АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

МОСКВА · 1983

ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ
№ 5, 1983

УДК 550.83/84

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АБРАЗИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ УСЛОВИЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО БЕРЕГОВОГО СКЛОНА

ЕСИН Н. В., МОСКОВКИН В. М., ОКУНЬ А. В.

Для анализа процесса разрушения морских берегов при отсутствии вдольберегового потока наносов в [1] предложено уравнение баланса пляжеобразующего материала в виде

$$\frac{dW}{dt} = avH - kW, \tag{1}$$

где W — объем обломочного материала на пляже, м³/м; v — скорость отступания клифа, м/год; H — высота клифа, м; a — доля материала, образующего наносы волнового поля в породах, слагающих берег; k — коэффициент истираемости наносов, 1/год; t — время, год. Для замыкания этого уравнения использовались эмпирические зависимости скорости отступания клифа от объема обломочного материала ($v = f(W)$). В случае легкоразрушаемых пород (глин, суглинков), слагающих береговой склон, эта зависимость близка к гиперболической [1, 3, 5]:

$$v = \frac{b}{W}, \tag{2}$$

где $b = \text{const}$, м³/год. Аппроксимация данных натурных наблюдений для прочных пород флиша [2] привела к зависимости [1, 3]

$$v = v_{\max}\frac{W}{W_{\text{опт}}}\left(2 - \frac{W}{W_{\text{опт}}}\right), \tag{3}$$

где $v_{\max}$ — максимальная скорость абразии, соответствующая оптимальному объему $W_{\text{опт}}$ обломочного материала.

В [1] исследовался ход абразионного процесса, протекающего в условиях неизменной высоты клифа ($H = \text{const}$). В настоящей статье рассмотрен более общий случай переменной высоты клифа. Решение задачи в такой постановке необходимо для описания эволюции поверхности шельфа и процесса срезания волнами прилегающих к морю гор в плиоцен-плейстоцене, а также для решения некоторых вопросов рационального укрепления морских берегов.

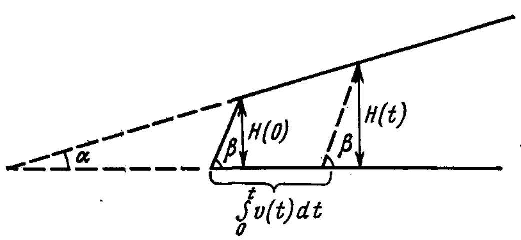

Рис. 1. Схема математической модели абразионного процесса

Дополнительное замыкание уравнения (1) удается сделать с помощью кинематического соотношения в предположении прямолинейного берегового склона и параллельного отступания прямолинейного клифа. Эти два предположения наиболее часто выполняются в реальной природной обстановке. Кинематическое соотношение получим из геометрического подобия треугольников, возникающих при параллельном отступании клифа (рис. 1):

$$\frac{H(t)}{\int\limits_0^t v(t)\,dt + \frac{H(t)}{\mathrm{tg}\,\beta} + H(0)\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}\right)} = \mathrm{tg}\,\alpha, \tag{4}$$

где α, β — углы наклона берегового склона и клифа. Продифференцировав (4), получим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}\right)}v(t). \tag{5}$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем рассматривать это уравнение при $\beta = 90°$ (вертикальный клиф). Итак, мы пришли к системе двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dW}{dt} = af(W)H - kW;$$
$$\frac{dH}{dt} = \mathrm{tg}\,\alpha f(W), \tag{6}$$

где $v = f(W)$. Начальные условия: $W(0) = W_0$, $H(0) = H_0$.

Система уравнений (6) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2W}{dt^2} + k\left(1 - \frac{Wf'(W)}{f(W)}\right)\frac{dW}{dt} - \frac{f'(W)}{f(W)}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 - a\,\mathrm{tg}\,\alpha f^2(W) = 0, \tag{7}$$

где штрихи над функцией $f(W)$ означают дифференцирование ее по W.

