СЧЕТЪ И ИЗМѢРЕНІЕ

Г. Фонъ-Гельмгольца.

ПОНЯТІЕ О ЧИСЛѢ

Л. Кронекера.

КАЗАНЬ
Типографія Императорскаго Университета
1893.

СЧЕТЪ И ИЗМѢРЕНІЕ.

Г. Фонъ-Гельмгольца.

ПОНЯТІЕ О ЧИСЛѢ.

Л. Кронекера.

КАЗАНЬ
Типографія Императорскаго Университета
1893.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ*.

ПРЕДИСЛОВІЕ ПЕРЕВОДЧИКА.

Въ рѣчи, произнесенной мною при открытіи Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ и напечатанной подъ заглавіемъ: „Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ числѣ“, я имѣлъ между прочимъ цѣлью обратить вниманіе на выдающійся по своему значенію для философіи и педагогіи математики мемуаръ Г. Гельмгольца: „Счетъ и измѣреніе“, помѣщенный имъ въ сборникѣ философскихъ статей, посвященныхъ извѣстному историку философіи Е. Целлеру по случаю его пятидесятилѣтняго докторскаго юбилея [1]).

Въ этомъ мемуарѣ знаменитый нѣмецкій ученый выясняетъ съ обычною ясностью психологическія основанія аксіомъ ариѳметики подобно тому, какъ въ раньше опубликованныхъ работахъ онъ высказалъ свои взгляды на опытное происхожденіе геометрическихъ аксіомъ и на значеніе геометріи, созданной нашимъ Н. И. Лобачевскимъ.

Высокое значеніе мемуара Гельмгольца привело меня къ мысли о его переводѣ на русскій языкъ; на изданіе этого перевода я получилъ благосклонное разрѣшеніе знаменитаго ученаго.

Къ переводу мемуара Гельмгольца я присоединяю переводъ другаго мемуара, посвященнаго тому-же понятію о числѣ и принадлежащаго моему незабвенному учителю Леопольду Кронекеру [2]). Къ простѣйшимъ примѣрамъ обобщенія понятія о цѣломъ положительномъ числѣ, къ введенію отрицательныхъ и дробныхъ чиселъ, знаменитый ариѳметикъ прилагаетъ тѣ идеи. которыя были положены имъ въ осно-

---

[1]) Philosophische Aufsätze Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet. Leipzig 1887.

[2]) Этотъ мемуаръ «Ueber den Zahlbegriff» помѣщенъ въ тѣхъ-же «Philosophische Aufsätze» и затѣмъ перепечатанъ съ добавленіемъ, относящимся къ вопросу объ изолированіи вещественныхъ несоизмѣримыхъ корней алгебраическихъ уравненій, въ: «Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 101.

ваніе его классическаго сочиненія: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen".

Мемуары Гельмгольца и Кронекера, особенно взятые вмѣстѣ, посвящены на столько важнымъ и интереснымъ вопросамъ, что я позволяю себѣ выразить надежду, что мой переводъ, сдѣлавши ихъ болѣе доступными для русскихъ педагоговъ, не останется безъ вліянія на нашу педагогическую литературу.

А. Васильевъ.

Казань 5 апр. 1893.

СЧЕТЪ И ИЗМѢРЕНІЕ.

Г. фонъ-ГЕЛЬМГОЛЬЦА.

Не смотря на то, что счетъ и измѣреніе составляютъ основанія наиболѣе плодотворныхъ, вѣрныхъ и точныхъ изъ всѣхъ извѣстныхъ намъ научныхъ методовъ, ихъ основныя истины сравнительно мало разработаны съ точки зрѣнія теоріи познанія. Строгіе послѣдователи Канта, придерживающіеся его системы въ томъ видѣ, какъ она исторически развилась изъ воззрѣній и знаній его времени, должны разсматривать съ философской точки зрѣнія аксіомы ариѳметики, какъ данныя a priori основныя положенія, опредѣляющія трансцедентальное воззрѣніе времени, подобно тому какъ аксіомы геометріи опредѣляютъ воззрѣніе пространства. Такое пониманіе аксіомъ въ обоихъ случаяхъ не могло не служить помѣхою дальнѣйшему обоснованію и выводу этихъ положеній.

Я старался показать въ моихъ предъидущихъ работахъ, что аксіомы геометріи не суть a priori данныя положенія, что онѣ напротивъ могутъ быть подтверждены и опровергнуты опытомъ. Этимъ не опровергается взглядъ Канта на пространство какъ на трансцедентальную форму воззрѣнія; устраняется только, какъ мнѣ кажется, отдѣльная недосказанная частность его мнѣнія, имѣвшая впрочемъ роковое значеніе для метафизическихъ стремленій его послѣдователей.

Защищаемая мною эмпирическая теорія, не признающая аксіомы геометріи за недопускающія доказательства и не нуждающіяся въ доказательствѣ положенія должна быть конечно подтверждена и на происхожденіи ариѳметическихъ аксіомъ, стоящихъ къ формѣ воззрѣнія времени въ отношеніи аналогичномъ отношенію между аксіомами геометріи и формою воззрѣнія пространства.

Ариѳметики до сихъ поръ выставляли аксіомами слѣдующія положенія:

Аксіома I. Если двѣ величины равны третьей, онѣ равны между собою.

Аксіома II. *Ассоціативный законъ сложенія*, по обозначенію Г. Грассманна:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Аксіома III. *Коммутативный законъ сложенія*:

$$a+b=b+a$$

Аксіома IV. Равное, приданное къ равному, даетъ равное.

Аксіома V. Равное, приданное къ неравному, даетъ неравное.

Далѣе чѣмъ прочіе ариѳметики, которыхъ работы мнѣ извѣстны, пошли въ изслѣдованіи объ аксіомахъ ариѳметики Германъ и Робертъ Грассманнъ, разсматривавшіе притомъ вопросъ съ философской точки зрѣнія; въ послѣдующемъ развитіи ариѳметическихъ положеній я буду поэтому придерживаться ихъ пути. Они сводятъ обѣ аксіомы II и III на одну, которую мы будемъ называть аксіомою Грассманна а именно:

$$(a+b)+1=a+(b+1);$$

изъ нея одной они выводятъ обѣ общія теоремы, доказывая ихъ по способу перехода отъ n къ $n+1$ Для ученія о сложеніи отвлеченныхъ чиселъ достигнуто такимъ образомъ, какъ я надѣюсь показать въ послѣдующемъ, правильное основаніе. Но въ вопросѣ объ объективномъ примѣненіи ариѳметики къ физическимъ величинамъ присоединяется къ двумъ понятіямъ о *величинѣ* и о *равновеликомъ*, смыслъ которыхъ въ области фактовъ остается неразъяснимымъ, еще третье понятіе объ *единицѣ*. Вмѣстѣ съ этимъ разсматриваніе a priori физическихъ величинъ составленными изъ единицъ кажется мнѣ излишнимъ ограниченіемъ области приложимости найденныхъ предложеній.

Между новѣйшими ариѳметиками по своимъ взглядамъ къ братьямъ Грассманнамъ существенно примыкаетъ Е. Шредеръ[2]); въ нѣкоторыхъ важныхъ вопросахъ онъ однако пошелъ еще дальше. Прежніе ариѳметики привыкли принимать за основное понятіе о числѣ понятіе о численности предметовъ и потому не могли вполнѣ освободиться отъ законовъ отношеній между этими предметами; они принимали поэтому за фактъ, что численность группы предметовъ независитъ отъ порядка, въ которомъ они пересчитываются. Г. Шредеръ первый, сколько мнѣ извѣстно, обратилъ вниманіе на проблему, связанную съ этимъ фактомъ; совершенно правильно онъ

---

[1]) Hermann Grassmann. Die Ausdehnungslehre I Aufl. Leipz 1844. Zweite 1878. Robert Grassmann. Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin 1872.

[2]) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipz. 1883.

призналъ здѣсь существованіе психологической задачи и указалъ на необходимость опредѣлить тѣ эмпирическія качества, которыя должны принадлежать предметамъ для того, чтобы они могли быть пересчитываемы.

Кромѣ того сюда-же относящіяся изслѣдованія относительно понятія о величинѣ находятся въ „allgemeine Functionentheorie" П. Дюбуа-Реймонда (Tübingen 1882. Th. I. Cap. I) и въ сочиненіи доктора Эльзаса: „Ueber die Psychophysik" (Marburg 1886. стр. 49 и сл.). Но обѣ книги занимаются спеціальными изслѣдованіями и не останавливаются на полномъ развитіи основаній ариѳметики. Оба писателя выводятъ понятіе о величинѣ изъ понятія о линіи, первый съ эмпирической точки зрѣнія, второй съ точки зрѣнія строгаго Кантіанства. Мои возраженія противъ послѣдней точки зрѣнія уже упомянуты выше и развиты въ моихъ прежнихъ работахъ. Г. Дюбуа-Реймондъ оканчиваетъ свои изслѣдованія парадоксальнымъ утвержденіемъ, что обѣ противоположныя точки зрѣнія, равноприводящія къ противорѣчіямъ, равновозможны.

Такъ-какъ послѣдній авторъ справедливо признается весьма остроумнымъ математикомъ, съ особеннымъ интересомъ углублявшимся въ основанія своей науки, то полученный имъ конечный результатъ побуждаетъ меня изложить мои собственныя мысли по поводу проблемы объ основаніяхъ ариѳметики.

Для первоначальной характеристики той точки зрѣнія, которая ведетъ къ простымъ послѣдовательнымъ выводамъ и къ разрѣшенію упомянутыхъ противорѣчій можетъ послужить слѣдующее: я разсматриваю ариѳметику или ученіе о отвлеченныхъ числахъ, какъ основанную на чисто психологическихъ фактахъ методу, которая учитъ послѣдовательному употребленію системы знаковъ (именно чиселъ), обладающей безграничною распространимостью и безграничной способности къ улучшенію. Ариѳметика изслѣдуетъ именно, при какихъ различныхъ способахъ соединенія этихъ знаковъ (операціяхъ счета) получается одинъ и тотъ-же конечный результатъ. Она учитъ между прочимъ замѣнять болѣе простыми вычисленіями вычисленія чрезвычайно запутанныя, въ томъ числѣ даже такія, которыя не могли бы быть кончены въ конечное время. Несмотря на важность производимаго такимъ образомъ испытанія внутренней послѣдовательности нашего мышленія подобное занятіе было-бы конечно только остроумною игрою надъ воображаемыми предметами (Поль Дюбуа-Реймондъ сравниваетъ его въ шутку съ задачею о движеніи коня на шахматной доскѣ), если-бы оно не допускало вмѣстѣ съ тѣмъ столь чрезвычайно полезныхъ приложеній. Дѣйствительно посредствомъ этой системы знаковъ т. е. чиселъ мы даемъ такія описанія отношеній вещественныхъ предметовъ, которыя въ случаѣ примѣнимости могутъ дать сколь угодно большую степень точности; посредствомъ этой системы знаковъ могутъ быть найдены въ очень большомъ числѣ случаевъ заранѣе вычисленіемъ численныя значенія, измѣряющія результатъ взаимодѣйствія тѣлъ природы, повинующихся извѣстнымъ законамъ.

При этомъ является вопросъ: какое объективное значеніе имѣетъ выраженіе отношеній вещественныхъ предметовъ какъ величинъ съ помощью именованныхъ чиселъ и при какихъ условіяхъ допустимо такое выраженіе? Вопросъ этотъ раздѣляется, какъ мы найдемъ, на два болѣе простые, именно:

1) Какое объективное значеніе имѣетъ то, что мы считаемъ два предмета въ извѣстномъ отношеніи *равными*.

2) Какой характеръ должна имѣть физическая связь двухъ объектовъ для того, чтобы мы могли считать сравнимые аттрибуты ихъ за *аддитивные* (допускающіе сложеніе) и сами эти аттрибуты поэтому за *величины*, которыя могутъ быть выражены именованными числами? Дѣйствительно именованныя числа мы разсматриваемъ какъ составленныя изъ ихъ частей (единицъ) посредствомъ сложенія.

Естественный рядъ чиселъ.

Счетъ есть операц;я, основывающаяся на томъ, что мы находимся въ состояніи удерживать въ памяти послѣдовательность, въ которой являлись во времени одинъ за другимъ акты нашего сознанія. Мы можемъ по этому разсматривать числа, какъ рядъ произвольно избранныхъ знаковъ, для которыхъ только одинъ опредѣленный видъ послѣдовательности считается нами естественнымъ или „натуральнымъ“. Обозначеніе „натуральнаго“ ряда чиселъ связано, правда, съ опредѣленнымъ приложеніемъ счета:именно съ опредѣленіемъ *численности* (Anzahl) данныхъ реальныхъ вещей. Прикидывая вещь одну за другою къ пересчитываемой кучѣ, мы произносимъ числа одно за другимъ въ ихъ естественномъ порядкѣ. При этомъ порядокъ числовыхъ знаковъ не имѣетъ никакого значенія; какъ слова для обозначенія чиселъ различны въ различныхъ языкахъ, такъ и послѣдовательность ихъ можетъ быть произвольно опредѣлена, но только съ тѣмъ, чтобы неизмѣнно какая нибудь опредѣленная послѣдовательность считалась нормальною или естественною. Эта послѣдовательность является дѣйствительно нормою или закономъ даннымъ нашими предками, выработавшими языкъ. Я оттѣняю это обстоятельство, такъ какъ кажущаяся „естественность“ ряда чиселъ происходитъ только отъ неполнаго анализа понятія о числѣ. Математики называютъ этотъ естественный рядъ чиселъ *рядомъ положительныхъ цѣлыхъ чиселъ.*

Рядъ чиселъ врѣзался въ нашу память прочнѣе всякаго другаго ряда, что происходитъ безъ сомнѣнія отъ его болѣе частаго повторенія. Мы употребляемъ его поэтому и для того чтобы укрѣпить въ нашей памяти воспоминаніе о другихъ послѣдовательностяхъ т. е. мы употребляемъ числа какъ *порядковыя числа.*

Однозначность послѣдовательности.

