вычислите площадь треугольника, если даны координаты трех его вершин: $A(3;3).B(-3;3)$ и $C(-3;-4)$.

13 Постройте график функции $y = 2\cos(2x + 60°)$

2.4 Анализ результатов эксперимента

Результаты контрольной работы в контрольных и экспериментальных классах расходились; в частности, в 6 классе: задания под №№1-4 в контрольном классе выполнили из 30 человек только 7, а в экспериментальном классе это задание из 27 человек выполнили 20. В том же контрольном 6 классе 3 задание смогли выполнить 8 человек из 30, а в экспериментальном классе из 27 человек выполнили 24. Второе задание двумя способами не смогли выполнить в контрольном классе, а в экспериментальном выполнили двумя способами 23 из 27.

По анализу выполнения заданий можно было определить уровень освоенности материала учащимися. В контрольных классах третий уровень развития детей на много ниже, чем в экспериментальных, об этом свидетельствует не умение детей контрольных классов самостоятельно изменить что-нибудь в задании. Например, в 6 контрольном классе задание №4 из 30 человек 16 не поняли, как выполнять другими способами. В этом же классе задание №4 выполнили 14 человек из 30 одним способом и не смогли разъяснить различные варианты, только 5 человек попытались разъяснить разными способами. В экспериментальном классе это задание выполняли тремя способами 6 из 27, двумя способами –11.

Задания под №№5-8 предлагались в 8 классе. В контрольных классах из 29 человек задание №5 выполнили 14 человек, а в экспериментальных классах из 28 человек выполнили 25. Задание №6 в экспериментальном классе выполнили 24 из 28, а в контрольных классах выполнили только 6 из 29. Задание №7 в экспериментальном классе выполнили двумя способами 25 человек из 28, а в контрольном 2 человек из 29 только одним способом. Задание №8 выполнили в экспериментальном классе 26 из 28, а в контрольном - 14 человек из 29.

Задания под №№9-13 предлагались в 9 классе. В экспериментальных классах выполнили 12 из 24 человек, а в контрольных классах никто не мог доказать из 22 человек, только четверо делали попытки для доказательства. Задание №10 в экспериментальном классе выполнили 18 из 24, а в контрольном выполнили только 2 из 22. Задания №№11-13 не выполнил никто в контрольном классе, а в экспериментальном классе эти задания выполнили 15 из 24.

В показателях уровня развития мышления учащихся (их умения выполнять предложенные задания с учетом вариативности) замечаем, что произошли качественные изменения. В частности, в экспериментальных классах процент учащихся с высоким уровнем развития мышления повысился с 40% до 70%, в то время как в контрольных классах он повысился с 40 до 45-46%. Нас интересовал такой вопрос: активность учащихся при выполнении упражнений по любой теме (решение примеров, задач, конструирование рисунков и т. д.); активность детей в экспериментальных классах была выше, чем активность учащихся контрольных групп.

Средний балл оценок в контрольных и экспериментальных классах оказался не одинаковым. Для сравнения взяты показатели успеваемости учащихся в экспериментальных и контрольных классах, где проведены экспериментальные исследования, причем эти оценки взяты по истечении одного месяца после завершения экспериментального исследования. Если в показателях оценок до начала эксперимента особых расхождений не было, то после окончания эксперимента расхождения в оценках (по их качеству) оказались значительными, что представлено в таблице №2.

Таблица 2

Результаты выполнения заданий учащимися контрольных и экспериментальных классов

Школа	Классы	Кол. уч.		Оценки								**Средний балл**	
		Эксп. группа	Контр. группа	«2»		«3»		«4»		«5»		Эксп. группа	Контр. группа
				к.г.	э.г.	к.г.	э.г.	к.г.	э.г.	к.г.	э.г.		
«СОШ №24 с УИОП» г. Старый Оскол.	6	27	30	1	1	6	13	12	6	8	3	4,00	3,04
	8	28	29	0	1	6	13	15	12	7	3	4,03	3,59
	9	24	22	0	0	4	11	13	9	7	2	4,13	3,59