Уравнение (7) в свою очередь заменой $P(W) = dW/dt$ сводится к уравнению Абеля второго рода [4]. Дальнейшие возможности аналитического исследования этого уравнения зависят от конкретного вида функции $f(W)$. Для условий, описываемых функцией (2), аналитическое исследование системы уравнений (6) удобно провести в фазовой плоскости (H, W), для чего следует разделить первое уравнение системы на второе:

$$\frac{dW}{dH} + \frac{k}{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}W^2 = \frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}H. \tag{8}$$

Это специальное уравнение Риккати, приводимое к уравнению Бесселя [4] с помощью замен:

$$v(H) = \frac{k}{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}W(H), \quad \frac{du}{dH} = v(H)\,u(H).$$

Окончательное общее решение уравнения (8) получено нами в виде

$$W(H) = \frac{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}{k}\left[\frac{1}{2H} + \frac{Z'_{1/3}(\lambda i H^{3/2})}{Z_{1/3}(\lambda i H^{3/2})}\right], \tag{9}$$

где $Z_{1/3}(x) = C_1 I_{1/3}(x) + C_2 I_{-1/3}(x)$, C_1, C_2 — постоянные интегрирования, $I_{1/3}$ и $I_{-1/3}$ — функции Бесселя,

$$\lambda = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{ak}{b}}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha},$$

i — мнимая единица; штрих над функцией Z означает дифференцирование ее по H.

Асимптотическое решение (6) при больших H имеет вид

$$W(H) \approx \sqrt{\frac{abH}{k}}. \tag{10}$$

Оно совпадает с предельным (при $t \to \infty$) решением для случая $H = \text{const}$ [1].

При численном и аналитическом решении системы уравнений (6) она предварительно приводилась к безразмерному виду

$$\frac{dW'}{dt'} = K\frac{H'}{W'} - W';$$
$$\frac{dH'}{dt'} = \frac{1}{W'}, \tag{11}$$

где

$$H'=\frac{H}{\overline{H}},\quad W'=\frac{W}{\overline{W}},\quad t'=kt,\quad \overline{H}=\frac{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\overline{W}k},\quad K=\frac{ab^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{k^2\overline{W}^3}.$$

За характерный объем материала можно взять начальный объем $\overline{W}=W(0)=W_0\neq 0$.

На рис. 2 представлены результаты численных расчетов с шагом $\Delta t'=0{,}1$, выполненные методом Рунге — Кутта, при $W'(0)=1$, $H'(0)==\gamma=5/6$ и разных K на временнóм интервале 0,2, соответствующем реальному 20-летнему интервалу времени при $k=0{,}1$ 1/год. При $K=$

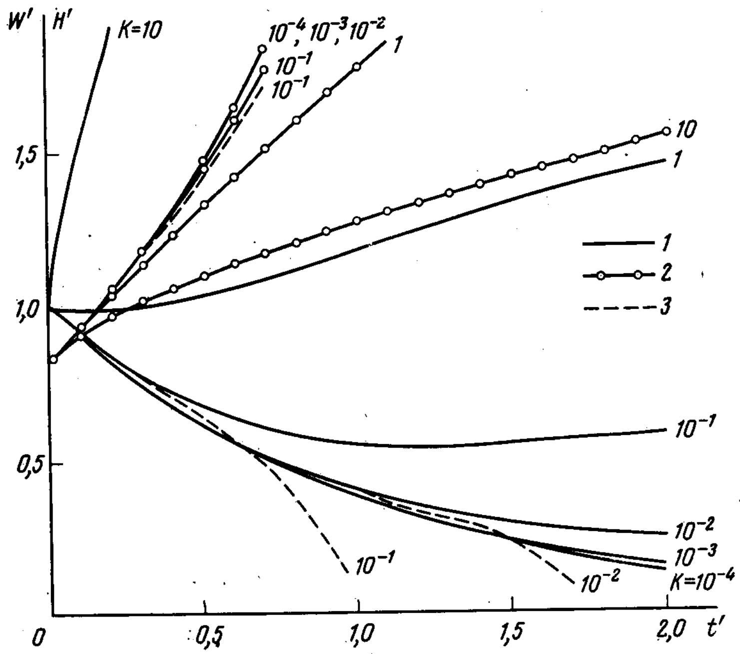

Рис. 2. Численные и приближенные решения системы уравнений (11)
1 — численные решения $W'(t')$; 2 — численные решения $H'(t')$; 3 — приближенные решения $W'(t')$ и $H'(t')$