Въ ряду чиселъ ходъ впередъ и ходъ назадъ не суть одинаковые, но существенно различные процессы подобно послѣдовательности ощущеній во времени, между тѣмъ какъ въ линіяхъ, неподвергающихся измѣненію во времени, ни одно изъ двухъ противуположныхъ направленій движенія не отличается отъ другого.

Фактически каждый актъ, будетъ-ли это ощущеніе, чувство или воля, дѣйствуетъ въ нашемъ сознаніи вмѣстѣ съ воспоминаніями о прошедшихъ актахъ, но никогда не можетъ быть смѣшанъ съ будущими, которые еще не существовали въ сознаніи, и всякій настоящій актъ сознается нами, какъ специфически отличный отъ воспоминаній находящихся рядомъ съ нимъ. Черезъ это настоящее представленіе противополагается предъидущимъ, это отношеніе не можетъ быть измѣнено въ противное и ему необходимо подчиняется каждое представленіе входящее въ наше сознаніе. Въ этомъ смыслѣ включеніе въ послѣдовательность по времени есть неизбѣжная форма нашего внутренняго воззрѣнія.

Смыслъ обозначенія.

Вслѣдствіе предъидущихъ разъясненій каждое число можетъ быть опредѣлено исключительно своимъ положеніемъ въ нормальномъ ряду.

Значекъ *единица* приписываемъ мы тому члену послѣдовательности, съ котораго начинаемъ.

Два есть число, которое слѣдуетъ въ нормальномъ ряду за единицею непосредственно т. е. безъ вставки другаго числа.

Три есть число, которое также непосредственно слѣдуетъ за двумя и т. д.

Нѣтъ никакого основанія гдѣ-нибудь прервать этотъ рядъ или возвратиться къ ранѣе употребленному знаку. Десятичная система позволяетъ дѣйствительно просто и удобопонятно продолжать рядъ безпредѣльно, не повторяя ни одного численнаго символа и комбинируя между собою только десять различныхъ знаковъ [1]).

Числа, которыя слѣдуютъ за даннымъ числомъ въ нормальномъ ряду, будутъ называться *высшими*, чѣмъ это число; тѣ, которыя предшествуютъ ему, *низшими*. Такое опредѣленіе даетъ полное разчлененіе чиселъ, основанное на существѣ послѣдовательности во времени; оно можетъ быть формулировано въ видѣ слѣдующей аксіомы:

Аксіома VI. Если два числа различны, то одно изъ нихъ должно быть выше другаго.

Сложеніе отвлеченныхъ чиселъ.

Для постановки общихъ законовъ о числахъ, я нуждаюсь въ извѣстныхъ обозначеніяхъ буквеннаго исчисленія. Каждая буква латинскаго алфавита будетъ обозначать всякое произвольное число, но всегда одно и то-же въ одной теоремѣ или въ одномъ вычисленіи.

Объясненіе знакоположенія: если какое нибудь число обозначается буквою a, то слѣдующее за нимъ въ нормальномъ ряду будетъ обозначаться знакомъ $(a+1)$.

Этотъ знакъ $(a+1)$ такимъ образомъ не будетъ имѣть первоначально другаго значенія. Но вообще, какъ обыкновенно, скобки будутъ обозначать, что заключающіяся въ нихъ числа должны быть соединены въ одно число прежде чѣмъ будутъ производиться прочія указанныя операціи.

Знакъ равенства: $a=b$ долженъ въ числомъ ученіи о числахъ обозначать: „a есть то-же число, что и b“. Поэтому изъ $a=b$, $c=b$, слѣдуетъ непосредственно $a=c$, ибо оба вышеприведенныя уравненія обозначаютъ, что оба числа a и c тожественны съ b. Такимъ образомъ подтверждается примѣнимость аксіомы (I) для ряда цѣлыхъ чиселъ въ ученіи о числахъ.

Счетъ чиселъ.

Мы разсматриваемъ теперь нормальный рядъ чиселъ твердоустановленнымъ и даннымъ.

[1]) Въ «теоріи чиселъ» встрѣчаются ряды чиселъ, въ которыхъ послѣ извѣстнаго числа является опять единица такъ что числа періодически повторяются.

Мы можемъ члены его разсматривать, какъ данный въ нашемъ сознанiи рядъ представленiй, котораго порядокъ начиная съ произвольно выбраннаго члена мы можемъ снова обозначать нормальнымъ рядомъ чиселъ, начинающимся съ *единицы.*

Опредѣленiе. Числомъ $(a+b)$ обозначается то число главнаго ряда, которое получается при счетѣ до b, если при числѣ $(a+1)$ я считаю единицу, при числѣ $[(a+1)+1]$ — два и т. д

Описанiе этой операцiи можетъ быть представлено въ слѣдующемъ уравненiи (Грассмановская аксiома сложенiя).

$$(a+b)+1=a+(b+1)\ \ldots .(1)$$

Объясненiе: Это уравненiе говоритъ, что если я, считая $a+1$ за единицу, досчитаю до b, и при этомъ нахожу число обозначенное $a+b$, то считая еще дальше въ первомъ ряду прихожу къ $b+1$, во второмъ къ числу, слѣдующему за $a+b$, именно $[(a+b)+1]$ На этомъ основанiи я обозначаю упоминаемое въ опредѣленiи $[(a+1)+1]$ также $[a+(1+1)]$ или $(a+2)$, дальше $[(a+2)+1]$ черезъ $a+3$ и т. д. и т. д.

На языкѣ ариѳметики мы должны были-бы назвать эту операцiю *сложенiемъ* и число $(a+b)$ суммою a и b, числа a и b *слагаемыми*, но я обращаю вниманiе на то, что въ приведенной операцiи числа a и b играютъ неодинаковую роль; поэтому необходимо прежде показать, что они могутъ быть переставлены безъ измѣненiя суммы, что и будетъ сдѣлано дальше. Не упуская изъ виду этого замѣчанiя, мы можемъ, употребляя упомянутые термины, сказать, что формула $a+b$ указываетъ, что b должно быть прибавлено къ a и назвать $(a+b)$ суммою a и b, причемъ однако долженъ строго соблюдаться порядокъ между этими числами и b непремѣнно должно стоять послѣ a. Поэтому a можетъ быть названо первымъ слагаемымъ, b вторымъ. Соотвѣтственно этому въ каждомъ послѣдовательномъ употребленiи обозначенiй каждое число $(a+1)$ должно быть разсматриваемо какъ сумма предшествующаго a и единицы.

Указанный способъ производить сложенiе долженъ всегда дать результатъ, находящiйся въ нормальномъ числовомъ ряду и конечно одинъ и тотъ-же для однихъ и тѣхъ-же чиселъ a и b. Каждый изъ шаговъ, изъ которыхъ мы составляемъ сложенiе $a+b$, есть переходъ въ ряду положительныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ $(a+b)$ къ $(a+b)+1$ и отъ b къ $(b+1)$.

Каждый отдѣльный шагъ выполнимъ и каждый отдѣльный шагъ долженъ соотвѣтственно нашимъ предположеніямъ о неизмѣнности числоваго ряда въ нашемъ сознаніи дать одинъ и тотъ-же результатъ.

Такимъ образомъ несомнѣнно получится число, соотвѣтствующее числу $(a+b)$ и только одно. Эта теорема соотвѣтствуетъ содержанію аксіомы IV, если мы приложимъ ее къ отвлеченнымъ числамъ и къ указанному здѣсь способу сложенія.

Съ другой стороны изъ приведеннаго описанія операціи слѣдуетъ, что $(a+b)$ необходимо отличается отъ a и конечно выше, чѣмъ a, если b есть одно изъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ.

Если c есть высшее число чѣмъ a, я долженъ, отсчитывая отъ a вверхъ, несомнѣнно достигнуть до c и при этомъ долженъ сосчитать, какимъ числомъ по порядку, начиная отъ a, является c. Если оно есть b—тое, то

$$c=(a+b).$$

Мы будемъ это предложеніе для дальнѣйшихъ цитатъ обозначать:

Аксіома VII. *Если число c выше, чѣмъ другое число a, то я могу c представить какъ сумму a и нѣкотораго искомаго цѣлаго положительнаго числа b.*

Теорема I. О послѣдовательности выполненія многихъ дѣйствій сложенія. (Законъ ассоціативности по Грассманну).

Если мы къ суммѣ $(a+b)$ должны прибавить число c, то получимъ тотъ-же результатъ, который получается, если къ числу a прибавить число $(b+c)$.

Теорема эта въ видѣ уравненія напишется

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Доказательство:

Теорема имѣетъ мѣсто, какъ выражаетъ уравненіе I для $c=1$. Нужно показать, что, если она вѣрна для какого-нибудь c, то вѣрна и для слѣдующаго $c+1$.

По уравненію 1 имѣемъ:

$$[(a+b)+c]+1=(a+b)+(c+1)$$
$$[a+(b+c)]+1=a+[(b+c)+1]=a+[b+(c+1)].$$

Послѣднее равенство имѣетъ мѣсто на основаніи уравненія 1. Если теорема 2 имѣетъ мѣсто для значенія c, то выраженія стоящія въ лѣвыхъ частяхъ двухъ равенствъ суть одни и тѣ-же числа, и поэтому имѣемъ также

$$(a+b)+(c+1)=a+[b+(c+1)].$$

Т. е. теорема имѣетъ мѣсто и для $(c+1)$.

Такъ-какъ теорема, какъ раньше замѣчено, имѣетъ мѣсто для $c=1$, то она имѣетъ мѣсто и для $c=2$. Если она справедлива для $c=2$, то справедлива для $c=3$ и т. д. безпредѣльно.

Прибавленіе: Такъ-какъ оба выраженія, входящія въ уравненіе 2, имѣютъ одно и то-же значеніе, то мы можемъ для обоихъ ввести одно и то-же обозначеніе безъ скобокъ:

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c) \quad . \; . \; . \; 2_a.$$

Но въ этихъ выраженіяхъ мы не имѣемъ права перемѣнять послѣдовательность чиселъ a, b, c до тѣхъ поръ пока не докажемъ законность подобной перемѣны.

Обобщеніе закона ассоціативности.

Мы обобщаемъ сначала обозначеніе данное въ 2_a:

$$R=a+b+c+d+ \ldots k+l \quad . \; . \; . \; 2_b$$

должно обозначать сумму, въ которой отдѣльныя сложенія производятся въ томъ порядкѣ, въ которомъ они написаны.

Для краткости пусть

$$m+R=m+a+c+d+ \ldots +k+l,$$

между тѣмъ какъ

$$m+(R)=m+(a+b+c+d+ \ldots +k+l);$$

По смыслу обозначенія

$$(R)+m=R+m.$$

Другія большія латинскія обозначенія будутъ употребляться въ томъ-же смыслѣ какъ R.

Тогда имѣемъ

$R+b+c+S=[(R)+b+c]+S$, такъ какъ эти выраженія равнозначущи. Съ другой стороны по 2_a

$$(R)+b+c=(R)+(b+c).$$

Итакъ

$$R+b+c+S=[R+(b+c)]+S=R+(b+c)+S$$

т. е. вмѣсто того, чтобы складывать всѣ члены ряда одинъ за другимъ можно сначала соединить два среднихъ въ одну сумму.

Послѣ того какъ это произведено, только-что составленная сумма $(b+c)$ представлена однимъ числомъ, и можно подобнымъ же образомъ идти далѣе, соединяя каждую произвольную другую пару послѣдовательныхъ чиселъ и т. д.

Такимъ образомъ при произвольно большемъ числѣ членовъ послѣдовательность, въ которой производятся сложенія указанныя знаками $+$, можетъ быть измѣняема безъ измѣненія общей суммы.

Теорема II. (Законъ коммутативности по Г. Грассманну). Если въ суммѣ, состоящей изъ двухъ слагаемыхъ, одно изъ слагаемыхъ есть единица, то порядокъ можетъ быть измѣненъ.

Этому закону соотвѣтствуетъ уравненіе

$$1+a=a+1 \quad . \; . \; . \quad 3.$$

Доказательство. Уравненіе вѣрно для $a=1$. Снова нужно показать, что если оно вѣрно для какого нибудь опредѣленнаго значенія a, оно вѣрно для $a+1$.

Дѣйствительно по уравненію 1

$$(1+a)+1=1+(a+1).$$

По предложенію для a имѣетъ мѣсто уравненіе 3, слѣдовательно $(1+a)+1=(a+1)+1$.

Изъ этихъ двухъ уравненій слѣдуетъ:

$1+(a+1)=(a+1)+1$, что и требовалось доказать.

Такъ-какъ теорема вѣрна для $a=1$, то она вѣрна для $a=2$ и такъ-какъ она вѣрна для $a=2$, то вѣрна для $a=3$ и т. д. безпредѣльно.

Теорема III. *Въ каждой суммѣ, состоящей изъ двухъ слагаемыхъ, порядокъ слагаемыхъ можетъ быть измѣненъ безъ измѣненія числа, соотвѣтствующаго суммѣ.*

$$\text{Т. е. } a+b=b+a \quad . \; . \; . \quad 4.$$

Предложеніе по теоремѣ II справедливо для $b=1$.

Если оно справедливо для опредѣленнаго значенія b, то справедливо и для $(b+1)$. Ибо по теоремѣ I:

$(a+b)+1=a+(b+1)$; по нашему предположенію

$$(a+b)+1=(b+a)+1=1+(b+a)=(1+b)+a=(b+1)+a.$$

Послѣдніе три перехода сдѣланы посредствомъ уравненія 3, 2 и снова 3. Итакъ

$a+(b+1)=(b+1)+a$, что и требовалось доказать.

