

предложена следующая динамическая система третьего порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= aHf(W) + a_1lA - \varphi(W, B) + u(t) \\ \frac{dA}{dt} &= -K_1W + K_2A\left(1 - \frac{A}{A_{\max}}\right) - K_3B \\ \frac{dB}{dt} &= -K_4W - K_5A + K_6B\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right),\end{aligned}\quad (1)$$

где W — объем пляжеобразующего материала в береговой зоне (на пляже и шельфе) на единице длины береговой линии; a, a_1 — доли пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег и шельф; H — высота клифа; l — протяженность шельфа; $f(W)$ — скорость отступления клифа; A — скорость донной абразии; B — биомасса донного биоценоза; $\varphi(W, B)$ — интенсивность потерь материала в береговой зоне (истирание, унос); $u(t)$ — управляющий фактор в виде искусственной подсыпки ($u > 0$) или изъятия ($u < 0$) материала из береговой зоны; A_{\max}, B_{\max} — максимально возможные значения скорости донной абразии и биомассы; $K_i = \text{const} > 0, i = 1 \div 6; t$ — время.

В данной модели не учитывается процесс расширения шельфа и предполагается параллельное отступление вертикального клифа с постоянной высотой. Первое уравнение представляет собой уравнение баланса пляжеобразующего материала в береговой зоне. Последние два уравнения записаны на основе качественных предположений: интенсивность изменения скорости донной абразии уменьшается с ростом объема пляжеобразующего материала и биомассы; интенсивность изменения биомассы уменьшается с ростом объема материала и скорости донной абразии; квадратичные члены описывают процессы саморегуляции (стабилизации) переменных A и B по аналогии с известными подходами в экологии (уравнение Ферхюльста, логистическая кривая).

В простейшем случае может рассматриваться линейная функция $f(W)$ [1] и линейный закон потерь пляжеобразующего материала по W с линейным по B коэффициентом:

$$\begin{aligned}f(W) &= \gamma(W_{\max} - W), \quad 0 \leq W \leq W_{\max}, \\ \varphi(W, B) &= \left[C_0 \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) + C_{\min} \right] W,\end{aligned}\quad (2)$$

где $W_{\max}, C_0, C_{\min} = \text{const} > 0$

Последняя зависимость свидетельствует о том, что при увеличении объема материала в береговой зоне его потери возрастают, а при увеличении биомассы убывают.

В наиболее общем случае, используя результаты работы [1], можно предложить следующие нелинейные функции:

$$\begin{aligned}f(W) &= \frac{B(W + \varepsilon)}{(W + r)^2}, \\ \varphi(W, B) &= \left(\frac{1}{\gamma_1 + W} \right) [C_0 \exp(-\alpha B) + C_{\min}] W,\end{aligned}\quad (3)$$

где $B, \varepsilon, r, C_0, C_{\min}, \alpha, \gamma_1 = \text{const} > 0$.

Последняя зависимость свидетельствует о стабилизации процесса потерь материала при увеличении его объема.

Анализ предложенной модели представляет собой самостоятельную область исследований в теоретической геоэкологии с обилием различных приложений (задачи оптимального управления, бифуркации и неустойчивости, в том числе динамические; поиск сложных стохастических режимов при малых детерминированных периодических флуктуациях параметров и др.).

Ниже рассмотрим один частный вариант системы (1), абстраги-

В. М. Московкин

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕРЕГОВЫХ ЭКОСИСТЕМ

В статье рассматриваются процессы взаимодействия, происходящие в береговых морфолитосистемах (береговой уступ — пляжеобразующий материал в береговой зоне — абразионный шельф) и донных биоценозах шельфа. Для описания этих процессов в общем случае

руясь от переменной W . Изменив нумерацию коэффициентов K , приходим к следующей динамической системе второго порядка:

$$\frac{dA}{dt} = K_1 A \left(1 - \frac{A}{A_{\max}}\right) - K_2 B \quad (4)$$

$$\frac{dB}{dt} = -K_3 A + K_4 B \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right).$$

