О СВЯЗИ НЕРАВЕНСТВ М. Г. КРЕЙНА И Е. А. ГОРИНА В ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Нам понадобится следующее элементарное тригонометрическое неравенство, ссылку на которое не удалось найти в литературе.

Теорема 1. *При любых действительных $x_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо неравенство*

$$\sin^2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant n \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin^2(x_k).$$

Это неравенство следует из аналогичного более простого

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\sin(x_k)|,$$

которое очевидным образом доказывается по индукции, а в книгах по неравенствам обычно приводится с ненужными ограничениями без модулей в правой части. Результат теоремы 1 получается отсюда применением неравенства Коши — Буняковского.

Следствие 1. *При любых действительных $x_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливы неравенства*

$$\sin^2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant n \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos^2(x_k), \quad n\text{— четное},$$

$$\cos^2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant n \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos^2(x_k), \quad n\text{— нечетное}.$$

Определения и основные свойства положительно определенных функций см., например, в [1–2]. Так, в работе Е. А. Горина [1] приведено двухточечное неравенство М. Г. Крейна, а также с помощью теоремы Бохнера выведено его многоточечное обобщение. Некоторые другие обобщения получены также в [2].

Интересно отметить, что приведенные элементарные неравенства, повидимому, не вытекают из свойств выпуклости-вогнутости тригонометрических функций.

Рассмотрим случай непрерывной положительно определенной функции $f(x)$ над действительным полем (см. [2]). В этом случае доказана следующая

Теорема 2. *Для указанной функции $f(x)$ и любых действительных чисел x_k, y_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо неравенство*

$$2\left(f(0) - f\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)\right)\right) \leqslant 2n \sum_{k=1}^{n}\left(f(0) - f(x_k - y_k)\right).$$

Целью получения оценки из теоремы 2 был прямой вывод неравенства Е. А. Горина из неравенства М. Г. Крейна (см. [1]). Теорема 2 также справедлива для вероятностных характеристических функций симметричных распределений, при этом $f(0) = 1$.

Следствие 2. *Многоточечное неравенство Е. А. Горина выводится из двухточечного неравенства М. Г. Крейна и неравенства теоремы* 2.

В [2] рассмотрены также приложения неравенств для положительно определенных функций к задачам интерполяции с использованием квадратичных экспонент — функций Гаусса [3–7]. Применение в процессе доказательства неравенства Коши–Буняковского позволяет использовать разработанный автором метод для обобщений этого неравенства [8–10] для дальнейшего усиления оценок.

Литература

1. *Горин Е. А.* Положительно определенные функции как инструмент математического анализа // Фундамент. и прикл. матемактика.—2012.—Т. 17, № 7.—С. 67–95.
2. *Певный А. Б., Ситник С. М.* Строго положительно определенные функции, неравенства М. Г. Крейна и Е. А. Горина // Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы восемнадцатого научно-практического семинара.—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2015.—С. 247–254.
3. *Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М.* О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Мат. заметки.—2014.—Т. 96, № 2.—С. 239–250.
4. *Тимашов А. С., Ситник С. М.* Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов // Новые информационные технологии в автоматизированных системах: Материалы семнадцатого научно-практического семинара.—М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2014.—С. 292–300.
5. *Тимашов А. С., Ситник С. М.* Расчет конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Се. Математика, Физика.—2013.—№ 19 (162), вып. 32.—С. 184–186.
6. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // J. of Math. Sci.: Springer, 2011.—Vol. 173, № 2.—P. 231–241.
7. *Журавлев М. В., Минин Л. А., Ситник С. М.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.—2009.—№ 13 (68), вып. 17/2.—С. 89–99.
8. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств // Исслед. по мат. анализу / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.—2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. форум. Том 3).
9. *Sitnik S. M.* Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey.—2010.—51 p.—(arXiv: 1012.3864).
10. *Ситник С. М.* Уточнение интегрального неравенства Коши — Буняковского // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физико-мат. науки.—2000.—Вып. 9.—С. 37–45.