Изъ предложенія $a+1=1+a$ слѣдуетъ такимъ образомъ

$$a+2=2+a, \text{ отсюда}$$
$$a+3=3+a \text{ и т. д.}$$

Доказательство аксіомы V. Если a и f суть различныя числа, то мы можемъ, какъ было показано въ аксіомѣ VII, всегда опредѣлить положительное цѣлое число b такъ-что

$$(a+b)=f.$$
Тогда $c+f=c+(a+b)=(c+a)+b.$

Поэтому $(c+a)$ необходимо отлично отъ $(c+f)$ т. е.

Различныя числа, прибавленныя къ одному и тому-же числу, даютъ различныя суммы.

Но такъ какъ по теоремѣ III

$$c+f=f+c, \quad a+c=c+a,$$

то послѣднее слѣдствіе можетъ быть написано также:

$$(f+c)=(a+c)+b,$$

т. е. *одно и то-же число, приданное къ различнымъ числамъ, даетъ различныя суммы.*

Отсюда слѣдуетъ важная для теоріи вычитанія и уравненій теорема, что два числа, дающія при прибавленіи одного и того же числа къ каждому изъ нихъ одну и ту-же сумму, должны быть тожественны.

Измѣненіе порядка произвольно многихъ элементовъ.

При до сихъ поръ описанномъ способѣ отсчитыванія имѣлись два ряда чиселъ, которые въ нормальномъ ряду оставались на своихъ мѣстахъ, будучи такъ комбинирvемы по парно что $n+1$-ый былъ сопряженъ съ 1-ымъ, $n+2$-— съ 2-ымъ и т. д. Только начальные пункты двухъ послѣдовательностей въ ряду чиселъ были различны.

Мы можемъ теперь разсмотрѣть болѣе общій случай элементовъ двухъ рядовъ, изъ которыхъ одинъ долженъ сохранять опредѣленную послѣдовательность и поэтому можетъ быть представленъ знаками чиселъ, другой же имѣетъ перемѣнную послѣдовательность. Для послѣдняго мы будемъ употреблять, какъ знаки буквы, греческаго алфавита. Эти буквы имѣютъ опредѣленную послѣдовательность, запечатленную въ нашей памяти; мы будемъ разсматривать эту послѣдовательность какъ одну изъ множества другихъ столь-же возможныхъ, твердое знаніе которой намъ облегчаетъ разсужденія, хотя и оставляемъ за собою право произвольно ее видоизмѣнять.

Съ другой стороны мы требуемъ, чтобы при выполняемыхъ измѣненіяхъ послѣдовательности этихъ элементовъ ни одинъ не могъ быть выпущенъ и ни одинъ не могъ быть повторенъ. Для легчайшей провѣрки мы положимъ, что группа элементовъ должна содержать всѣ буквы, предшествующія въ общепринятомъ азбучномъ порядкѣ какой-нибудь изъ буквъ напр. $\varkappa$.

Перестановка двухъ послѣдовательныхъ элементовъ строки.

Если съ двумя послѣдовательными числами n и $n+1$ сопряжены два элемента напр. ε и ζ, то n можетъ быть комбинировано съ ε или ζ; получаются два вида комбинаціи

$$\begin{matrix} n & n+1 \\ \varepsilon & \zeta \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} n & n+1 \\ \zeta & \varepsilon. \end{matrix}$$

Если мы вмѣсто первой изъ этихъ двухъ комбинацій введемъ вторую, всѣ-же прочія сопряженныя пары изъ числа и буквы оставимъ безъ измѣненія, то ни одно число не потеряетъ сопряженной буквы, ни одна буква сопряженнаго числа, мы не потеряемъ ни одной буквы и не повторимъ ни одной. Если такимъ образомъ рядъ, содержавшій обѣ первыя вышеприведенныя пары, до перестановки составлялъ группу безъ пропусковъ и повтореній, то то-же свойство будетъ имѣть и рядъ, получившійся послѣ перестановки.

Подходящимъ повтореніемъ такихъ перестановокъ сосѣднихъ элементовъ группы можно каждый произвольно выбранный элементъ группы сослать первымъ въ ряду, не производя ни повтореній, ни пропусковъ. Дѣйствительно если выбранный элементъ ξ есть n-тый, то я могу его перемѣстить съ $n-1$, потомъ съ $n-2$—тымъ и т. д. такъ-что его мѣсто будетъ ниже и ниже, пока я не дойду до низшаго мѣста группы именно 1.

Подобнымъ-же образомъ каждый элементъ ряда, котораго мѣсто выше m-таго, можетъ быть сдѣланъ m-тымъ, не производя ни повтореній, ни пропусковъ. При этой послѣдней операціи тѣ члены ряда, мѣсто которыхъ ниже m-таго, не измѣняютъ своего мѣста.

Отсюда слѣдуетъ: *Повторяя перестановку сосѣднихъ членовъ группы, можно произвести всякую возможную послѣдовательность членовъ, не выпуская и не повторяя элементовъ.*

Дѣйствительно можно произвольно предписать, какой членъ долженъ быть первымъ членомъ ряда и достигнуть этого вышеуказаннымъ способомъ. Потомъ можно указать, какой членъ долженъ быть вторымъ и достигнуть этого. При этомъ элементъ, сдѣлавшійся первымъ, не выводится изъ своего положенія. Потомъ можно опредѣлить третій и т. д. до послѣдняго.

Теорема IV. Аттрибуты ряда элементовъ, неизмѣняющіеся, когда произвольные сосѣдніе элементы могутъ быть перемѣнены въ своемъ порядкѣ, не измѣняются ни при какомъ возможномъ измѣненіи порядка элементовъ.

Эта теорема приводитъ къ *обобщенію закона коммутативности сложенія.*

Большія буквы пусть обозначаютъ, какъ и при обобщеніи закона ассоціативности, суммы произвольно большаго числа чиселъ. Тогда по обобщенному закону ассоціативности

$$R+a+b+S=R+(a+b)+S.$$

По закону коммутативности для двухъ слагаемыхъ

$$a+b=b+a.$$

Такимъ образомъ въ виду того, что $(a+b)$ есть то-же число, что и $(b+a)$, мы имѣемъ:

$$R+a+b+S=R+(b+a)+S=R+b+a+S.$$

Послѣдній переходъ дѣлается на основаніи закона ассоціативности.

Такъ-какъ въ данной суммѣ могутъ быть такимъ образомъ перемѣщены два произвольные слѣдующіе одинъ за другимъ элементы, не измѣняя значеніе суммы, то на основаніи теоремы IV они всѣ могутъ быть перемѣщены между собою и помѣщены въ произвольной послѣдовательности безъ измѣненія величины суммы.

Такимъ образомъ пять основныхъ аксіомъ сложенія доказаны для положеннаго нами въ основаніе понятія о сложеніи и выведены изъ него.

Остается доказать, что это понятіе совпадаетъ съ тѣмъ, которое исходитъ изъ опредѣленія численности пересчитываемыхъ предметовъ.

Это приводитъ насъ прежде всего къ понятію о *численности* элементовъ группы. Если для того, чтобы каждому элементу группы соотвѣтствовало число понадобится полный числовой рядъ отъ 1 до n, то n называется *численностью* членовъ группы. Разсужденія, предшествующія теоремѣ IV, показываютъ, что *численность членовъ остается безъ измѣненія при измѣненіи порядка членовъ*, если невозможны пропуски и повторенія.

Эта теорема примѣнима къ вещественнымъ объектамъ, за временныя имена которыхъ можно считать α, β, γ и т. д Но эти объекты для того, чтобы они могли быть пересчитываемы, должны фактически удовлетворять извѣстнымъ условіямъ по-крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока будетъ имѣть значеніе результатъ произведеннаго счета. Они не должны пропадать, не должны сливаться съ другими предметами, къ нимъ не могутъ прибавиться новые и ни одинъ не можетъ раздѣлиться на два, такимъ образомъ каждому имени, данному въ формѣ греческой буквы, долженъ соотвѣтствовать постоянно одинъ и только одинъ ограниченный и порознь различаемый объектъ.

Выполняются-ли эти условія для опредѣленнаго класса объектовъ, можетъ быть естественно рѣшено только посредствомъ опыта [1]).

Изъ вышеописанной методы выводится тотчасъ, что *общее число членовъ двухъ группъ, не имѣющихъ общаго члена, на основаніи понятія о сложеніи равно суммѣ численностей членовъ обѣихъ отдѣльныхъ группъ* Чтобы найти общее число, необходимо прежде пересчитать одну группу. Если она имѣетъ p членовъ, то число $(p+1)$ придется на первый членъ второй группы, $p+2$ на второй и т. д. т. ч. общее число членовъ обѣихъ группъ найдется какъ разъ тою-же операцію пересчитыванія, которою дается ранѣе опредѣленная сумма двухъ чиселъ, представляющихъ численность элементовъ каждой группы порознь.

Выше данное понятіе о сложеніи совпадаетъ такимъ образомъ дѣйствительно съ понятіемъ о немъ, вытекающимъ

---

[1]) Во время печатанія я узналъ, что проф. Л. Кронекеръ подобнымъже образомъ развилъ понятія числа и численности въ своихъ лекціяхъ послѣдняго зимняго семестра.

изъ опредѣленія общей численности многихъ группъ пересчитываемыхъ предметовъ, но имѣетъ то преимущество, что получается безъ всякаго отношенія къ внѣшнему опыту.

Этимъ заканчивается доказательство ряда необходимыхъ для обоснованія ариѳметики аксіомъ сложенія въ томъ случаѣ, если понятія о числахъ и суммѣ выведены изъ внутренняго созерцанія; вмѣстѣ съ этимъ доказано совпаденіе результатовъ этого вида сложенія съ тѣмъ сложеніемъ, которое можетъ быть выведено изъ пересчитыванія внѣшнихъ предметовъ.

Теорія вычитанія и умноженія развивается отсюда безъ дальнѣйшихъ трудностей, если *разность* $(a-b)$ будетъ опредѣлена какъ то число, которое должно быть придано къ b для полученія въ суммѣ a и если умноженіе будетъ опредѣлено какъ сложеніе равныхъ чиселъ Я могу сослаться здѣсь на Г. Грассманна, который опредѣляетъ умноженіе отвлеченныхъ чиселъ двумя уравненіями: $1.a=a, (b+1).a=b.a+a$.

По отношенію къ вычитанію нужно только замѣтить, что числа, какъ знаки послѣдовательности, могутъ быть продолжаемы безпредѣльно и въ нисходящемъ порядкѣ, переходя отъ 1 назадъ къ 0, отъ 0 къ (—1), (—2) и т. д.; эти новые знаки могутъ быть разсматриваемы совершенно также какъ раньше исключительно введенныя положительныя цѣлыя числа. Тогда разность двухъ чиселъ имѣетъ всегда значеніе и притомъ единственное; она опредѣлена такимъ образомъ однозначно.

Остановимся на *совпаденіи и на различіи между законами сложенія и умноженія.*

Законы ассоціативности и коммутативности имѣютъ мѣсто для обѣихъ операцій.

Какъ мы видѣли:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$a+b=b+a.$$

Точно также:

$$(a.b).c=a.(b.c)$$
$$a.b=b.a.$$

Различіе между основными свойствами обѣихъ операцій проявляется, когда посредствомъ каждой изъ нихъ соединимъ число n равныхъ чиселъ a. Соединенныя сложеніемъ, эти числа даютъ произведеніе $n.a$, которое само подчинено закону коммутативности: $n.a=a.n$.

Перемноженіе n равныхъ множителей даетъ напротивъ степень a^n, въ которой a и n, за исключеніемъ особыхъ случаевъ, не могутъ быть перестановлены, не измѣняя значеніе степени.

Подобнымъ образомъ мы имѣемъ аналогію въ отношеніи каждой изъ двухъ операцій къ непосредственно слѣдующей:

$$(a+b).c=(a.c)+(b.c)$$
$$(a.b)^c=(a^c).(b^c).$$

Но эта аналогія отсутствуетъ при коммутаціи; ибо подобное отношеніе не существуетъ для $c.(a+b)$ съ одной стороны и c^{ab} съ другой.

Именованныя числа.

Въ выше разсмотрѣнномъ пересчитываніи неравныхъ предметовъ мы нуждаемся вообще только для опредѣленія ихъ полнаго числа.

Гораздо большее значеніе и обширнѣйшее примѣненіе имѣетъ пересчитываніе равныхъ объектовъ. Такіе пересчитываемые объекты, если они равны въ какомъ нибудь опредѣленномъ отношеніи, мы называемъ *единицами* пересчитыванія, число ихъ называемъ *именованнымъ* числомъ, особый родъ единицъ, къ которому они принадлежатъ—*именованіемъ* числа.

Численность, какъ мы выше видѣли, можетъ быть разложима на части, которыя соединяются въ цѣломъ *аддитивно*. Сумма двухъ именованныхъ чиселъ одинакого именованія есть общая численность всѣхъ ея единицъ и поэтому будетъ непремѣнно именованное число того же именованія. Когда намъ приходится сравнивать двѣ различныя группы различной численности, мы называемъ ту, которой соотвѣтствуетъ высшая численность, *большею*, группу низшей численности—*меньшею*. Если обѣ группы имѣютъ одну и ту-же численность, то мы называемъ ихъ *равными*.

Объекты или аттрибуты объектовъ, которые при сравненіи съ имъ подобными допускаютъ различіе большаго, равнаго или меньшаго, мы называемъ *величинами*.