$=10^{-4}$—10^{-2} величина $W'(t')$ является монотонно убывающей функцией на рассматриваемом интервале. При $K=0{,}1$ кривая $W'(t')$ имеет минимум при $t'\approx 1{,}2$. Другие кривые ($K=10^{-4}$—10^{-2}) также имеют минимумы при $t'>2$, причем, чем меньше K, тем меньше минимальное значение $W'(t')$ и тем более длительный отрезок времени требуется для его достижения. Штриховой линией показаны решения, полученные методом малого параметра при $K\leqslant 0{,}1$ на участках, где они отличаются от численных решений. При $K=10^{-4}$, 10^{-3} оба решения для $W'(t')$ совпадают на интервале времени 0,2 с численным решением. В этих случаях хорошую точность дает даже нулевое приближение (оно отличается от численного в третьем знаке после запятой). Чем больше величина K, тем меньше интервал совпадения решений.

При $K=1$ величина $W'(t')$ имеет минимум в окрестности точки $t'==0{,}1$. При $K=10$ $W'(t')$ возрастает.

Таким образом, при некотором K, лежащем в интервале $1<K<10$, существует граничная кривая, разделяющая класс кривых, возрастающих в начальный отрезок времени, от класса кривых, убывающих в этот отрезок времени. Такая граничная кривая, как будет ясно из дальнейшего изложения, соответствует случаю, когда начальная точка (H_0', W_0') лежит в фазовой плоскости на предельной кривой $W'=\sqrt{KH'}$. Это будет иметь место при $K=6/5$. Таким образом, в зависимости от начального значения W_0' и других параметров абразии в начальной стадии процесса объем гальки может как возрастать, так и уменьшаться, что совпадает с выводами работы [1].

В заключение отметим, что численные расчеты при $K=1$ (рис. 2) соответствуют данным натурных измерений [1, 3, 6]: $a=0{,}02$; $b=40$ м³/год; $W(0)=\overline{W}=10$ м²; $H(0)=10$ м — и характерным дополнительным параметрам $k=0{,}1$ 1/год, $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}3$.

Проведем теперь анализ системы уравнений (6) в случае квадратичной функции $f(W)$, имеющей вид (3). Для этого приведем систему уравнений (6) к безразмерному виду

$$\frac{dW'}{dt'}=W'(2-W')H'-W';\qquad \frac{dH'}{dt'}=KW'(2-W'),\tag{12}$$

где

$$W'=\frac{W}{W_{\text{опт}}},\quad H'=\frac{H}{\overline{H}},\quad t'=kt,\quad \overline{H}=\frac{kW_{\text{опт}}}{aV_{\max}},\quad K=\frac{aV_{\max}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{k^2W_{\text{опт}}}.$$

В отличие от предыдущего случая аналитических решений здесь получить невозможно. Поэтому рассмотрим только численные решения.

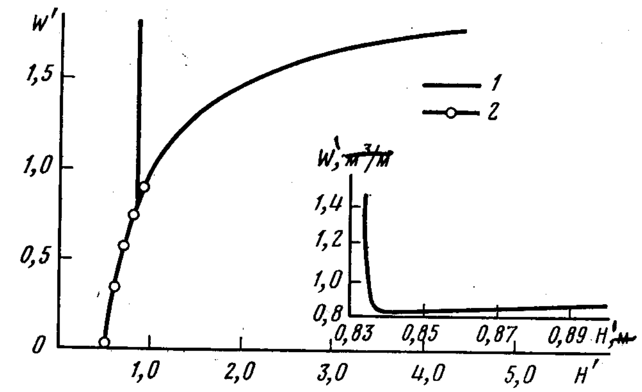

Рис. 3. Численное решение системы уравнений (12) в фазовой плоскости $W'(H')$ (на врезке — детальное поведение решения в окрестности минимума)
1 — численное решение; 2 — предельное решение

Для условий побережья Новороссийского геологического района [1—3] имеем $k=0{,}1$ м/год; $a=0{,}3$; $v_{\max}=0{,}01$ м/год; $W_{\text{опт}}=0{,}5$ м²; $W(0)=1{,}0$ м²; $H(0)=13{,}9$ м. По этим данным получим следующие начальные условия, необходимые для решения системы уравнений (12): $W'(0)=2$, $H'(0)==5/6$. Параметр K брался равным 10^{-3}, что соответствует реальному уклону берегового склона в рассматриваемом районе: $\alpha\approx 9°$-$10°$. На рис. 3 и 4 представлены численные решения рассматриваемой системы для вышеуказанных условий. Решение в фазовой плоскости имеет четко выраженный минимум при $H'=0{,}841$, равный $W'_{\min}=0{,}811$. Это соответствует моменту времени $t'=8{,}15$ ($t=81{,}5$ лет). На врезке к рис. 3 показано поведение решения в фазовой плоскости в окрестности этого минимума.