Данная система аналогична системе уравнений, описывающей взаимодействие процессов эрозии и динамики биомассы наземной растительности [2]. Математический анализ этой системы в вышеуказанной работе не проделан. Приведем динамическую систему (4) с помощью замен $A' = y = A/A_{\max}$, $B' = x = B/B_{\max}$, $t' = K_1 t$ к безразмерному виду

$$\frac{dy}{dt'} = y(1-y) - a_1 x \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt'} = -a_2 y + a_3 x(1-x),$$

где $a_1 = \frac{K_2 B_{\max}}{K_1 A_{\max}}$, $a_2 = \frac{K_3 A_{\max}}{K_1 B_{\max}}$, $a_3 = \frac{K_4}{K_1}$.

Главные изоклины этой системы в фазовой плоскости (x, y) имеют вид:

$$x = \frac{1}{a_1} y(1-y) \quad (6)$$

$$y = \frac{a_3}{a_2} x(1-x).$$

Особые точки динамической системы (5) определяются из решения кубического уравнения

$$x^3 - 2x^2 + \left(1 + \frac{a_2}{a_3}\right)x + \frac{a_1 a_2^2}{a_3^2} - \frac{a_1}{a_3} = 0. \quad (7)$$

При этом нулевая точка также является особой.

Можно показать, что при наличии трех положительных особых точек имеют место две седловые (неустойчивые) точки, устойчивый узел и неустойчивый узел в начале координат. Направления сепаратрис для седловых точек задаются собственными векторами матрицы \tilde{A} линеаризованной системы.

Данная ситуация иллюстрируется (рис. 1) расчетным фазовым портретом системы (5) при $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 1$, $A_1 = (x_2, y_2) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$, $B_1 = (x_3, y_3) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $C_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}, \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$.

Фазовая траектория $y=x$ (диагональ квадрата) является решением исходной системы.

Таким образом, из четырех особых точек только одна является устойчивой и, следовательно, реальная экосистема при своем развитии стремится к динамическому равновесию, определяемому координатами этой устойчивой точки, что соответствует стабилизации биомассы и донной абразии на некоторых стационарных (постоянных) уровнях, которые зависят от параметров исходной системы.

При изменении параметров исходной системы может происходить вырождение особой устойчивой точки (сближение и совпадение точек (x_1, y_1) , (x_3, y_3) или (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , что приводит к внезапному скачку из устойчивой точки в неустойчивую). Это соответствует известным

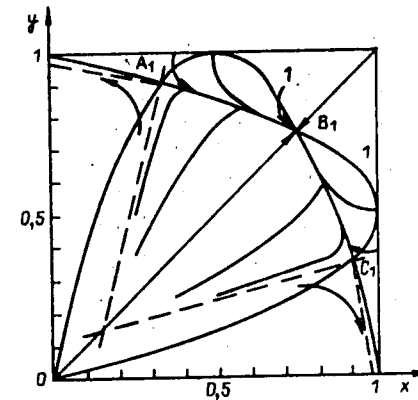


Рис. 1. Расчетный фазовый портрет системы

в литературе математическим катастрофам типа сборки [3], [4]. Эти вырождения и соответствующие скачки происходят на бифуркационном множестве $\psi(a_1, a_2, a_3) = 0$, которое в нашем случае может быть получено приравниванием к нулю дискриминанта кубического уравнения (7), получаемого по формулам Кардано, что равносильно условию $\det A = 0$ (граница седел):

$$a_1 = \frac{1}{54a_2^2} (18a_2a_3 - 4a_3^2 \pm \sqrt{(18a_2a_3 - 4a_3^2)^2 - 108(4a_2a_3 - a_3^2)a_2^2}). \quad (8)$$

При $a_3=1$ и $a_3=2$ графики этой двумерной функции в положительной области показаны на рис. 2. Область, в которой существу-

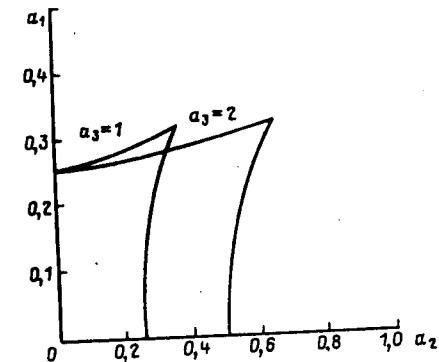


Рис. 2. Графики двумерной функции в положительной области

ет устойчивая узловая точка, ограничена кривой и конечными отрезками осей координат.