Если мы можемъ ихъ выразить именованнымъ числомъ, то мы называемъ это число *численнымъ значеніемъ* (Werth) величины; пріемъ-же, посредствомъ котораго находится именованное число, называется *измѣреніемъ* величины. Впрочемъ во многихъ фактически выполненныхъ изслѣдованіяхъ намъ удается только свести измѣреніе на произвольно выбранныя или данныя употребляемымъ инструментомъ единицы; тогда числа, нами находимыя, имѣютъ значеніе только относительныхъ чиселъ (Verhältnisszahlen), пока эти единицы не сведены на общепринятыя (*абсолютныя единицы физики*). Эти общепринятыя единицы не могутъ быть опредѣлены по самому ихъ понятію, но могутъ быть только демонстрированы или на опредѣленныхъ тѣлахъ природы (вѣса или нормальные образцы длины) или на опредѣленныхъ явленіяхъ природы (день, качаніе маятника). То обстоятельство, что они искони извѣстны людямъ, не измѣняетъ сущности и понятія измѣренія и по отношенію къ нему является только случайнымъ.

Въ послѣдующемъ мы будемъ изслѣдовать, при какихъ обстоятельствахъ мы можемъ выражать числа съ помощью именованныхъ чиселъ т. е. находить ихъ значеніе и чего мы этимъ путемъ достигаемъ въ фактическомъ знаніи. Но для этого мы должны прежде всего разъяснить объективное значеніе понятій о равенствѣ и величинѣ.

Физическое равенство.

То особенное отношеніе, которое можетъ существовать между аттрибутами двухъ объектовъ и которое обозначено нами терминомъ „равенства", характеризуется вышеприведенною аксіомою I: *Если двѣ величины равны порознь третьей, то онѣ равны между собою.*

Отсюда вытекаетъ, что отношеніе равенства есть отношеніе взаимное. Ибо изъ $a = c$, $b = c$ вытекаетъ одинаково и $a = b$ и $b = a$.

Равенство между сравниваемыми аттрибутами двухъ объектовъ есть исключительный случай и поэтому при фактическомъ наблюденіи проявляется только тѣмъ, что два равные объекта, встрѣчаясь или дѣйствуя вмѣстѣ, при извѣстныхъ условіяхъ позволяютъ наблюдать такой результатъ, который вообще не встрѣчается между другими парами подобныхъ объектовъ.

Мы будемъ называть *методою сравненія* пріемъ, посредствомъ котораго мы ставимъ оба объекта въ условія необходимыя для того, чтобы быть въ состояніи наблюдать указанный результатъ и убѣдиться въ томъ, имѣетъ-ли онъ мѣсто или нѣтъ.

Если этотъ пріемъ сравненія въ состояніи дать точное заключеніе о равенствѣ или различіи опредѣленнаго аттрибута обоихъ объектовъ, то результатъ долженъ зависѣть исключительно и только отъ условія, что оба объекта имѣютъ соотвѣтствующій аттрибутъ въ извѣстной степени, предполагая, конечно, что пріемъ сравненія примѣненъ правильно.

Изъ выше приведенной аксіомы слѣдуетъ прежде всего, что *результатъ сравненія долженъ оставаться безъ измѣненія, если два объекта перестановляются между собою.*

Далѣе слѣдуетъ, что если оба предмета a и b оказываются равными, а раньше тѣмъ-же пріемомъ сравненія было найдено, что a равно третьему объекту c, то сравненіе b и c должно показать ихъ равенство.

Таковы требованія, которыя мы должны предъявить къ пріему сравненія. *Только такіе пріемы способны указать равенство, которые выполняютъ выставленныя требованія.*

Что равныя величины могутъ быть поставлены одна вмѣсто другой, вытекаетъ изъ этихъ предположеній прежде всего для того результата, на наблюденіи котораго мы основываемъ утвержденіе равенства.

Но съ равенствомъ въ разсмотрѣнномъ случаѣ можетъ совпадать по законамъ природы равенство и иныхъ дѣйствій или отношеній соотвѣтствующихъ объектовъ такъ что и въ этихъ послѣднихъ отношеніяхъ соотвѣтствующіе объекты могутъ быть поставлены одинъ вмѣсто другаго. Мы выражаемъ это обыкновенно тѣмъ, что объективируемъ способность предметовъ производить результатъ рѣшительный при первомъ способѣ сравненія, какъ особенный аттрибутъ и приписываемъ предметамъ, которые оказались равными, равную величину этого аттрибута, причемъ иныя дѣйствія, въ которыхъ продолжаетъ проявляться равенство, считаются дѣйствіями этого аттрибута или зависящими только отъ него. Смыслъ этого утвержденія заключается въ томъ, что объекты, оказывающіеся равными при томъ способѣ сравненія, который рѣшаетъ вопросъ о равенствѣ этого особеннаго аттрибута, могутъ безъ измѣненія результата замѣщать взаимно другъ друга и въ иныхъ случаяхъ.

Величины, равенство или неравенство которыхъ опредѣляется однимъ методомъ сравненія, называются *„однородными“*. Отвлекая аттрибутъ, котораго равенство или неравенство при этомъ опредѣляется, отъ всего иного, различающагося въ предметахъ, мы оставляемъ для соотвѣтствующихъ аттрибутовъ различныхъ объектовъ только различіе по величинѣ [1]).

---

[1]) Опредѣленіе равенства, данное Г. Грассманномъ: «равно все то, объ чемъ всегда можно сказать одно и тоже или общѣе, что въ каждомъ сужденіи можетъ быть взаимно подстановлено» потребовало-бы, чтобы въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, гдѣ приходится умозаключать о равенствѣ, выставлялось это общее требованіе, ведущее къ недоразумѣнію.

Позволяю себѣ разъяснить смыслъ этихъ абстрактныхъ предложеній на нѣсколькихъ извѣстныхъ примѣрахъ.

Вѣса. Если мы положимъ два произвольныхъ тѣла на двѣ чашки вѣрныхъ вѣсовъ, то вѣсы вообще не будутъ въ равновѣсіи и одна изъ чашекъ опустится. Но въ видѣ исключенія найдутся пары тѣлъ a и b, которыя, будучи помѣщены на вѣсы, не нарушаютъ равновѣсія.

Если мы переложимъ a и b, то вѣсы должны находиться въ равновѣсіи. Въ этомъ заключается извѣстная проба вѣрности вѣсовъ т. е. провѣрка того, указываетъ ли равновѣсіе на этихъ вѣсахъ равенство гирь.

Наконецъ провѣряется, что, если вѣсъ a равенъ не только вѣсу b, но и вѣсу c, то $b = c$. Равновѣсіе на вѣрныхъ вѣсахъ даетъ такимъ образомъ дѣйствительно методу опредѣлить равенство.

Тѣла, которыхъ вѣса мы сравниваемъ, могутъ впрочемъ состоять изъ самыхъ разнообразныхъ веществъ и имѣть разнообразную форму и объемъ. Сравниваемый нами вѣсъ тѣлъ есть только отдѣленный отвлеченіемъ аттрибутъ тѣлъ. Замѣнять въ разсужденіи тѣла вѣсами и обозначать вѣса величинами возможно только, отвлекаясь отъ всѣхъ другихъ свойствъ этихъ тѣлъ. Это имѣетъ практическое значеніе, пока мы наблюдаемъ или производимъ явленія, при которыхъ разсматривается только одинъ этотъ аттрибутъ тѣлъ т. е. при которыхъ могутъ быть взаимно замѣняемы тѣ тѣла, которыя на вѣсахъ находятся въ равновѣсіи. Это имѣетъ между прочимъ мѣсто, когда мы измѣряемъ инертность тѣлъ.

Но то обстоятельство, что тѣла равнаго вѣса имѣютъ одинаковую инертность и могутъ въ этомъ послѣднемъ отношеніи замѣнять другъ друга, вытекаетъ не изъ понятія о равенствѣ, но изъ нашего знанія этого особеннаго закона природы для этого особеннаго отношенія.

Разстоянія двухъ точекъ. Простѣйшій геометрическій элементъ, доступный опредѣленію по величинѣ, есть разстояніе между парою точекъ. Но для того, чтобы это разстояніе покрайней мѣрѣ на время сравненія имѣло опредѣленное значеніе, точки должны имѣть твердое соединеніе какъ напр. два острія циркуля. Извѣстный пріемъ сравненія разстояній двухъ точекъ состоитъ въ томъ, что мы опредѣляемъ, могутъ-ли они быть приведены къ совпаденію или нѣтъ. Опытъ удостовѣряетъ, что эта метода приспособлена къ опредѣленію равенства, что перемѣщеніе двухъ паръ точекъ произвольнымъ способомъ не вліяетъ на совпаденіе, что двѣ пары точекъ, совпадающія съ третьею, совпадаютъ и между собою. Такъ получается понятіе о равныхъ разстояніяхъ.

Отсюда можно перейти къ понятію *о прямой линіи* и ея длинѣ. Вообразимъ двѣ неподвижныя точки, черезъ которыя должна проходить линія. *Прямая линія* есть такая линія, въ которой ни одна точка не можетъ перемѣнить своего положенія, не измѣняя по крайней мѣрѣ одного изъ разстояній отъ неподвижныхъ точекъ. *Кривую линію* напротивъ мы можемъ вращать около двухъ ея точекъ, причемъ мѣняется положеніе прочихъ точекъ, но не разстояніе ихъ отъ двухъ неподвижныхъ. *Длины* двухъ ограниченныхъ прямыхъ линій мы считаемъ равными, если ихъ конечныя точки имѣютъ одинаковое разстояніе т. е. могутъ быть приведены въ совпаденіе, причемъ и самыя линіи совпадаютъ. Понятіе о длинѣ даетъ такимъ образомъ нѣчто большее, чѣмъ понятіе о разстояніи. Если мы предположимъ двѣ пары точекъ различнаго разстоянія a, b и a, c, совпадающими въ a и помѣщенными на прямой линіи такъ, что отрѣзокъ этой линіи принадлежитъ обѣимъ линіямъ заразъ, то или b падаетъ па линію ac или c на ab. Это даетъ противоположность, соотвѣтствующую противоположности между большимъ и меньшимъ; между тѣмъ какъ понятіе о разстояніи непосредственно указываетъ только на равенство или неравенство.

Измѣреніе времени предполагаетъ, что найдены физическія явленія, которыя, повторяясь неизмѣнно однимъ образомъ и при одинаковыхъ условіяхъ, кончаются одновременно, если они начались въ одинъ и тотъ-же моментъ какъ напр. дни, качанія маятниковъ, опоражниваніе песочныхъ и водяныхъ часовъ. Право на предположеніе неизмѣнной продолжительности при повтореніи дается тѣмъ обстоятельствомъ, что всѣ различные методы измѣренія времени, если они тщательно произведены, даютъ всегда совпадающіе результаты. Если два такихъ явленія a и b равновременно начинаются и равновременно оканчиваются, то онѣ происходятъ не только въ равное, но и въ одно и то же время. По отношенію къ времени между ними нѣтъ никакого различія и поэтому нѣтъ возможности перемѣны порядка. И если третье явленіе c, одновременно съ a начинающееся, кончается въ то-же самое время, то оно происходитъ одновременно съ b, если послѣднее происходитъ одновременно съ a.

Мы сравниваемъ *яркости* двухъ видимыхъ освѣщенныхъ поверхностей, приставляя одну къ другой и наблюдая, замѣчается ли какая нибудь граница, раздѣляющая яркости. Мы сравниваемъ *высоты тоновъ*, если дѣло идетъ о маленькихъ различіяхъ, съ помощью феномена біеній, которыя должны отсутствовать, если высоты одинаковы. Мы сравниваемъ *напряженія электрическихъ токовъ* дифференціальнымъ гальванометромъ, который долженъ оставаться въ покоѣ, если напряженія равны.

Такимъ образомъ для констатированія равенства должны быть въ различныхъ случаяхъ изобрѣтаемы самые различные физическіе пріемы; но всѣ эти пріемы должны удовлетворять выше поставленнымъ требованіямъ, для того чтобы они могли доказать равенство.

Первая аксіома: „если двѣ величины равны третьей, то онѣ равны между собою", есть такимъ образомъ не законъ, имѣющій объективное значеніе; она опредѣляетъ только, какія физическія отношенія мы можемъ принимать за равенство.

Для того чтобы привести примѣръ, въ которомъ законъ о равенствѣ съ третьею величиною лежитъ въ основаніи механической операціи, я напомню полировку плоскихъ стеклянныхъ поверхностей. Если двѣ такія стеклянныя поверхности полируются при вращеніи одной объ другую, то обѣ могутъ выйти шарообразными, одна выпуклою, другая вогнутою. Но если три пластинки будутъ поперемѣнно отполировываемы одна о другую, то всѣ три должны оказаться въ концѣ концовъ плоскими. Подобнымъ же образомъ ребра правильныхъ металлическихъ линеекъ дѣлаются прямыми оттачиваніемъ трехъ между собою.

Объ аддитивномъ физическомъ сочетаніи однородныхъ величинъ [1]).

Сравненіе величинъ, насколько оно до сихъ поръ разсмотрѣно, даетъ намъ рѣшеніе вопроса о равенствѣ или неравенствѣ ихъ, но не даетъ еще мѣры для величины ихъ различія въ случаѣ, если они различны Но если соотвѣтствующія величины должны быть вполнѣ опредѣлены съ помощью именованныхъ чиселъ, то большее изъ обоихъ чиселъ должно быть представляемо, какъ сумма меньшаго и разности. Является такимъ образомъ необходимымъ изслѣдовать, при какихъ условіяхъ мы можемъ выразить физическое сочетаніе однородныхъ величинъ какъ сложеніе.

Способъ сочетанія, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, зависитъ вообще отъ рода величинъ, которыя должны быть соединяемы.

---

[1]). «Сочетаніе» (Verknüpfung) есть терминъ Грассмана; но въ то время какъ у него онъ употребляется преимущественно субъективно, здѣсь онъ употребляется объективно.