При $H'\geqslant 2$ решение $W'(H')$ выходит на предельное $W'=2-1/H'$, которое следует из первого уравнения системы (12) при $dW'/dt'=0$. При этом W' имеет горизонтальную асимптоту $W'=2$. Из анализа второго уравнения системы (12) видим, что кривая $H'(t')$ имеет две точки перегиба, соответствующие $W'_{\min}=(dW'/dt'=0)$ и $W'=1$. Отметим, что графики на рис. 4 представляют собой прогноз на 1500 лет вперед долговременной эволюции береговой системы для условий Новороссийского геологического района.

В целом полученные решения показывают, что со временем параметры абразии (W, v) становятся независимыми от начальных условий.

На рис. 5 показаны численные решения в фазовой плоскости при $K=1$; 10; 100 и двух начальных условиях: $W'(^5/_6)=2$ и $W'(0)=2$. Хорошо виден отмеченный выше эффект порождения класса кривых с минимумами. Рассматривая решения в фазовой плоскости, приведенные на рис. 3, 5, видим закономерное достижение минимумов на пересечении с предельной кривой. На рис. 5 видно закономерное увеличение и смещение минимума в сторону больших H' при увеличении K, а также то, что, чем больше начальная высота клифа (при одинаковых начальных объемах материала), тем больше минимальное значение функции W'. Это обстоятельство дает следующие практические рекомендации. Если в одинаковых прочих условиях высота клифа на одном из участков больше, чем на соседнем, то искусственное изъятие материала целесообразно производить на участке с большей высотой клифа, так как в этом случае быстрее произойдет восполнение изъятого материала за счет поступления с клифа.

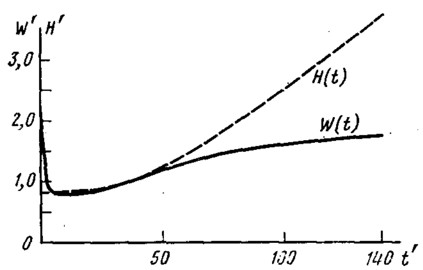

Рис. 4

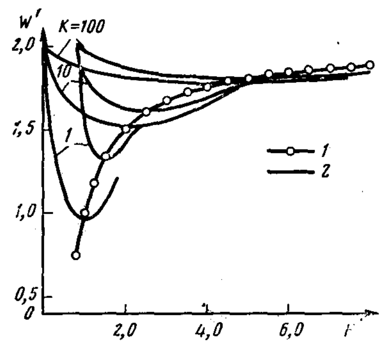

Рис. 5

Рис. 4. Численные решения системы уравнений (12)

Рис. 5. Численные решения системы уравнений (12) в фазовой плоскости $W'(H')$ при различных начальных условиях и значениях K
1 — предельное решение; 2 — численные решения

В соответствии с характером поведения решения W по закону $f(W)$ будет вести себя скорость отступания клифа (скорость абразии). Рассмотрим изменение скорости абразии на примере побережья Новороссийского геологического района (рис. 3, 4). Так как скорость абразии изменяется по закону $W'(2-W')$, то ее максимальное значение достигается при единичном объеме материала ($W'=1$), который отделяет область увеличения скорости абразии при возрастании W' от области ее уменьшения также при возрастании W'.

Таким образом, в первые годы, когда W' уменьшается от 2 до 1, будет происходить увеличение скорости абразии до ее максимального значения. Это будет иметь место в интервале от 0 до 1,6—1,7, т. е. в течение первых 16—17 лет. Далее скорость абразии начнет уменьшаться сначала достаточно быстро, затем все медленнее и медленнее. В интервале 50—200 лет (т. е. в течение 150 лет) скорость абразии стабилизируется в окрестности своего минимального значения, медленно увеличиваясь, начиная с $t=81{,}5$ лет, где функция W достигает своего минимума. При $t>200$ лет начинается более интенсивный рост скорости абразии. Второе изменение характера процесса произойдет при достижении уровня $W'=1$ ($W=0{,}5$ м^2), т. е. при $t=356$ лет. С этого времени начнется замедленное затухание процесса абразии. На конечный прогнозируемый момент времени $t=1500$ лет объем материала и высота клифа равны соответственно $W=0{,}875$ м^2 и $H=66{,}67$ м.