На самой кривой происходит вырождение устойчивой точки и вне этой области ее не существует. Например, точка $a_1 = a_2 = 1/4$ находится внутри области и на рис. 1 этому случаю соответствует наличие устойчивой узловой точки. Точка $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/4$ находится вне этой области и на рис. 3 узловая устойчивая точка отсутствует. При вырождении устойчивой особой точки вторая седловая точка не изменяет

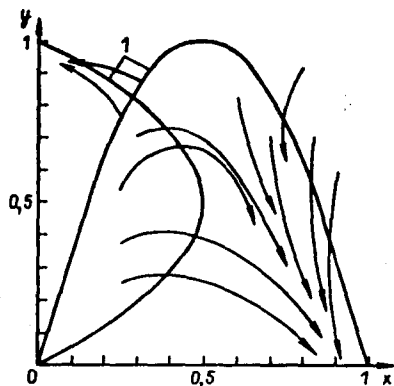


Рис. 3

характер. При $a_1, a_2, a_3 > 0$ показано, что на границе устойчивости узлов и фокусов ($\text{tr } \tilde{A} = 0$) для ненулевой особой точки отсутствует бифуркация рождения цикла $\det \tilde{A} < 0$.

Нулевая точка будет седловой при $\det \tilde{A} = a_3 - a_1 a_2 < 0$. При $\det \tilde{A} = 0$ имеем в этой точке неустойчивый узел. Показано, что устойчивого узла (или фокуса) в этой нулевой точке быть не может ($\text{tr } \tilde{A} > 0$), а неустойчивый фокус возникает при $(\text{tr } \tilde{A})^2 - 4 \det \tilde{A} < 0$, то есть когда

$$4(a_3 - a_1 a_2) > (1 + a_3)^2. \quad (9)$$

Переход нулевой особой точки из неустойчивого узла в неустойчивый фокус происходит при вырождении второй седловой точки (совпадение ее с нулевой точкой). В реальной природной системе осцилляции вокруг нулевой точки (фокус) невозможны, так как $x, y \geq 0$. Теоретически нулевая точка не может быть особой точкой типа центр, так как $\text{tr } \tilde{A} = 1 + a_3 > 0$. В вышеприведенном анализе матрица \tilde{A} имела вид

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 \\ -a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

При $a_1 = a_2$ динамическая система (5) допускает потенциал

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - a_1 xy - a_3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \quad (11)$$

и является градиентной системой. Как известно, такие системы не могут иметь решения типа предельного цикла [5], впрочем таких решений не существует и при $a_1 a_2$ в заданном единичном квадрате.

Анализ результатов численных экспериментов показал (рис. 1), что область ограниченная двумя симметричными сепаратрисами и сторонами единичного квадрата является аттрактором устойчивой особой точки $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Диагональ квадрата, выходящая из нулевой точки также является аттрактором и фазовый портрет симметричен относительно этой диагонали. При сближении устойчивой и неустойчивой точки область притяжения (аттрактор) постепенно уменьшается и полностью исчезает при вырождении устойчивой точки. В неустойчивой области, в окрестности седловых точек, отмечается быстрый выход фазовых кривых на границы единичного квадрата (через 5–6 временных шагов).

При достижении траекторией сторон квадрата $B' = 0$ поведение экогеосистемы определяется первым уравнением системы (5), которое в этом случае имеет устойчивую стационарную точку $A' = 1$. Эта ситуа-

ция соответствует нулевой биомассе при максимальной скорости донной абразии.

При достижении траекторией стороны квадрата $A' = 0$ поведение экогеосистемы определяется вторым уравнением системы (5), которое в этом случае имеет устойчивую стационарную точку $B' = 1$. Эта ситуация соответствует максимальной биомассе при исчезновении донной абразии.