Мы складываемъ напр. вѣса, кладя ихъ на одну и туже чашку вѣсовъ. Мы складываемъ періоды времени, если второй начинается какъ разъ въ то мгновеніе, когда кончается первый; мы сравниваемъ длины, помѣщая ихъ опредѣленнымъ образомъ напр. по прямой линіи и т. д.

1. *Однородность суммы и слагаемыхъ.* Такъ какъ разсматриваемое сочетаніе должно касаться *величинъ одного опредѣленнаго рода*, то результатъ не долженъ мѣняться, если я буду замѣнять одну или многія изъ этихъ величинъ равновеликими однородными величинами, такъ какъ такія величины представляются однимъ и тѣмъ-же числомъ съ тѣмъ-же именованіемъ. Но результатъ сочетанія долженъ быть, если онъ представляетъ сумму сочетаемыхъ величинъ, однороденъ съ своими частями, такъ какъ сумма двухъ именованныхъ чиселъ есть снова число того - же именованія, какъ уже выше замѣчено. Такимъ образомъ тотъ-же самый пріемъ, съ помощью котораго устанавливается равенство взаимно-замѣняемыхъ частей, долженъ рѣшать и вопросъ о неизмѣнности результата сочетанія при этой замѣнѣ.

Таковъ фактическій смыслъ требованія, что сумма однородныхъ величинъ должна быть однородна съ слагаемыми.

Такъ напр. я могу въ суммѣ гирь замѣнить отдѣльныя гири другими изъ другого матеріала, но равнаго вѣса. Сумма сохраняетъ тогда равный вѣсъ; но ея прочіе физическіе аттрибуты могутъ мѣняться.

2. *Законъ коммутативности.* Результатъ сложенія независитъ отъ послѣдовательности, въ которой сочетаются слагаемыя. Это должно примѣняться и къ тѣмъ физическимъ сочетаніямъ, которыя должны быть разсматриваемы какъ сложенія.

3. *Законъ ассоціативности.* Соединеніе двухъ однородныхъ величинъ можетъ произойти и физически, если вмѣсто ихъ обѣихъ поставлена нераздѣлимая величина того-же рода, равная ихъ суммѣ. Черезъ это эти двѣ величины соединяются аддитивно. Такъ напр. при взвѣшиваніи гиря въ пять граммовъ вѣса можетъ быть положена вмѣсто пяти гирь, вѣсящихъ по грамму.

Результатъ сочетанія не можетъ быть поэтому измѣненъ тѣмъ, что я вмѣсто нѣкоторыхъ сочетаемыхъ величинъ ввожу другія, равныя ихъ суммѣ.

Впрочемъ можно показать, что если оба первыя требованія выполнены вообще, то и третье будетъ выполнено.

Вообразимъ себѣ элементы помѣщенными одинъ за другимъ въ той послѣдовательности, въ которой они въ первомъ случаѣ сочетаются другъ съ другомъ, такъ что каждый присоединяется къ результату сочетанія ему предшествующихъ, также какъ мы это выше предписали для сложенія $[a+b+c..]$. Если теперь въ другомъ случаѣ требуется сочетать какія нибудь двѣ изъ этихъ величинъ, прежде другихъ, то мы можемъ на основаніи закона коммутативности, который, по предположенію, долженъ имѣть мѣсто, поставить ихъ на первое и второе мѣсто и соединить, не измѣняя результата. Тогда мы можемъ на основаніи перваго изъ нашихъ выше данныхъ условій замѣнить результатъ этого сочетанія другимъ нераздѣлимымъ объектомъ, который, разсматриваемый какъ величина того же вида, равенъ по величинѣ съ нимъ.

Послѣ этого мы можемъ снова обѣ новыя соединяемыя величины или суммы величинъ помѣстить на первыя два мѣста и т. д. пока всѣ не соединены въ указанномъ порядкѣ. Ни при одной изъ этихъ операцій мы не мѣняемъ конечнаго результата. *Физическій способъ сочетанія величинъ одного и того-же рода можетъ быть поэтому разсматриваемъ, какъ сложеніе въ томъ случаѣ, если результатъ сочетанія, разсматриваемый какъ величина того же рода, не измѣняется ни черезъ перестановку отдѣльныхъ элементовъ, ни черезъ замѣну членовъ сочетанія равными величинами того-же рода.*

Послѣ того какъ мы нашли только что описаннымъ путемъ методъ сочетанія соотвѣтствующихъ величинъ, обнаруживается вмѣстѣ съ тѣмъ, какія изъ нихъ больше, какія меньше. Результатъ аддитивнаго сочетанія, цѣлое, больше чѣмъ части, изъ которыхъ оно составлено. При простѣйшихъ величинахъ, временахъ, длинахъ, вѣсахъ, мы никогда не сомнѣвались въ опредѣленіи бо́льшаго или меньшаго именно потому, что мы съ дѣтства знали аддитивные пріемы ихъ сочетанія.

Нужно обратить при этомъ вниманіе на то, что метода сравненія, какъ мы ее выше описали, указываетъ намъ вообще только равенство или неравенство величинъ. Если двѣ величины равны между собою, то равны и всѣ одинаковымъ способомъ составленныя вычисленіемъ функціи ихъ. Но изъ этихъ функцій однѣ будутъ увеличиваться, другія будутъ уменьшаться при возрастаніи x. Какія изъ этихъ функцій допускаютъ аддитивное физическое соединеніе, можетъ быть рѣшено только особеннымъ опытомъ. Поучительны тѣ случаи, когда возможны два рода аддитивнаго сочетанія. Такъ мы опредѣляемъ точно съ помощью одной и той же методы сравненія, имѣютъ-ли двѣ проволоки одинаковое гальваническое сопротивленіе w и соотвѣтственно равную электропроводимость λ, такъ какъ $w = \frac{1}{\lambda}$. Но сопротивленія складываются, когда проволоки соединяются одна за другою такъ, что проводимое электричество должно протекать одну за другимъ эти проволоки. Проводимость напротивъ складывается, если мы будемъ помѣщать проволоки одну подлѣ другой такъ, чтобы ихъ начальныя точки были соединены между собою, ихъ конечныя между собою. Мы объективируемъ, какъ физическія величины, двѣ различныя функціи одной и той же перемѣнной. Если проволока имѣетъ бо́льшее сопротивленіе, то за то она имѣетъ меньшую проводимость и обратно. Вопросъ что больше, что меньше, рѣшается для сопротивленія и проводимости въ взаимно противоположномъ смыслѣ. Также точно и электрическіе конденсаторы (Лейденскія банки) могутъ быть соединены или параллельно или послѣдовательно. Въ первомъ случаѣ складывается ихъ емкость, во второмъ случаѣ напряженіе (потенціалъ) при ровномъ зарядѣ. Емкость возрастаетъ, когда потенціалъ убываетъ.

Снова мы не должны удивляться тому, что аксіомы сложенія оправдываются въ естественномъ ходѣ вещей, такъ какъ мы признаемъ за сложеніе только такія физическія сочетанія, которыя выполняютъ аксіомы сложенія.

Дѣлимость величинъ и единицъ.

До сихъ поръ мы не разлагали величинъ на единицы. Понятіе о величинѣ, какъ и понятіе о равенствѣ и сложеніи, могло быть пріобрѣтено безъ такого разложенія. Но наивысшее упрощеніе представленія величинъ мы получаемъ дѣйствительно только тогда, когда разрѣшаемъ ихъ на единицы и выражаемъ, какъ именованныя числа.

Величины, которыя могутъ быть складываемы, могутъ быть вообще и раздробляемы. Если каждая изъ встрѣчающихся при этомъ величинъ можетъ быть разсматриваема, какъ сложенная аддитивно по имѣющему мѣсто для величинъ этого рода способу сложенія изъ извѣстнаго числа равныхъ частей, то каждая изъ нихъ можетъ на основаніи ассоціативнаго закона сложенія быть замѣненною суммою частей вездѣ, гдѣ имѣетъ рѣшающее значеніе только численное значеніе этой величины. Тогда она замѣняется именованнымъ числомъ, другія величины того-же рода замѣняются другими численностями тѣхъ-же частей. Описаніе отдѣльныхъ величинъ одинаковаго рода можетъ быть тогда передано лицу, знающему, какія равныя части выбраны за единицы, съ помощью одного указанія чиселъ.

Если встрѣчающіяся величины не могутъ быть выражены безъ остатка съ помощью выбранныхъ единицъ, то единица снова раздѣляется и такимъ путемъ опредѣленіе значенія каждой изъ встрѣчающихся величинъ можетъ идти до произвольной точности. Полная точность можетъ быть достигнута во всякомъ случаѣ только для раціональныхъ отношеній.

Ирраціональныя отношенія могутъ встрѣчаться въ вещественныхъ объектахъ, въ числахъ они не могутъ никогда быть точно представлены; за то ихъ численное значеніе можетъ быть включено въ произвольно тѣсныя границы. Это съуженіе предѣловъ достаточно для всѣхъ вычисленій такихъ функцій, значенія которыхъ при уменьшающихся измѣненіяхъ величинъ, отъ которыхъ онѣ зависятъ, также получаютъ все меньшія и меньшія измѣненія, которыя могутъ сдѣлаться менѣе сколь угодно малой величины. Именно это и имѣетъ мѣсто при вычисленіи всѣхъ допускающихъ дифференцированіе функцій ирраціональныхъ величинъ. Напротивъ могутъ быть составлены прерывныя функціи, для вычисленія которыхъ не достаточно знанія тѣхъ произвольно съуженныхъ предѣловъ, между которыми лежитъ ирраціональное значеніе. Для нихъ недостаточно представленія ирраціональныхъ величинъ системою нашихъ чиселъ. Впрочемъ въ геометріи и физикѣ мы не встрѣчаемся съ такими видами прерывности.

Опредѣленіе численныхъ значеній свойствъ (физическія постоянныя, коэффиціенты).

Кромѣ до сихъ поръ упоминавшихся величинъ, которыя признаются легко за величины, такъ какъ онѣ допускаютъ аддитивное сочетаніе, существуетъ еще цѣлый рядъ другихъ отношеній, также выражаемыхъ именованными или неименованными числами, для которыхъ неизвѣстно еще аддитивное соединеніе съ однородными имъ. Они являются всякій разъ, когда обнаруживается связь между аддитивными величинами при явленіяхъ, которыя зависятъ отъ особенностей опредѣленнаго вещества или опредѣленнаго тѣла.

Такъ напр. законъ преломленія свѣта показываетъ, что между синусомъ угла паденія и угла преломленія свѣтоваго луча опредѣленной длины волны, входящаго изъ пустоты въ данное прозрачное вещество, существуетъ опредѣленное отношеніе. Число, выражающее это отношеніе, различно для различныхъ прозрачныхъ веществъ и такимъ образомъ обозначаетъ извѣстное ихъ свойство, преломляющую способность. Удѣльный вѣсъ, теплопроводность, электропроводность, теплоемкость и т. д. суть подобныя же величины. Сюда же примыкаютъ тѣ значенія (постоянныя интегрированія уравненій динамики), которыя остаются безъ измѣненія втеченіе разъ начавшагося движенія ограниченной системы тѣлъ.

Физикѣ мало по малу удалось свести всѣ эти величины на единицы, которыя могутъ быть составлены изъ трехъ основныхъ единицъ мѣры: времени, длины и массы съ помощью умноженія, возвышенія въ степень и обратныхъ операцій.

Различіе между этими значеніями и аддитивными величинами не строго соблюдается на языкѣ физиковъ и математиковъ. И первыя часто называются величинами, такъ какъ могутъ быть выражены именованными числами; терминъ *коэффиціентъ* обозначаетъ сравнительно лучше ихъ физическую природу. Но различіе не существенно; ибо новыя открытія могутъ привести къ аддитивнымъ соединеніямъ такихъ коэффиціентовъ, вслѣдствіе чего они вступаютъ въ рядъ непосредственно опредѣляемыхъ величинъ. До нѣкоторой степени названное отличіе соотвѣтствуетъ тому различію между экстензивными и интензивными величинами, которое указали еще старые метафизики. P. du Bois-Reymond называетъ первыя *линейными* величинами, вторыя *не линейными*.

Съ другой стороны изъ предыдущаго вытекаетъ, что прежде чѣмъ опредѣлять коэффиціенты, необходимо образовать аддитивныя величины. Ибо уравненіе, выражающее законъ природы, можетъ только тогда дать опредѣленіе значенія коэффиціента, когда всѣ другія въ это уравненіе входящія величины уже опредѣлены какъ величины. Опредѣленіе аддитивныхъ величинъ должно такимъ образомъ всегда предшествовать нахожденію значеній величинъ не аддитивныхъ.

Сложеніе неоднородныхъ величинъ.

Въ физикѣ большую роль играютъ такіе объекты, которые при различныхъ методахъ сравненія представляютъ одновременно двѣ, три или большее число разнородныхъ величинъ, которыя всѣ порознь складываются при физическомъ сочетаніи объектовъ.

Сюда относится прежде всего очень большое число величинъ, имѣющихъ направленіе въ пространствѣ и встрѣчающихся въ физикѣ т. е. величины, имѣющія опредѣленное значеніе и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣленное направленіе и которыя можно представить составленными изъ нѣсколькихъ слагающихъ опредѣленнаго направленія (двѣ на плоскости, три въ пространствѣ). Проще всего изучаются отношенія между этими величинами, если составляющія, соединяющіяся въ равнодѣйствующую по закону параллелограмма, параллельны тремъ координатнымъ осямъ.

Къ этому классу относятся перемѣщенія точки въ пространствѣ, ея скорость, ускореніе, сила двигающая точку, далѣе скорости вращенія и безконечно малыя вращенія, скорости теченія тяжелыхъ жидкостей, электричества и теплоты, магнитные моменты и т. д.