Таким образом, опираясь на средний балл экспериментального класса в сравнении с контрольной группой, свидетельствуют об эффективности формирования системности знаний с помощью комплексного подхода, что подтверждает справедливость гипотезы исследования: если выделить особенности комплексного подхода к обучению математике учащихся, разработать систему заданий, адекватных им, то её реализация будет способствовать сформированности системности знаний учащихся. Разработанная система упражнений на основе реализации комплексного подхода к изучению математики и методика её внедрения в практику обучения математике в общеобразовательной школе дает положительные результаты, учащиеся получают системные знания по предмету, умеют применять знания на практике. Восприятие математических понятий происходит разносторонне, формируется крепкий «фундамент» для получения дальнейших знаний по предмету. Повышается успеваемость, качество знаний учащихся, получают системные знания по математике, развивается творческий подход учащихся к приобретаемым знаниям.

Контролирующий этап эксперимента показал наличие положительной динамики по формированию системных знаний учащихся экспериментальных классов школы. Выявлены положительные результаты учащихся, что подчеркивает необходимость разработки и использования системы упражнений, способствующих формированию системных знаний учащихся.

Комплексный подход к обучению математике, не только целесообразен, но и необходим.

Заключение

Развитие познавательной деятельности учащегося происходит на базе повышения качества знаний. А наличие качества знаний школьников проявляется в их способностях к самостоятельности выполнения учебной деятельности и самоконтроля. Это и есть одна из характеристик сформированности у школьника познавательной культуры на основе математических знаний, что очень важно в интеграции личности в национальную и мировую культуры.

Цель проведенного исследования заключалась в разработке системы упражнений по математике на основе комплексного подхода к процессу обучения в средней образовательной школе. Такая система, где комплекс приемов и методов познавательного характера, будучи использованы в процессе обучения математике, способствует формированию системных знаний школьников. Считаем, что эта наша гипотеза в исследовании подтвердилась.

При этом можно сделать и ряд выводов, вытекающих из анализа наших результатов по данному исследованию.

1) Как теоретически, так и экспериментально доказали, что комплексный подход при обучении математике не только целесообразен, но и необходим.

2) Внесен определенную ясность в токовании понятия «комплексный подход» при обучении математике. Принципы «разнообразия» вербальных выражений мысли, адаптационная речь, различные варианты диалога вокруг изучаемого материала, раскрытие содержания данного понятия в рамках понятия «математический язык».

3) Раскрыта специфика реализации комплексного подхода при обучении математике в школе как фактора активизации познавательной

деятельности учащихся не только при изложении нового материала, но и при решении практических задач.

4) Представлена методика обучения математике, где используется комплексный подход как один из аспектов повышения качества знаний учащихся.

5) Установлено, что комплексный подход при обучении математике обладает широкими потенциальными возможностями для совершенствования системы обучения учащихся как гаранта повышения качества их знаний.

6) Разработаны приемы и методы использования комплексного подхода при обучении математике в общеобразовательной школе не только при восприятии нового математического материала, но и при закреплении его системой упражнений.

7) Составлены учебно-методические материалы, как образцы по обучению математике учащихся общеобразовательной школы; эти материалы могут быть широко использованы учителями математики и студентами вузов математических факультетов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов, С. П. Сущность процесса обучения / С. П. Баранов // Учебное пособие по спецкурсу для студентов пединститутов. – М.: Просвещение, 1982. – 43 с.
2. Выготский, Л. С. Воображение и творчество в детском возрасте / Л. С. Выготский. – СПб.: Союз, 1997. – 96 с.
3. Выготский, Л. С. Проблемы общей психологии / Л. С. Выготский // Собрание сочинений. – Т. 1. – Ч.1. – М.: Педагогика, 1982. – 480 с.
4. Гальперин, П. Я. Управление процессом знаний / П. Я. Гельперин // Исследования в педагогических науках. – 1965. – №4. – С. 15–20.
5. Гальперин, П. Я. Современное состояние теории поэтапного формирования умственных действий / П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина // Вестн. Моск. ун-та. Серия 14. Психология. – 1979. – №4. – С. 19–44.
6. Глейзер, Г. Д. Повышение эффективности обучения математике в школе / Г. Д. Глейзер. - М.: Просвещение, 1989. – 238 с.
7. ГОСТ 11. 004.74. – Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных оценок и доверительных границ для параметров нормального распределения. – М.: Изд-во стандартов, 1974. – 24 с.
8. Гусев, В. А. Как помочь ученику полюбить математику? / В. А. Гусев // Ч. 1. – М.: Просвещение, 1994. – 168 с.
9. Дорофеев, Г. В. Новые стандарты математического образования / Г. В. Дорофеев // Предметно-методическая подготовка будущего учителя математики, информатики и физики: Всероссийская научная конференция. – Тольятти, 2003. – С. 14–18.
10. Жохов, А. Л. Комплексный подход к построению личностно ориентированных концепций / А. Л. Жохов // Предметно-методическая подготовка будущего учителя математики, информатики и физики: Всероссийская научная конференция. – Тольятти, 2003. – С. 127–133.