На сторону квадрата $B' = 1$ фазовые траектории не выходят. При достижении траекторией стороны квадрата $A' = 1$ поведение экогеосистемы определяется вторым уравнением системы (5) $\frac{dB'}{dt'} = B'(1 - B') - 1$, которое в интервале $0 \leq B' \leq 1$ имеет всегда отрицательную производную $\frac{dB'}{dt'} < 0$, то есть B' убывает до нуля. Таким образом, экогеосистема переходит в устойчивое состояние, характеризуемое максимальной донной абразией и нулевой биомассой (отсутствие донного биоценоза). Попадание системы в точку $(A', B') = (1, 1)$ ни при каких ситуациях быть не может, что согласуется с природной обстановкой (ситуация с максимальными значениями биомассы и скорости донной абразии быть не может). Во всех случаях при достижении траекторией какой-либо стороны квадрата дальнейшее движение происходит по этой стороне в одну из точек квадрата.

Фазовый портрет для случая, когда отсутствует устойчивая особая точка, показан на рис. 3 ($a_1 = 1/2, a_2 = 1/4, a_3 = 1$). Здесь любая траектория, выходящая из произвольной точки квадрата, со временем выходит на одну из трех сторон квадрата (кроме стороны $B' = 1$), после чего происходит движение в одну из точек квадрата: $(B' = 1, A' = 0)$; $(B' = 0, A' = 1)$. На основе расчетных фазовых портретов (рис. 1, 3) можно предположить, что при вырождении устойчивой особой точки из двух различных пар сепаратрис синтезируется одна. В связи со сгущением фазовых траекторий в правом нижнем углу квадрата $A' = y, B' = x$.

В окрестности обоих узлов наблюдается медленный рост искоемых функций с максимальным значением роста в центральной части диагонали (при рассмотрении фазовой траектории $y = x$), что приводит к вогнуто-выпуклым кривым $B'(t')$ и $A'(t')$.

Если для узловых точек движение в их окрестности достаточно медленное, то для седловых точек происходит кратковременное замедление скорости движения в их окрестности и в дальнейшем происходит очень быстрое удаление от них (за 5–10 временных шагов траектории уходят практически на бесконечность при решении системы (5) методом Рунге-Кутты, в то же время выход в устойчивую узловую точку происходит приблизительно через 15 временных шагов).

В заключение отметим, что большой теоретический интерес представляет поиск сложных стохастических режимов в окрестности линий бифуркаций системы (1) при малых периодических флуктуациях параметров системы [6], [7]. В случае системы (5), ввиду отсутствия в ней негрубых периодических движений (линии петли, сепаратрис, седла и др.), не отмечается появление притягивающих гомоклинических структур и соответствующих им стохастических режимов при малых неавтономных периодических возмущениях автономной системы.

При таких возмущениях в численных экспериментах на линии седлоузлов (8) нами отмечено возникновение динамических неустойчивостей при некоторой критической амплитуде возмущений (внезапное возникновение расходящихся осциллирующих решений), причем эта амплитуда зависит от расположения начальной точки в устойчивой области фазовой плоскости (аттракторе седлоузла). Чем ближе начальная точка к сложной особой точке, тем меньше критическая амплитуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Есин Н. В., Московкин В. М., Дмитриев В. А. К теории управления абразивным процессом // Природные основы берегозащиты.— М.: Наука, 1987.— С. 5—17.
2. Thornes J. B. The ecology of erosion // J. Geography.— 1985.— V. 70.— № 3.— P. 222—235.
3. Арнольд В. И. Теория катастроф.— М.: МГУ.— 1983.— 80 с.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 607 с.
5. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии.— М.: Мир, 1983.— 397 с.
6. Белоусина Л. И. Малые периодические возмущения грубой автономной системы // ДАН СССР.— 1962.— Т. 148.— № 2.— С. 251—253.
7. Буриев Т. И. Динамика системы хищник—жертва с учетом периодических изменений внешней среды // Динамика биологических популяций.— Горький: Горьк. ун-т.— 1987.— С. 37—43.