При аддитивныхъ соединеніяхъ суммируются сначала одинаково направленныя составляющія; эти суммы могутъ быть затѣмъ замѣнены одною равнодѣйствующею. Всѣ физическія сочетанія такихъ величинъ, результатъ которыхъ зависитъ только отъ величины и направленія конечной равнодѣйствующей, могутъ быть разсматриваемы, какъ основывающіяся на такихъ аддитивныхъ сочетаніяхъ; это установлено для двухъ измѣреній Гауссомъ въ геометрическомъ представленіи комплексныхъ величинъ, для многихъ измѣреній Грассманномъ въ видѣ сложенія геометрическихъ отрѣзковъ и Гамильтономъ въ ученіи о кватерніонахъ. При этомъ долженъ выполняться законъ коммутативности; такъ мы можемъ сложить безконечно малыя вращенія твердаго тѣла около двухъ различныхъ осей въ одно равнодѣйствующее вращеніе; подобнымъ-же образомъ слагаются скорости вращенія, но не могутъ слагаться конечныя вращенія, такъ какъ въ этомъ случаѣ уже не безразлично, происходитъ-ли вращеніе сначала около оси a и потомъ около оси b или наоборотъ.

Подобное-же отношеніе представляется и въ смѣшеніи цвѣтнаго свѣта. Каждое количество цвѣтнаго свѣта можетъ быть по отношенію къ чувственному впечатлѣнію представлено какъ соединеніе трехъ свѣтовыхъ количествъ (Lichtquanta) извѣстнымъ образомъ выбранныхъ основныхъ цвѣтовъ. Соединеніе многихъ цвѣтовъ дѣйствуетъ тогда на глазъ такъ, какъ дѣйствовали бы въ смѣшеніи три свѣтовыя количества трехъ основныхъ цвѣтовъ, получающіяся для каждаго основнаго цвѣта отъ сложенія соотвѣтствующихъ количествъ, входящихъ въ отдѣльные смѣшиваемые цвѣта. На этомъ основывается возможность геометрическаго представленія законовъ смѣшенія цвѣтовъ съ помощью построеній центровъ тяжести, какъ это было въ первый разъ предложено Ньютономъ.

Умноженіе именованныхъ чиселъ.

Именованное число $(a.x)$, гдѣ x обозначаетъ родъ единицъ, a ихъ число, можетъ быть умножено на отвлеченное число n. Это умноженіе подходитъ подъ выше данное опредѣленіе произведенія, какъ суммы n равныхъ слагаемыхъ a. Такъ какъ сумма однородныхъ слагаемыхъ есть однородная съ ними величина, то и произведеніе $(n.a)$ есть величина того-же именованія, какъ само a.

Законъ коммутативности примѣняется къ этому произведенію по скольку

$$n.(a.x) = a.(n.x)$$

т. е. поскольку можно a разсматривать какъ число и составить новыя именованныя слагаемыя $(n.x)$.

Подобнымъ-же образомъ непосредственно дается законъ умноженія суммы:

$$(m+n).(a.x) = m.(a.x) + n(a.x).$$
$$n.(a.x+b.x) = n.(a.x) + n(b.x).$$

Умноженіе именованныхъ чиселъ на отвлеченныя числа остается такимъ образомъ въ рамкахъ тѣхъ опредѣленій и предложеній, которыя даны выше для умноженія отвлеченныхъ чиселъ.

Иначе дѣло обстоитъ съ умноженіемъ двухъ или болѣе именованныхъ чиселъ. Оно имѣетъ въ опредѣленныхъ случаяхъ смыслъ, если возможны особенныя физическія сочетанія соотвѣтствующихъ единицъ, удовлетворяющія тремъ законамъ умноженія:

$$a.b = b.a$$
$$a.(b.c) = (a.b).c.$$
$$a.(b+c) = a.b + a.c.$$

Извѣстнѣйшій примѣръ такого получающагося умноженіемъ сочетанія представляетъ въ геометріи численное значеніе площади паралелограмма и объема параллелепипеда, выраженное произведеніемъ двухъ или трехъ длинъ, именно одной стороны и одной или двухъ высотъ. Физика образуетъ большое число такихъ произведеній различныхъ единицъ и соотвѣтственно этому даетъ примѣры частныхъ, степеней и корней. Если мы обозначимъ длину буквою l, время—t, массу—m, то

именованіе площади	l^2
— объема	l^3
— скорости	$\frac{l}{t}$
— силы.	$\frac{m.l}{t^2}$
— работы	$\frac{m.l^2}{t^2}$
давленія на площадь	$\frac{m}{l.t^2}$
напряженія на площадь	$\frac{m}{t^2}$
плотности	$\frac{m}{l^3}$
количества магнитизма.	$\frac{l}{t}\sqrt{m.l}$
магнитной силы	$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{m}{t}}$

Большая часть этихъ соединеній основываются на опредѣленіи коеффиціентовъ: но многія изъ этихъ величинъ могутъ давать и аддитивныя физическія сочетанія какъ напр. скорости, теченія, силы, давленія, плотности и т. д.

Но всѣ эти опредѣленныя умноженіемъ единицы не однородны съ тѣми, изъ которыхъ они составляются и получаютъ смыслъ только вслѣдствіе знанія особенныхъ геометрическихъ или физическихъ законовъ. Здѣсь необходимо упомянуть и объ особенномъ видоизмѣненіи умноженія, введенномъ Г. Грассманномъ въ его „Ausdehnungslehre" для направленныхъ величинъ и лежащемъ также въ основаніи теоріи кватерніоновъ. Здѣсь является другой законъ коммутативности, именно

$$a.b = -b.a,$$

что даетъ дѣйствительно большое упрощеніе въ обозначеніяхъ, если и не при вычисленіи значеній, являющихся при совмѣстномъ дѣйствіи различно направленныхъ величинъ. Произведеніе двухъ отрѣзковъ есть при этомъ способѣ вычисленія площадь паралеллограмма, котораго сторонами они служатъ; но при этомъ одна сторона считается положительною, а другая отрицательною. Смотря на одну сторону площади, я долженъ для перехода отъ стороны a къ сторонѣ b описать уголъ между ними съ права въ лѣво; смотря на другую сторону, я перехожу при этомъ движенiи отъ b къ a. На этомъ основывается различiе въ послѣдовательности $(b.a)$ и $(a.b)$.

Здѣсь достаточно только упомянуть объ этихъ формахъ вычисленiй и показать ихъ положенiе по отношенiю къ формамъ вычисленiя чистаго ученiя о числахъ т. к въ задачу настоящей работы входило главнымъ образомъ показать значенiе и оправданiе вычисленiй съ отвлеченными числами и возможность ихъ примѣненiя къ физическимъ величинамъ.

Итакъ когда мы какое нибудь физическое соотношенiе принимаемъ за величину, это можетъ основываться только на опытномъ знанiи извѣстныхъ сторонъ его физическаго отношенiя при встрѣчѣ и взаимодѣйствiи съ другими. При этомъ я разсматриваю и совпаденiе двухъ пространственныхъ формъ, соотвѣтственно моимъ предъидущимъ работамъ объ аксiомахъ геометрiи, подобнымъ-же образомъ какъ физическое отношенiе, которое должно быть констатировано эмпирически.

Великое упрощенiе и наглядность пониманiя, котораго мы достигаемъ, сводя все пестрое многообразiе окружающихъ насъ вещей и измѣненiй на количественныя отношенiя, глубоко заложено въ самой сущности образованiя нашихъ понятiй. Составляя понятiе о классѣ, мы включаемъ въ него все то, что равно у объектовъ, принадлежащихъ къ этому классу. Разсматривая физическое отношенiе какъ именованное число, мы также удаляемъ изъ понятiя о единицахъ все, что въ дѣйствительности въ нихъ представляется различнымъ. Единицы суть объекты, которые мы разсматриваемъ только какъ примѣрные представители класса и которыхъ значенiе въ этомъ только и заключается. Въ величинахъ, составленныхъ изъ нихъ, остается тогда только самое случайное изъ различiй, различiе въ численности.

ПОНЯТІЕ О ЧИСЛѢ

Л. Кронекера.

Понятія о числѣ, пространствѣ и времени, употребляемыя въ математикѣ, должны быть развиваемы въ чистомъ полѣ философской приготовительной работы, изъ котораго уже потомъ вступаютъ въ отгороженныя области различныхъ наукъ. Развитіе этихъ понятій должно имѣть цѣлью надѣлить ихъ основными свойствами, необходимыми для спеціально-научнаго изученія.

Мы предполагаемъ осуществить здѣсь это по отношенію къ понятію о числѣ, простѣйшему изъ всѣхъ трехъ понятій, котораго преобладающее положеніе такъ прекрасно выставлено было великимъ математикомъ Якоби въ одномъ изъ его писемъ къ Александру Гумбольдту [1]).

„Одинъ древній"—такъ начинается одно изъ этихъ писемъ—„сравниваетъ математиковъ съ лотофагами. Кто разъ, говоритъ онъ, испробовалъ сладости математическихъ наукъ, не можетъ уже отстать отъ нея. Припишите же и мое предъидущее письмо [2]) тому бѣшенству, которое нападаетъ на этихъ лотоѣдовъ, когда они находятъ обожаемыя ими идеи или въ пренебреженіи или цѣнимыми только изъ-за случайныхъ приложеній. Не то-же ли говоритъ и Шиллеръ въ Ксеніяхъ въ своемъ маленькомъ стихотвореніи:

---

[1]) Эти письма нашлись въ бумагахъ Леженъ-Дирикле.

[2]) Это предъидущее письмо съ штемпелемъ «Berlin d. 26 Dec. 1846» занимаетъ три страницы in octavo, написанныя мелкимъ и тѣснымъ письмомъ Якоби. На первой страницѣ Якоби спрашиваетъ: «Итакъ Вы хотѣли-бы знать ту цѣпь мыслей, которая привела Леверрье къ открытію въ 1846 зaурановской планеты»? и на третьей страницѣ пишетъ: «При этихъ обстоятельствахъ поистинѣ замѣчательно, что Леверрье при своей способности къ счету имѣлъ и математическую прозорливость необходимую для того, чтобы осмѣлиться приступить къ обширной совершенно новой проблемѣ. Но работа человѣческаго духа не можетъ быть измѣряема по необходимой для этого гомеопатической дозѣ».

Архимедъ и юноша.

Къ Архимеду явился юноша жаждущій знанія.
Наставь меня, просилъ онъ мудреца, божественному искуству,
Столь дивныя услуги оказавшему астрономіи,
За Ураномъ открывшему еще планету.
Божественнымъ называешь ты искусство, отвѣчалъ мудрецъ,
Оно божественно и было такимъ, прежде чѣмъ изслѣдовало Космосъ,
Прежде чѣмъ оказало дивныя услуги астрономіи
И за Ураномъ открыло еще одну планету.
Все, что ты видишь въ Космосѣ, есть только отраженіе божественнаго искусства,
Среди Олимпійцевъ на тронѣ возсѣдаетъ вѣчное число“ [1]).

Въ этой остроумной пародіи Шиллеровскаго стихотворенія „Архимедъ и ученикъ“ Якоби выставляетъ положеніе понятія о числѣ во всей математикѣ въ поэтической формѣ, но совершенно правильно и подобно тому, какъ это сдѣлалъ Гауссъ въ словахъ: „Математика есть царица наукъ и ариѳметика—царица математики. Послѣдняя часто нисходитъ до оказанія услугъ астрономіи и другимъ естественнымъ наукамъ, но ей всегда и вездѣ принадлежитъ первое мѣсто“ [2]).

Дѣйствительно ариѳметика стоитъ по отношенію къ двумъ другимъ математическимъ дисциплинамъ, геометріи и механикѣ, въ такомъ-же положеніи, какъ вся математика къ

---

[1]) Archimedes und der Jüngling.

Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling,
Weihe mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Göttlich nennst Du die Kunst, sie ist's, versetzte der Weise,
Aber sie war es, bevor noch sie den Kosmos erforscht,
Ehe sie herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Was Du im Kosmos erblickst, ist nur der Göttlichen Abglanz,
In der Olympier Schaar thronet die ewige Zahl.

[2]) «Gauss Zum Gedächtniss»—Sartorius von Waltershausen Leipz. 1856. S. 79. Въ этомъ сочиненіи на стр. 97 приводится изрѣченіе Гаусса: «ὁ θεὸς ἀριθμητίζει»; въ бумагахъ Лежень-Дирикле нашлось письмо врача Гаусса Баума къ Гумбольдту, подтверждающее подлинность этого изрѣченія.

астрономіи и другимъ естественнымъ наукамъ; ариѳметика оказываетъ геометріи и механикѣ многообразныя услуги, получая въ свою очередь отъ этихъ наукъ многообразные импульсы.

При этомъ слово „ариѳметика“ должно пониматься не въ обыкновенномъ ограниченномъ смыслѣ, но должно включать всѣ математическія дисциплины, за исключеніемъ геометріи и механики. И я вѣрю, что когда нибудь удастся „ариѳметизировать“ все содержаніе этихъ математическихъ дисциплинъ т. е. основать ихъ единственно и исключительно на понятіи о числѣ, взятомъ въ самомъ тѣсномъ смыслѣ, отбросивъ тѣ измѣненія и распространенія этого понятія, которыя вводились преимущественно ради приложеній къ геометріи и механикѣ [1]). Принципіальное различіе между геометріею и механикою съ одной стороны и прочими математическими дисциплинами, составляющими „ариѳметику“ съ другой, состоитъ, по мнѣнію Гаусса, въ томъ, что предметъ послѣднихъ, число, есть продуктъ только нашего ума, между тѣмъ какъ пространство и время имѣютъ и внѣ нашего духа реальность, которой мы не можемъ a priori предписывать законы [2]).