11. Занков, Л. В. Обучение и развитие / Л. В. Занков. – М.: Просвещение, 1975. – 204 с.

12. Кедров Б. М. Интегральная функция философии в системе современного научного знания / Кедров Б. М. // Диалектика как основа научного знания. – М., 1984. – С.7.

13. Клековкин, Г. А. Предметное действие и образ в начальном геометрическом образовании / Г. А. Клековкин // Сборник статей Всероссийской научной конференции. – Тольятти, 2003. – С. 259–264.

14. Леонтьев, А. Н. Психологические вопросы сознательности учения / А. Н. Леонтьев. – М - Л.: АПН РСФСР, 1947. – 40 с.

15. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.

16. Менчинская, Н. А. Вопросы методики психологии обучения арифметике в начальных классах /А. Н. Менчинская, М. И. Моро – М.: Просвещение, 1965. – 224 с.

17. Ожегов, С. И. Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова – М.: ООО «ИТИ Технологии», 2008. – 944 с.

18. Пугачев, А. С. Комплексный подход к обучению и воспитанию учащихся с нарушением слуха / А. С. Пугачев // Молодой ученый. – 2012. - №9. – С. 301–303.

19. Руис, М. М. Дидактический аспект комплексного подхода к обучению математике в общеобразовательной школе / М. М. Руис // становление психологии и педагогики как междисциплинарных наук: Сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции (Магнитогорск, 08 ноября 2018 г.). - Стерлитамак: АМИ, 2018. - 172 с

20. Руис М. М. Актуальность комплексного подхода в вопросах формирования системности знаний учащихся по математике / М. М. Руис // становление психологии и педагогики как междисциплинарных наук: Сборник статей по итогам Международной научно-практической

конференции (Магнитогорск, 08 ноября 2018 г.). - Стерлитамак: АМИ, 2018. - 172 с

21. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике: методология и теория: учебное пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г. И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – с. 292.

22. Саранцев Г. И. Упражнения в обучении математике // Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.

23. Скаткин, М. Н. Проблемы современной дидактики / М. Н. Скаткин. – М.: Педагогика, 1980. – 96 с.

24. Скаткин, М. Н. Качество знаний учащихся и пути его совершенствования // Под. ред. М. Н. Скаткина, В. В. Краевского. – М. : Педагогика, 1978. - 208 с.

25. Сухомлинский, В. А. Избранные педагогические сочинения в 3-х томах / В. А. Сухомлинский. – М.: Педагогика, 1979 – 1981. – 560 с., – 384 с., - 640 с.

26. Фатьянова, Н. М. Технолого-инновационная готовность педагога / Н. М. Фатьянова // Проблемы современной дидактики: теория и практика: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (Белгород, 27 октября 2009 года); в 3 ч./ Отв. редакторы Л. М. Белогурова, Н. М. Фатьянова. – Белгород: Изд-во БелРИПКППС, 2010. – Ч.1. – 330 с. – С. 53-60.

27. Шаталов, В. Ф. Учить всех, учить каждого / В. Ф. Шаталов , Баженова И. Н. // Педагогический поиск. – М.: Педагогика, 1990. – С. 143–210.

28. Эльконин, Ф. Д. Психология игры / Ф. Д. Эльконин. – М.: Педагогика, 1978. – 300 с.