Численная реализация модели (6) оформлена в виде специальной программы, записанной на языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1020. В программе допускаются задание произвольных функций $f(W)$, а также выдача массивов скоростей и точек отступания клифа. В дополнение к двум выше рассмотренным случаям проделаны расчеты для линейной и экспоненциальной функций $f(W)$, анализ которых здесь не приводим.

Теперь укажем на один важный вывод, который можно сделать из анализа численных решений. В зависимости от начальных условий H_0, W_0 решения в фазовой плоскости H, W ведут себя различным образом:

1) когда начальная точка H_0, W_0 находится выше предельной кривой $af(W)H-kW=0$, фазовая траектория (решение $W(H)$) монотонно убывает до пересечения с этой кривой, где достигает своего минимума и далее асимптотически стремится к предельной кривой;

2) когда начальная точка H_0, W_0 находится ниже предельной кривой, имеет место монотонное асимптотическое стремление к ней;

3) когда начальная точка H_0, W_0 находится на предельной кривой, имеет место движение по этой кривой (фазовая траектория совпадает с предельной кривой). Именно этот случай имел место, когда говорилось о существовании граничной кривой в плоскости t, W, разделяющей класс кривых возрастающих и убывающих (эта граничная кривая при переходе в фазовую плоскость трансформируется в предельную).

Полученные решения позволяют сделать некоторые практические рекомендации при хозяйственном освоении береговой зоны. Например, нецелесообразно делать слишком большую отсыпку материала для наращивания пляжа и защиты берега, так как в результате истирания гальки в первые годы большой его объем будет бесполезно потерян. Поэтому начальный объем материала лучше планировать исходя из предельной кривой. То же можно сказать и об искусственном изъятии материала.

Рассмотренная модель может быть использована при хозяйственном освоении прибрежной зоны в случае, когда берегоукрепительные работы планируется вести с помощью формирования пляжного материала, без укрепления берегов (клифов) подпорными стенами и т. д. В противном случае модель неприменима, так как из моделируемой реальной береговой системы автоматически исключается важная отрицательная обратная связь (защитное, точнее регулирующее, влияние обломочного материала на разрушение клифов). Таким образом, данная модель наиболее хорошо подходит к управлению нарушенных естественных береговых систем, когда это управление сводится к подстройке системы к режиму динамического равновесия. При дальнейшем развитии модели в ней можно учесть произвольную начальную форму берега.

Еще одним важным следствием выполненного анализа является следующее. Через геологически короткий отрезок времени (десятки, сотни лет) абразия переходит в режим, не зависящий от начальных условий (W стремится к предельному значению и становится близким $W_{\text{пр}}$). Эта особенность абразии позволяет при анализе эволюции шельфа в плиоцен-плейстоцене рассчитывать в первом приближении ее скорость (в зависимости от высоты клифа) по формулам, описывающим этот предельный режим, что существенно упрощает реконструкцию береговых палеопроцессов.

Литература

1. *Есин Н. В.* О роли обломочного материала в абразионном процессе.— Океанология, 1980, т. 20, № 1, с. 111—115.
2. *Есин Н. В., Савин М. Т.* Абразия флишевого берега Черноморского побережья.— Океанология, 1970, т. 10, № 1.
3. *Есин Н. В., Савин М. Т., Жиляев А. П.* Абразионный процесс на морском берегу. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
5. *Шуйский Ю. Д.* Механизм развития абразионного профиля в береговой зоне моря.— Записки Болгарского геологического общества, 1976, т. 37, кн. 3, с. 112—115.
6. *Шуйский Ю. Д., Шевченко В. Я.* Динамика берегов Черного моря в районе мыса Бурнас.— Геоморфология, 1975, № 4, с. 98—104.

ЮО ИО АН СССР
ВНИИВО

Поступила в редакцию
3.XII.1981