§ 1. Опредѣленіе понятія о числѣ.

Естественный исходный пунктъ для развитія понятія о числѣ находится, по моему мнѣнію, въ *порядковыхъ числахъ*. Въ нихъ обладаемъ мы запасомъ извѣстныхъ, въ твердой послѣдовательности находящихся обозначеній, которыя мы можемъ приписывать группѣ различныхъ и различаемыхъ нами предметовъ [3]). Совокупность употребляемыхъ при этомъ обо-

---

[1]) Я подразумѣваю введеніе ирраціональныхъ и вообще непрерывныхъ величинъ.

[2]) Гауссъ выражается такъ (въ письмѣ къ Бесселю въ 1829 г.): «По моему глубочайшему убѣжденію ученіе о пространствѣ имѣетъ по отношенію къ нашему знанію аксіоматическихъ истинъ совершенно другое положеніе чѣмъ чистое ученіе о величинахъ: наше знаніе истинъ геометріи совершенно лишено того полнаго убѣжденія въ ихъ необходимости (и слѣдовательно абсолютной истинѣ), которое принадлежитъ ученію о величинахъ; мы должны скромно сознаться, что, если число есть только продуктъ нашего духа, то пространство и помимо нашего духа имѣетъ реальность, которой мы не можемъ a priori предписывать законы». См. рѣчь Эрнеста Шеринга о Гауссѣ.

[3]) Предметы могутъ быть въ извѣстномъ смыслѣ равны между собою и различны только по положенію въ пространствѣ, въ времени или въ мысляхъ какъ напр. двѣ равныя длины или два равныхъ періода времени.

значеній соединяемъ мы въ понятіи о „численности предметовъ", изъ которыхъ состоитъ группа, и выраженіе для этого понятія мы связываемъ съ *послѣднимъ* изъ употребленныхъ обозначеній такъ-какъ послѣдовательность ихъ точно опредѣлена. Такъ въ группѣ буквъ (a, b, c, d, e) можно обозначить букву a „первою", букву b „вторую" и т. д. и наконецъ букву e „пятою." Совокупность употребленныхъ при этомъ порядковыхъ чиселъ или „численность" буквъ a, b, c, d, e можетъ поэтому быть обозначена сообразно съ послѣднимъ изъ употребленныхъ порядковыхъ чиселъ числомъ „пять" [1]).

Можно изъ самихъ порядковыхъ чиселъ составить группу объектовъ. Для той группы, которая состоитъ изъ опре-

---

[1]) Запасъ обозначеній, которымъ мы обладаемъ въ порядковыхъ числахъ, всегда достаточенъ потому что онъ не столько дѣйствительный, сколько идеальный запасъ. Благодаря законамъ образованія нашего словеснаго и письменнаго обозначенія чиселъ мы дѣйствительно обладаемъ возможностью удовлетворить каждый запросъ, предполагая впрочемъ, что въ выраженіи числа извѣстныя обозначенія могутъ повторяться произвольное число разъ. При допущеніи повторенія достаточно было-бы собственно даже одного знака для выраженія каждаго числа; стоитъ повторять этотъ знакъ столько разъ, сколько указываетъ число. Но такой первобытный способъ представленія съ помощью одного знака былъ-бы совершенно не нагляденъ; непрактиченъ и другой стольже первобытный способъ представленія чиселъ посредствомъ исключительно различныхъ знаковъ. Поэтому при словесномъ обозначеніи числа пришли къ мысли выражать возможно большее число посредствомъ возможно меньшаго числа специфически отличныхъ коренныхъ словъ; этого достигли, устроивъ схему обозначеній на подобіе таблицы съ двойнымъ входомъ.

Такъ ставя точки въ 45 квадратовъ таблицы, составленной изъ пяти колоннъ и девяти строкъ, можно представить всѣ числа до 99.999 совершенно такъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ греческой системѣ нумераціи. Если въ столбецъ I ставятся единицы, въ столбецъ II десятки, въ столбцѣ III сотни, въ столбецъ IV—тысячи и въ столбецъ V—десятки тысячъ, то напр. число 32456 представлается пятью точками, стоящими въ строкахъ 3, 2, 4, 5, 6 и въ столбцахъ V, IV, III, II, I. Греческое τρισμύριοι δισχίλιοι τετρακόσιοι πεντήκοντα ἕξ получается изъ этой таблицы непосредственно, извлекая изъ обозначенія строкъ начало и изъ обозначенія столбцевъ окончаніе каждаго изъ числительныхъ. Такъ для первой точки, стоящей въ третьей (τρεῖς) и въ пятомъ столбцѣ (μύριοι) составляется числительное τρισμύριοι, для второй точки, стоящей во второй строкѣ (δύο) и четвертомъ столбцѣ (χίλιοι)—числительное—δισχίλιοι и т. д. и наконецъ для пятой точки, стоящей въ шестой строкѣ (ἕξ) и въ первомъ столбцѣ, имѣемъ числительное ἕξ безъ прибавленія окончанія. Греческая система образованія числительныхъ позволяетъ такимъ образомъ съ помощью 13 различныхъ обозначеній, девяти начальныхъ и четырхъ конечныхъ, выразить различнымъ образомъ всѣ числа до 99999.

дѣленнаго (n—таго) порядковаго числа и изъ всѣхъ предъидущихъ порядковыхъ чиселъ, численность выражается, соотвѣтственно выше данному опредѣленію, количественнымъ числомъ, соотвѣтствующимъ n—тому порядковому числу; эти то количественныя числа и называются „числами“.

Число m называется „меньшимъ“ чѣмъ другое число n, если порядковое число, соотвѣтствующее m, предшествуетъ соотвѣтствующему n. Такъ называемый естественный рядъ чиселъ есть ни что иное какъ рядъ соотвѣтствующихъ порядковыхъ чиселъ.

§ 2. Независимость числа отъ порядка принятаго при счетѣ.

Когда пересчитываютъ группу объектовъ т. е. обозначаютъ порядковыми числами, по порядку, отдѣльные объекты, то этимъ самымъ придаютъ объектамъ извѣстный порядокъ. Оставляемъ теперь безъ измѣненія порядокъ объектовъ, но установляемъ новую послѣдовательность порядковыхъ чиселъ (перестановляя ихъ между собою) и затѣмъ первый объектъ обозначаемъ первымъ порядковымъ числомъ новой послѣдовательности, второй—вторымъ порядковымъ числомъ и такъ по порядку каждый слѣдующій объектъ слѣдующимъ порядковымъ числомъ; тогда и объекты получаютъ снова новый порядокъ, отличный отъ предъидущаго, но опредѣляемый приписанными имъ порядковыми числами; предметы считаются тогда въ другомъ порядкѣ [1]). При этомъ „совокупность“ порядковыхъ чиселъ, употребленныхъ для обозначенія, дающая по выше данному опредѣленію понятіе о „численности“ предметовъ, нисколько не измѣняется, и потому численность т. е. результатъ счета независитъ отъ порядка счета. „Численность“ предметовъ группы есть поэтому свойство группы какъ таковой т. е. какъ совокупности предметовъ независимой отъ какого-нибудь опредѣленнаго порядка.

Если мы мысленно соединимъ какіе-нибудь элементы, обозначаемые буквами a, b, c, d ...., въ одну систему при чемъ твердо устанавливается послѣдовательность элементовъ то напр. двѣ системы (a, b, c) и (c, b, a) должны считаться различными. И дѣйствительно, если мы взявши за

---

[1]) Здѣсь намѣренно употребляется перестановка не предметовъ, но ихъ обозначеній порядковыми числами; въ противномъ случаѣ могло-бы возникнуть сомнѣніе въ возможности перестановлять предметы.

a, b, c нѣсколько различныхъ чиселъ обозначаемъ точку пространства, которой прямоугольныя координаты суть $x=a$, $y=b$, $z=c$, системою (a, b, c), двѣ точки (a, b, c) (b, c, a) будутъ очевидно отличны одна отъ другой. Если мы будемъ называть какія-нибудь двѣ системы $(a, b, c, d...)$, $(a', b', c', d',...)$ „эквивалентными" въ томъ случаѣ если можно преобразовать одну систему въ другую, замѣняя по порядку каждый элементъ первой системы элементомъ второй, то необходимое и достаточное условіе для эквивалентности двухъ системъ состоитъ въ равенствѣ численности ихъ элементовъ и численность элементовъ системы $(a, b, c, d,...)$ можетъ быть характеризирована поэтому какъ единственная „инваріанта" всѣхъ между собою эквивалентныхъ системъ [1]).

§ 3. Сложеніе чиселъ.

Числа сами могутъ быть приняты за объекты счета.

Такъ напримѣръ можно отсчитывать, начиная съ числа (n_1+1), n_2 чиселъ т. е. соединить въ группу n_2 чиселъ слѣдующихъ за числомъ n_1.

Это „дальнѣйшее отсчитываніе" называется „сложеніемъ съ числомъ n_1 числа n_2" и то число s, къ которому мы приходимъ при этомъ дальнѣйшемъ отсчитываніи, называется „результатомъ сложенія" или „суммою n_1 и n_2" и обозначается n_1+n_2. Тотъ-же самый результатъ s получается, если мы прибавимъ къ числу n_2 число n_1 т. е. если начиная съ числа n_2+1 отсчитаемъ n_1 и потому: $n_1+n_2=n_2+n_1$. Точно также вообще:

$n_1+n_2+n_3...+n_r=n_\alpha+n_\beta+n_\gamma+...n_\rho$, если α, β, γ,...ρ обозначаютъ числа 1, 2, 3,...r въ какомъ нибудь порядкѣ.

Ибо, если мы составимъ всю группу системъ двухъ чиселъ (h, k), получающуюся, полагая послѣдовательно

$$\begin{array}{l} h=1 \text{ и } k=1,2, \ldots n_1 \\ h=2 \text{ и } k=1,2, \ldots n_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

---

[1]) Этимъ, я думаю, точнѣе выражено содержаніе предложенія, которымъ Липшицъ начинаетъ свой учебникъ анализа. Это предложеніе говоритъ: «Если при разсмотрѣніи отдѣльныхъ вещей не обращается вниманіе на признаки, которыми отличаются между собою вещи, то остается понятіе о численности разсматриваемыхъ вещей».

Съ терминомъ «инваріанта» введеннымъ въ науку Сильвестромъ теперь соединяютъ болѣе общее понятіе чѣмъ то, для котораго знаменитый англійскій математикъ ввелъ этотъ терминъ.

. . . .

$$h = r \text{ и } k = 1, 2, \ldots n_r$$

то получается число $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r$, какъ число системъ группъ, если мы будемъ считать ихъ въ томъ порядкѣ, въ которомъ онѣ здѣсь составлены. Если-же мы расположимъ ихъ такъ, чтобы послѣдовательно шли другъ за другомъ системы, въ которыхъ:

$$h = \alpha \text{ и } k = 1, 2, \ldots n_\alpha$$
$$h = \beta \text{ и } k = 1, 2, \ldots n_\beta$$
$$h = \gamma \text{ и } k = 1, 2, \ldots n_\gamma$$

. . . .

. . . .

$$h = \varrho \text{ и } k = 1, 2, \ldots n_\varrho,$$

то напротивъ число $n_\alpha + n_\beta + \ldots + n_\varrho$ является численностью системъ группъ, и одно и то-же число представляется съ одной стороны суммою: $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r$, съ другой стороны суммою: $n_\alpha + n_\beta + n_\gamma \ldots + n_\varrho$.

§ 4. Умноженіе чиселъ.

Если слагаемыя $n_1, n_2, \ldots n_r$ всѣ равны одному и тому-же числу n, то сложеніе называется „умноженіемъ числа n на множитель r“ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = r.n$.

Результатъ такимъ образомъ опредѣленнаго умноженія называется произведеніемъ чиселъ r и n. Совершенно такойже результатъ получается, если число r будетъ умножаемо на множитель n и вообще произведеніе чиселъ $n_1, n_2, \ldots n_r$ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ производятся умноженія. Ибо, если мы представимъ себѣ всѣ системы r чиселъ $(h_1, h_2, \ldots h_r)$, которыя получаются, полагая

вмѣсто h_1 всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots n_1$
вмѣсто h_2 всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots n_2$
вмѣсто h_3 всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots n_3$

. . . .

. . . .

вмѣсто h_r всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots n_r$,

то всѣ эти системы могутъ быть расположены по величинѣ значеній полинома

$$h_r + h_{r-1}\gamma + h_{r-2}\gamma^2 + \ldots + h_1 \gamma_r^{r-1},$$

если γ обозначаетъ число, превышающее каждое изъ чиселъ $n_1, n_2, n_3, \ldots n_r$.

Системы слѣдуютъ одна за другою въ томъ порядкѣ, въ которомъ онѣ слѣдовали-бы одна за другою, если-бы $h_1\ h_2\ h_3 \ldots h_r$ представляло число съ цифрами $h_1, h_2, \ldots h_r$ въ системѣ нумераціи съ основаніемъ g. Принципъ, на которомъ основывается размѣщеніе этихъ чиселъ тотъ самый, который употребляется въ лексиконахъ съ замѣною чиселъ 1, 2, 3, . . . по порядку буквами алфавита.

Различныя системы $(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r)$, характеризирующіяся различными значеніями h_1 въ числѣ n_1, слѣдуютъ одна за другой при данномъ расположеніи по величинѣ значеній h_1; въ каждомъ подраздѣленіи n_2 различныхъ системъ, характеризирующихся значеніями h_2, слѣдуютъ опять одна за другою по значеніямъ этихъ величинъ и т. д. Если мы обозначимъ число тѣхъ системъ, въ которыхъ $h_1 = 1$, буквою s_1, то s_1 будетъ также числомъ системъ въ каждомъ изъ n_1 подраздѣленій, характеризуемыхъ значеніями $h_1 = 1,2,3, \ldots n_1$. Общее число всѣхъ системъ выражается поэтому произведеніемъ $n_1 s_1$.

Если мы обозначимъ далѣе число тѣхъ системъ, въ которыхъ $h_1 = 1$ и $h_2 = 1$, буквою s_2, то s_2 будетъ числомъ системъ въ каждомъ изъ n_2 подраздѣленій, которыя при опредѣленномъ значеніи $h_1 = 1$ характеризируются n_2 значеніями:

$$h_2 = 1,2,3, \ldots n_2.$$

Обозначенное буквою s_1 число всѣхъ системъ, въ которыхъ $h_1 = 1$, выражается также и произведеніемъ $n_2\ s_2$, и число всѣхъ системъ вообще равно: $n_1\ n_2\ s_2$. Продолжая подобнымъ-же образомъ дальше, мы получимъ произведеніе: $n_1\ n_2\ n_3 \ldots n_r$ какъ выраженіе числа всѣхъ системъ

$$(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r).$$

Если, какъ выше, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ обозначаютъ числа $1,2,3, \ldots r$ въ какомъ нибудь другомъ порядкѣ, а различныя системы $(h_1, h_2, \ldots h_r)$ будутъ расположены такъ, какъ онѣ слѣдовали-бы другъ за другомъ, если-бы

$$h_\alpha\ h_\beta\ h_\gamma \ldots h_\varrho$$

представляло число съ цифрами $h_\alpha\ h_\beta\ h_\gamma \ldots h_\varrho$ въ системѣ нумераціи съ основаніемъ g, то вышеизложеннымъ пріемомъ мы получили-бы произведеніе: $n_\alpha\ n_\beta\ n_\gamma \ldots n_\varrho$ какъ выраженіе для числа всѣхъ системъ $(h_1, h_2, \ldots h_r)$ и потому дѣйствительно:

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_r = n_\alpha n_\beta n_\gamma \ldots n_\varrho.$$

Произведеніе чиселъ не зависитъ отъ послѣдовательности множителей т. е. отъ послѣдовательности, въ которой производятся перемноженія.

§ 5. Буквенное исчисленіе.

Мы можемъ считать теперь законы сложенія и умноженія чиселъ вполнѣ выведенными изъ опредѣленій. Эти-же самые законы были положены въ основаніе такъ называемаго буквеннаго исчисленія, какъ только начали употреблять буквы для обозначенія чиселъ, оставленныхъ безъ точнаго опредѣленія.

Но со времени принципіальнаго введенія „неопредѣленныхъ“ (indeterminatae), которымъ наука обязана Гауссу, специальная теорія цѣлыхъ чиселъ расширилась въ общую ариѳметическую теорію цѣлыхъ цѣлочисленныхъ функцій неопредѣленныхъ. Эта общая теорія позволяетъ исключить всѣ чуждыя понятія о отрицательныхъ, дробныхъ, вещественныхъ и мнимыхъ алгебраическихъ числахъ.

Такъ понятіе объ отрицательныхъ числахъ можетъ быть исключено, замѣняя въ формулахъ множитель—1 неопредѣленною x и знакъ равенства Гауссовскимъ знакомъ сравненія modulo $(x+1)$. Тогда равенство $7-9=3-5$ преобразуется въ сравненіе:

$$7+9x \equiv 3+5x (\text{мод}(x+1));$$

оно выигрываетъ при этомъ въ содержаніи, такъ-какъ сравненіе имѣетъ значеніе для всякаго положительнаго цѣлаго числа x, показывая, что $7+9x$ при дѣленіи на $x+1$ даетъ тотъ-же остатокъ, какъ $3+5x$; съ другой стороны это сравненіе переходитъ непосредственно въ уравненіе, если только x будемъ считать не неопредѣленною, но „величиною“, опредѣленною уравненіемъ $x+1=0$ и вводимъ такимъ образомъ отрицательную единицу. Замѣтимъ, что въ учебникѣ др. Германна Шуберта [1]) ясно указано на то, что значеніе формулы: $7-9=3-5$ нуждается въ ближайшемъ разъясненіи и что при этомъ вводится „собственно говоря новое употребленіе знака равенства“.

---

[9]) System der Arithmetik und Algebra, als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen. Von Dr. Hermann Schubert. Potsdam. 1885. S. 26. Въ предъидущемъ мы воспользовались многими изъ заключающихся въ этомъ сочиненіи разъясненій.

II. Понятіе о дробныхъ числахъ можетъ быть устранено, если въ формулахъ множитель $\frac{1}{m}$ будетъ замѣненъ неопредѣленною x_m и знакъ равенства Гауссовскимъ знакомъ сравненія modulo $(mx_m—1)$. Три правила дѣйствій надъ дробями,

$$\text{правило сложенія: } \frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an+bm}{mn},$$

$$\text{правило умноженія: } \frac{a}{m}.\frac{b}{n}=\frac{ab}{mn}$$

$$\text{правило дѣленія: } \frac{a}{n}:\frac{b}{n}=\frac{an}{bm}$$

замѣняются тогда вполнѣ слѣдующими сравненіями:

1) $ax_m+bx_n \equiv (an+bm)x_{mn}(\mathrm{modd}.mx_m—1, nx_n—1, mnx_{mn}—1)$
2) $ax_m.bx_n \equiv abx_{mn}(\mathrm{modd}.mx_m—1, nx_n—1, mnx_{mn}—1)$
1) $ax_m x_{bx_n} \equiv anx_{bm}(\mathrm{modd}.mx_m—1, nx_n—1,$
$bmx_{bm}—1, bx_n x_{bx_n}—1)$.

Эти три сравненія вытекаютъ сами изъ слѣдующихъ трехъ тожествъ:

I) $ax_m+bx_n=(an+bm)x_{mn}+anx_{mn}(mx_m—1)+bmx_{mn}$
$(nx_n—1)-(ax_m+bx_n)(mnx_{mn}—1)$
II) $ax_m.bx_n=abx_{mn}+abnx_n x_{mn}(mx_m—1)+abx_{mn}(nx_n—1)-$
$-abx_m x_n(mnx_{mn}—1)$.
III) $ax_m.x_{bx_n}=anx_{bm}+anx_{bm}(mx_m—1)—abmx_m.x_{bm}.$
$x_{bx_n}(nx_n—1)—ax_m.x_{bx_n}(bmx_{bm}—1)+amnx_m.x_{bm}(bx_n x_{bx_n}—1)$.

Понятіе о „большемъ“ и „меньшемъ“ дробей можетъ быть разсматриваемо какъ данное правиломъ сложенія, если дробь происходящая отъ сложенія двухъ дробей будетъ считаться больше каждаго изъ двухъ слагаемыхъ. Этимъ путемъ не только опредѣляется, но и обосновывается послѣдовательность раціональныхъ дробей [1]).

---

[1]) Въ предисловіи къ своему сочиненію: «Introduction à la théorie des fonctions d'une variable» Jules Tannery говоритъ на стр. VIII: «On peut constituer entiérement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers; il est inutil de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'experience; une fraction, du point de vue que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unite; ces mots «parties de l'unité» n'ont plus de sens; une

Въ результатахъ „общей ариѳметики“ или „ариѳметической теоріи цѣлыхъ цѣлочисленныхъ функцій неопредѣленныхъ“ можно видѣть только совокупность всѣхъ результатовъ, получающихся въ томъ случаѣ если неопредѣленнымъ придаются цѣлочисленныя значенія.

Поэтому и результаты общей ариѳметики принадлежатъ собственно обыкновенной спеціальной теоріи чиселъ и всѣ плоды глубочайшихъ математическихъ изслѣдованій могутъ быть въ конечномъ результатѣ выражены въ простыхъ формахъ свойствъ цѣлыхъ чиселъ.

Но для простаго выраженія этихъ свойствъ необходимо было имѣть предварительно приспособленный наглядный способъ выраженія и представленія чиселъ; къ этому стремилось человѣчество съ глубокой древности настойчиво и упорно, то болѣе, то менѣе успѣшно, различными путями у различныхъ народовъ [1]). Плодъ этой работы, наше словесное и

---

fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre determiné; sur cette nouvelle espèce de nombres, il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques» (Анализъ можетъ быть построенъ исключительно на понятіяхъ о цѣломъ числѣ и сложеніи цѣлыхъ чиселъ; нѣтъ необходимости прибѣгать къ какому-либо другому постулатуму, къ какому-либо другому опытному данному; дробь, съ указанной точки зрѣнія, не можетъ быть разсматриваема какъ соединеніе равныхъ частей единицы; эти слова «части единицы» не имѣютъ болѣе смысла; дробь есть совокупность двухъ цѣлыхъ чиселъ, помѣщенныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ; въ примѣненіи къ этому новому роду чиселъ необходимо пересмотрѣть опредѣленія равенства, неравенства и ариѳметическихъ операцій». Послѣднее и было изложено выше.

[2]) См. мемуаръ Александра Гумбольдта. Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. (Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 4. p. 205 ff.)

Въ этомъ мемуарѣ цитируется между прочимъ замѣчаніе Laplace «C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse methode d'exprimer tous les nombres avec dix caractéres, en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position, idée fine et importante qui nous parait maintenant si simple que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même et l'extrême facilité qui en résulte pour tous les calculs placent notre systéme d'arithmétique au premier rang des inventions utiles, et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considere qu'il a echappé au génie d'Archiméde et d'Appolonius, deux de plus grands hommes dont l'antiquité s'honore». (Изъ Индіи пришелъ къ намъ остроумный способъ выражать всѣ числа десятью цифрами, давая имъ заразъ и абсолютное значеніе и знаписьменное изображеніе чиселъ, является небходимыхъ условіемъ какъ для нахожденія той сокровищницы знаній, которою располагаетъ современная ариѳметика, такъ и для открытія тѣхъ „законовъ“, въ которые мы облекли наше знаніе движенія небесныхъ тѣлъ; безъ него невозможенъ былъ-бы и весь современный строй практической жизни, необъятное распространеніе и развитіе торговли и обмѣна, столь существенно отличающее новый міръ отъ стараго.

ченіе по положенію, идея остроумная и важная, которая кажется намъ теперь столь простою, что мы едва-ли понимаемъ все ея значеніе. Но эта самая простота и необыкновенная легкость всѣхъ вычисленій, происходящія отъ этого способа, ставятъ нашу систему ариѳметики въ первомъ ряду полезныхъ изобрѣтеній; трудность этого изобрѣтенія будетъ лучше оцѣнена, если вспомнимъ, что оно ускользнуло отъ генія Архимеда и Аппононія, принадлежащихъ безспорно къ величайшимъ людямъ древности).

ПРИМѢЧАНІЯ ПЕРЕВОДЧИКА.

Къ стр. 1. Мемуары, въ которыхъ Гельмгольцъ выяснилъ свою эмпирическую точку зрѣнія на происхожденіе геометрическихъ аксіомъ, суть слѣдующіе:

1. Ueber die Thatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen. Götting. Nachr. 1868.

2) Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorträge und Reden Bd. II.

См. также рѣчь Гельмгольца: „Ueber Thatsachen in der Wahrnehmung". Berlin. ibidem.

Къ стр. 30. Такъ называемая теорія размѣровъ единицъ, которой касается Гельмгольцъ, изложена Максвеллемъ на первыхъ страницахъ его „Treatise on Electricity and Magnetism".

На русскомъ языкѣ см. А. Романовъ: Международная система электрическихъ единицъ въ связи съ другими мѣрами. 1885. О. Хвольсонъ. Объ абсолютныхъ единицахъ въ особенности магнитныхъ и электрическихъ. 1887.

Къ стр. 42. Кронекеръ вводитъ здѣсь терминологію теоріи функціональныхъ сравненій.

Если двѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ таковы, что разность ихъ дѣлится на цѣлую функцію $F(x)$, то вмѣсто равенства $\varphi(x)=\psi(x)+F(x).\chi(x)$, гдѣ $\chi(x)$ есть цѣлая функція, пишутъ: $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ $[mod\ F(x)]$ (функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сравнимы по модулю $F(x)$).

Вообще:

$\varphi(x)\equiv\psi(x)[modd\ F(x),F_1(x),...]$(функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сравнимы по системѣ модулей $F(x),F_1(x),\ldots..$), если разность $\varphi(x)—\psi(x)$ можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\chi(x).F(x)+\chi_1(x).F_1(x)+....,$$

гдѣ $\chi(x),\chi_1(x)....$ суть цѣлыя функціи.

Теорія системъ модулей изложена Кронекеромъ въ § 21 его „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen".

КНИГИ А. ВАСИЛЬЕВА.

Объ отдѣленіи корней совокупныхъ уравненій. 1874. Ц. 30 к.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ въ связи съ новыми взглядами на задачу интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. 1878. Ц. 35 коп.

О функціяхъ раціональныхъ аналогичныхъ съ функціями двоякопе已періодическими. 1880. Ц. 40 коп.

Систематическій каталогъ книгъ по чистой математикѣ фундаментальной библіотеки Императорскаго Казанск. Универ. 1880. Ц. 50 коп.

Преподаваніе чистой математики въ Берлинскомъ и Лейпцигскомъ университетахъ. (Изъ отчета о путешествіи за границу). 1882. Ц. 30 к.

Теорія отдѣленія корней системъ алгебраическихъ уравненій. 1884. Ц. 1 руб.

Роль профессора Вейерштрасса въ современномъ развитіи математики. 1885. Ц. 30 к.

Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. 1891. Ц. 30 к.

Продаются въ книжныхъ магазинахъ **А. А. Дубровина** и **Н. Я. Башмакова**.

Тамъ-же продаются изданія Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ и принимается подписка на «Извѣстія Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ».