Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №1. С. 31–39.

УДК 517.95 DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-31-39
MSC 35J40

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Б. Д. Кошанов, А. Д. Кунтуарова

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Алматы, 050010, Казахстан
Институт математики и математического моделирования,
Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: koshanov@list.ru, araika.14.89@mail.ru

Аннотация. Для эллиптического уравнения $2l$–го порядка с постоянными вещественными коэффициентами рассмотрена краевая задача с нормальными производными $(k_j - 1)$–го порядка, $j = 1, \dots, l$, где $1 \le k_1 < \dots < k_l \le 2l$. При $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j + 1$–задачу Неймана. В данной статье получены условие фредгольмовой разрешимости этой задачи в пространстве $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ и доказана эквивалентность условии Шапиро – Лопатинского с условием фредгольмовости обобщенной задачи Неймана.

Ключевые слова: эллиптические уравнения высокого порядка, обобщенная задача Неймана, фредгольмова разрешимость задачи, нормальные производные на границе.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта АР 09559378 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Для цитирования: Кошанов Б. Д., Кунтуарова А. Д. 2021. О фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи Неймана. Прикладная математика & Физика. 53(1): 31–39. DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-31-39.

ON THE FREDHOLM SOLVABILITY OF THE GENERALIZED NEUMANN PROBLEM

B. Koshanov, A. Kuntuarova

(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*)

Abay Kazakh national pedagogical university,
Almaty, 050010, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical modeling,
Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: koshanov@list.ru, araika.14.89@mail.ru
Received February, 27, 2020

Abstract. For the elliptic equation of $2l$–th order with of constant real coefficients we consider boundary value problem of the normal derivatives $(k_j - 1)$ order, $j = 1, \dots, l$, where $1 \le k_1 < \dots < k_l \le 2l$. When $k_j = j$ it moves into the Dirichlet problem, and when $k_j = j + 1$ it moves into the Neumann problem. In this paper, we obtain a condition for the Fredholm solvability of this problem in the space $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ and prove the equivalence of the Shapiro – Lopatinskii condition with the Fredholm condition for the generalized Neumann problem.

Key words: higher order elliptic equations, generalized Neumann problem, Fredholm solvability of the problem, normal derivatives on the boundary

Acknowledgements: The work is supported by the Grant AP 09559378 Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

For citation: Koshanov B. D., Kuntuarova A. D. 2021. On the Fredholm solvability of the generalized Neumann problem. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 31–39 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-31-39.

---

1. Введение. Методы комплексного анализа составляют классическое направление в исследовании эллиптических уравнений и уравнений смешанного типа на плоскости и в настоящее время получены фундаментальные результаты. В начале 60-х годов прошлого столетия для эллиптических уравнений и систем был развить новый теоретико-функциональный подход, основанный на использовании функций, аналитических по Дуглису [14, 19]. В работах [19, 12] выяснилось, что в теории эллиптических уравнений и систем важную роль играют функции, аналитические по Дуглису. Эти функции являются решениями эллиптической системы первого порядка, обобщающей классическую систему Коши-Римана. В работах [16, 13] этот подход уже был успешно применен к задачам плоской теории упругости (включая общий анизотропный случай). Однако для областей с кусочно- гладкой границей и уравнений с непрерывными коэффициентами и, особенно, для задач с нелокальными краевыми условиями этот подход требует своего дальнейшего развития. Несомненный интерес представляет также описание условии фредгольмовости и вычисление формулы индекса для так называемой обобщенной задачи Неймана для эллиптических уравнений высокого порядка [6, 7]. В этой задаче на границе области задается некоторый набор нормальных производных различного порядка, число которых равно половине порядка эллиптического уравнения. В 1988 году [3] предложил краевую задачу для полигармонического уравнения, которая заключается в задании последовательных нормальных производных решения на границе области, начиная с некоторого номера k. При $k = 0$ она соответствует классической задаче Дирихле, а при $k = 1$ – задаче Неймана. В общем случае при $k \geq 2$ ее естественно назвать обобщенной задачей Неймана. Представляет интерес случай, когда порядки этих производные задаются произвольно по возрастанию.

2. Постановка задачи и основные результаты. Пусть $D-$ ограниченная односвязная область с гладкой границей Г. В этой области для общего эллиптического уравнения $2l-$го порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r} + \sum_{0\leq r\leq k\leq 2l-1} a_{rk}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = F \tag{1}$$

рассматривается краевая задача

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_\Gamma = f_j, \quad j = 1,\ldots,l, \tag{2}$$

где $a_r \in \mathbb{R}$, $a_{kr} \in C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < 1$, $n = n_1 + in_2-$ единичная внешняя нормаль к границе Г, и натуральные $k_j : 1 \leq k_1 < \ldots < k_l \leq 2l$.

Для полигармонического уравнения последняя задача была изучена [3]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен [5]. При $a_{kr} = 0$, $F = 0$ задача (1),(2) была исследована в работе [4]. При $a_{kr} \neq 0$, $F \neq 0$ задача (1),(2) подробно исследовалась в работе [6] в пространстве $C_a^{2l-1,\mu}(\overline{D})$ и в [7] в пространстве $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, где, в частности, были найдены необходимые и достаточные условия их фредгольмовости. В работе [17] задача (1),(2) была исследована в многосвязной области. При решений таких задач в основном используются теория сингулярных интегральных уравнений на гладких, кусочно-гладких контурах [1, 4]. Работа [8] посвящена исследованию разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в многомерном шаре.

Нахождение необходимой и достаточной условии фредгольмовости задачи (1), (2) может быть описано следующим образом. Пусть ν_k, $1 \leq k \leq m$, - все различные корни характеристического уравнения $a_0 + a_1 z + \ldots + a_{2l} z^{2l} = 0$ в верхней полуплоскости и l_k- кратность $k-$го корня, так что $l_1 + \ldots + l_m = l$.

Введем дробно линейные по z функции

$$\omega(e,z) = \frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z}, \ 1 \leq j \leq l, \tag{3}$$

где зависимость от единичного касательного вектора $e = e_1 + ie_2$ к контуру Г указана явно. Для определенности вектор e ориентируем положительно по отношению к области D, т. е. D лежит слева от этого вектора. В частности,

$$n_1 = e_2, \quad n_2 = -e_1. \tag{4}$$

Исходя из l-вектор-функции $g(\zeta) = (g_1(\zeta),\ldots,g_n(\zeta))$, аналитической в окрестности точек $\zeta_1,\ldots,\zeta_m$, введем блочную $l \times l-$ матрицу

$$W_g(\zeta_1,\ldots,\zeta_m) = (W_g(\zeta_1),\ldots,W_g(\zeta_m)), \tag{5}$$

где матрица $W_g(\zeta_k) \in \mathbb{C}^{l\times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\zeta_k), g'(\zeta_k),\ldots, \frac{1}{(l_k-1)!}g^{(l_k-1)}(\zeta_k).$$

В качестве g ниже используется вектор

$$g_j(\zeta) = \zeta^{k_j-1}, \ 1 \leq j \leq l. \tag{6}$$

В этих обозначениях [6] *задача (1), (2) фредгольмова тогда и только тогда, когда*

$$\det W_g[\omega(e,\nu_1),\ldots,\omega(e,\nu_m)] \neq 0, \quad e \in \mathbb{T}, \tag{7}$$

где $\mathbb{T}$ *– означает единичную окружность.* Это условие зависит только от набора $k_1, k_2,\ldots,k_l$. Следовательно, при фиксированных k_j и при выполнении условия (7) задача (1), (2) фредгольмова в любой области.

С точки зрения общей эллиптической теории [11] задача (1),(2) фредгольмова в пространстве $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда ее краевые условия удовлетворяют так называемому условию дополнительности (или условию Шапиро – Лопатинского) [9]. В этом случае говорят также [18], что краевые условия (2) накрывают дифференциальный оператор

$$L = \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l-r} \partial y^r},$$

отвечающий главной части (1). Указанное условие состоит в следующем: исходя из фиксированной точки $t \in \Gamma$, дифференцирования по x и y в выражениях операторов L и B_j заменим на, соответственно, $e_1(t) + zn_1(t)$ и $e_2(t) + zn_2(t)$. В результате получим многочлены

$$L(n, z) = \sum_{r=0}^{2l} a_r (e_1 + zn_1)^{2l-r} (e_2 + zn_2)^r$$

и

$$B_j(z) = [n_1(e_1 + zn_1) + n_2(e_2 + zn_2)]^{k_j - 1} = z^{k_j - 1}, \quad 1 \le j \le l.$$

С учетом (4) в обозначениях (3) многочлен $L(n, z)$ можем записать в виде

$$L(n, z) = (e_1 + zn_1)^{2l} \sum_{r=0}^{2l} a_r [-\omega(z)]^r,$$

так что $L(n, \zeta) = 0$ равносильно

$$-\omega(\zeta) = \nu, \tag{8}$$

где ν– произвольный корень характеристического уравнения. При этом их соответствующие кратности совпадают. Очевидно, преобразование (3) переводит верхнюю полуплоскость на себя, так что аналогичным свойством обладает и преобразование $\zeta \to -\omega(\bar{\zeta})$. В частности, многочлен l–степени

$$L^+(z) = (z - \zeta_1)^{l_1} \ldots (z - \zeta_m)^{l_m}, \quad -\omega(\zeta_j) = \bar{\nu}_j, \tag{9}$$

образован корнями уравнения $L(n, \zeta) = 0$, лежащими в верхней полуплоскости.

В принятых обозначениях условие дополнительности заключается в линейной независимости многочленов $B_j(z)$, $1 \le j \le l$, по модулю многочлена $L^+(z)$. Таким образом, это условие должно быть эквивалентно условию (6), полученному другим способом. Этот факт легко установить непосредственно.

Теорема 1. *Условие (7) выполнено тогда и только тогда, когда многочлены $B_j(z) = z^{k_j-1}$, $1 \le j \le l$, линейно независимы по модулю многочлена $L^+(z)$.*

Доказательство. Предположим, что эти многочлены линейно зависимы по модулю $L^+(z)$, т. е. найдется их нетривиальная линейная комбинация $B = \alpha_1 B_1 + \ldots + \alpha_l B_l$, кратная L^+. В обозначениях (6) многочлен $B_j = g_j$, так что этот факт можем записать в виде

$$B(z) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j z^{k_j - 1} = Q(z) L^+(z),$$

с некоторым многочленом Q. В соответствии с (9) это соотношение означает, что многочлен B в точках ζ_k имеет нуль порядка l_k или, что равносильно,

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j g_j^{(s)}(\zeta_k) = 0, \quad 0 \le s \le l_k - 1, \ 1 \le k \le m. \tag{10}$$

Эти равенства представляют собой однородную систему l уравнений относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Из определения (5) видно, что матрица этой системы совпадает с матрицей, транспонированной к $W_g(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$. Поэтому ненулевое решение системы (10) возможно тогда и только тогда, когда

$$\det W_g(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = 0. \tag{11}$$

Согласно определению (3) равенство (8) равносильно $\overline{\zeta}_j = \omega(\nu_j)$, поэтому равенство (11) можем выразить в форме обращения в нуль определителя в левой части (7). Итак, нарушение условия дополнительности равносильно нарушению условия (7), что завершает доказательство теоремы.

Заметим, что условие (7) не изменится, если от вектора g перейти к вектору q, определяемому соотношением $g(\zeta) = \zeta^{k_1-1}q(\zeta)$, или, в явном виде,

$$q(\zeta) = (1, \zeta^{s_1}, \dots, \zeta^{s_{l-1}}), \quad s_j = k_{j+1} - k_1. \tag{12}$$

В самом деле, как отмечено в [6, 10], определитель матриц W_g и W_q отличаются друг от друга ненулевым множителем.

Условию (7) можно придать другой вид, более удобный для использования. С этой целью рассмотрим определитель матрицы $W_q(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$. Он представляет собой многочлен переменных ζ_j, который в терминах мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и β можно записать в форме

$$\det W_q(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \sum\nolimits_{\alpha \le \beta} c_\alpha \zeta^\alpha, \tag{13}$$

где запись $\alpha \le \beta$ означает неравенство $\alpha_j \le \beta_j$ для всех j и использовано обычное обозначение $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_m^{\alpha_m}$. Введем еще дробно линейные функции

$$\gamma_k(z) = \frac{\nu_k - z}{1 + \nu_k z}, \quad 1 \le k \le m. \tag{14}$$

Теорема 2. *Задача (1), (2) фредгольмова тогда и только тогда, когда рациональная функция*

$$R(z) = \sum\nolimits_{\alpha \le \beta} c_\alpha [\gamma_1(z)]^{\alpha_1} \cdots [\gamma_m(z)]^{\alpha_m} \tag{15}$$

не имеет вещественных корней на расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Доказательство. Из сравнения операций (3) и (14) следует, что

$$\det W_g[\omega(e, \nu_1), \dots, \omega(e, \nu_m)] = R(e_2/e_1). \tag{16}$$

Функция $\omega(e, \nu)$ в (3) четна по переменной $e \in \mathbb{T}$ и потому величина

$$\arg\, \det W_q[\omega(e, \nu_1), \dots \omega(e, \nu_m)]\Big|_{\mathbb{T}} = 2\arg\, \det W_q[\omega(e, \nu_1), \dots \omega(e, \nu_m)]\Big|_{\mathbb{T}^+},$$

где $\mathbb{T}^+$ есть полуокружность в правой полуплоскости. Отображение $e = e_1 + ie_2 \longrightarrow t = e_2/e_1$ осуществляет гомеоморфизм этой полуокружности на расширенную вещественную прямую $\overline{\mathbb{R}}$, причем обход ее от точки $e = -i$ к $e = i$ соответствует движению на прямой в положительном направлении. Поэтому в соответствии с (16) условие (7) равносильно тому, что функция R не имеет вещественных корней на расширенной действительной прямой. Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее функцию $\gamma(\zeta)$, определяемую (14) с $\nu = \nu_k$. Данное преобразование $\gamma_k(z)$ меняет местами точки $\pm i$ и инволютивно:

$$\gamma(\pm i) = \mp i, \quad \gamma[\gamma(\zeta)] \equiv \zeta. \tag{17}$$

Кроме того, при $\nu_k = i$ имеет место тождество $\gamma_k(\zeta) \equiv i$.

Лемма 1. *При* $\nu \ne i$. *Преобразование* $\zeta \longrightarrow \gamma(\zeta)$ *переводит нижнюю полуплоскость на круг*

$$B = \{z : |z|^2 + 1 - 2\rho Imz < 0\}, \; \rho = \frac{|\nu|^2 + 1}{2Im\nu}. \tag{18}$$

Этот круг имеет центром точку $i\rho$ *радиус* $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$, *целиком лежит в верхней полуплоскости, содержит точку* $z = i$ *и инвариантен относительно инволюции* $z \mapsto z' = -1/z$.

Кроме того, точки ν *и* $\nu' = -1/\nu$ *лежат на его граничной окружности* $L = \partial B$.
Доказательство. В силу (14) имеем

$$Im[\gamma(\zeta)] = \frac{(1 + |\zeta|^2)Im\nu - (1 + |\nu|^2)Im\zeta}{|1 + \nu\zeta|^2}.$$

Отсюда образом нижней полуплоскости является круг B, который целиком лежит в верхней полуплоскости и содержит точку $z = i$. В силу принципа симметрии точки $\pm i$ симметричны как относительно прямой $\mathbb{R}$, так и окружности $L = \partial B$. В частности, центр этой окружности должен лежать на мнимой оси. Обозначая центр и радиус этой окружности, соответственно, $i\rho$ и r, приходим к соотношению $|i - i\rho||i + i\rho| = r^2$, откуда $r^2 = \rho^2 - 1$. Уравнение $|z - i\rho|^2 = r^2$ окружности L можем записать в виде $|z|^2 + 1 - 2\rho Imz = 0$, что доказывает описание (18) круга B.
Очевидно, что точки $\gamma(0) = \nu$ и $\gamma(\infty) = -1/\nu$ лежат на L. В частности, подставляя в это уравнение $z = \nu$,

приходим к выражению для ρ в (18). То, что окружность L инвариантна относительно преобразования $z \mapsto z' = -1/z$, вытекает непосредственно из ее уравнения. Лемма доказана.

Лемма 1 используется для случая $m = 2$ двух точек ν_1, ν_2, которые в соответствие с теоремой 2 [6] без ограничения общности можно считать различными. Пусть их нумерация такова, что $\nu_1 \neq i$. Тогда в силу (17) преобразование γ_1 переводит круг B на нижнюю полуплоскость, и можно ввести функцию

$$S(z) = R[\gamma_1(z)] = (\det W_g)[z, \delta(z)], \;\; \delta(z) = \gamma_2[\gamma_1(z)], \tag{19}$$

аналитическую в круге B. В явном виде имеет место

$$\delta(z) = \frac{1 + \tau z}{\tau - z}, \;\; \tau = \frac{1 + \nu_1\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \in B. \tag{20}$$

То, что точка τ не принадлежит замкнутому кругу $\overline{B}$, является следствием леммы 1. В самом деле, $\tau = -1/[\gamma_1(\nu_2)]$, и по лемме 1 точка $z = \gamma_1(\nu_2)$ лежит вне $\overline{B}$, так что это верно и для $\tau = z' = 1/z$.

По отношению к функции S теорема 2 принимает следующую форму.

Теорема 3. *Пусть $m = 2$ с $\nu_2 \neq \nu_1 \neq i$ и приняты обозначения леммы 1. Тогда фредгольмовость задачи (1), (2) равносильна тому, что функция $S(z)$ не имеет нулей на окружности $L = \partial B$.*

Заметим, что, как и R, функция S обращается в нуль в точках $\pm i$. Эта функция особенно упрощается, если $1 + \nu_1\nu_2 = 0$, тогда преобразование δ в (20) представляет собой инволюцию $z \mapsto z' = -1/z$. В этом случае теорема 2 переходит в теорему 3 из работы [6].

3. Применение результатов к общему уравнению четвертого и шестого порядков. Применение теоремы 3 на примере для уравнения (1) четвертого порядка. Поскольку на фредгольмовости задачи младшие члены не оказывают влияния, можно ограничиться главной частью уравнения с $\nu_2 \neq \nu_1 \neq i$. Это уравнение может быть записано в виде

$$L_1 L_2 u = 0 \tag{21}$$

с операторами второго порядка

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2(\operatorname{Re}\nu_k)\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + |\nu_k|^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad k = 1, 2.$$

По отношению к разности $s = k_2 - k_1$, которая в рассматриваемом случае принимает три значения $s = 1, 2, 3$, задача (2) запишется в форме

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_\Gamma = f_1, \;\; \left.\frac{\partial^{i+s} u}{\partial n^{i+s}}\right|_\Gamma = f_2, \;\; 0 \le i \le 3 - s. \tag{22_s}$$

Согласно (5), (13) в рассматриваемом случае матрица W_q принимает вид

$$W_q(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1^s & z_2^s \end{pmatrix}, \quad \det W_q(z_1, z_2) = z_2^s - z_1^s,$$

так что $S(z) = [\delta(z)]^s - z^s$. В явном виде

$$S(z) = \frac{(1 + z^2)P_s(z)}{(\tau - z)^s},$$

где $P_1(z) = 1, \; P_2(z) = -z^2 + 2\tau z + 1$ и

$$P_3(z) = [qz^2 + (1 - q)\tau z + 1][q^2 z^2 + (1 - q^2)\tau z + 1], \;\; q = e^{2\pi i/3}. \tag{23}$$

Заметим, что многочлен P_2 отличен от нуля в $\overline{B}$. В самом деле, пусть $z^2 - 2\tau z - 1 = 0$ для некоторого $z \in \overline{B}$. Так что точка $z' = -1/z$ также принадлежит $\overline{B}$, то и точка $\tau = (z + z')/2 \in \overline{B}$, что противоречит (20).

Поскольку в рассматриваемом случае $\sum_{i>j} l_i l_j = 3$, то на основании теоремы 2 [6] отсюда получаем следующее заключение.

Заключение 1. *При $s \le 2$ задача (21), (22_s) фредгольмова и её индекс равен нулю, а при $s = 3$ она фредгольмова тогда и только тогда, когда нули многочлена P_3 не лежат на граничной окружности L круга B, определяемого леммой 1 по $\nu = \nu_1$.*

Как показывает следующая лемма, при подходящем выборе ν_1 и ν_2 всегда можно добиться того, чтобы один из нулей многочлена P_3 лежал на окружности L.

Лемма 2. *Пусть точка $\nu = \nu_1$ лежит в верхней полуплоскости и в обозначениях леммы 1*

$$\tau = -i\rho - \sqrt{(\rho^2 - 1)/3}. \tag{24}$$

Тогда точка

$$v_2 = \frac{1+\tau v_1}{\tau - v_1}$$

также лежит в верхней полуплоскости и для этих точек фредгольмовость задачи (21), (22_s) нарушена.

Доказательство. Убедимся прежде всего в том, что точка v_2 лежит в верхней полуплоскости. В самом деле, из определения v_2 видно, что $\tau = -1/\gamma_1(v_2)$. Поэтому, если $Imv_2 \le 0$, то в силу леммы 1 точка τ должна принадлежать $\overline{B}$, что невозможно.

Пусть it_1 и it_2, $t_2 > t_1$, – это точки пересечения окружности L с мнимой осью. Тогда, согласно (18) справедливы равенства $t_k^2 + 1 - 2\rho t_k = 0, k = 1, 2$, и, справедливо,

$$t_1 + t_2 = 2\rho,\ t_1 t_2 = 1,\ t_2 - t_1 = 2\sqrt{\rho^2 - 1}. \tag{25}$$

Утверждается, что точка $z = it_2$ является корнем первого сомножителя в (23) и, следовательно, задача (21), (22_s) не является фредгольмовой.

В самом деле, поскольку $1/z = -it_1$, уравнение $e^{2\pi i/3}z^2 - \tau(1 - e^{2\pi i/3})z + 1 = 0$ можем переписать в форме

$$e^{\pi i/3} it_2 - e^{-\pi i/3} it_1 = -i\tau\sqrt{3},$$

что с учетом соотношений (25) равносильно равенству (24).

Для эллиптических уравнений порядков выше четвертого описать явно корни соответствующих многочленов уже затруднительно. Рассмотрим, например, уравнение шестого порядка, т. е. $l = 3$. В соответствии с теоремой 2 достаточно ограничиться рассмотрением двух случаев: (i) все корни попарно различны, т. е. $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ и (ii) один из этих корней кратен, например, $l_1 = 1,\ l_2 = 2$. Соответственно этим случаям аналогично (21) имеем уравнения

$$L_1 L_2 L_3 u = f, \tag{26i}$$

$$L_1 L_2^2 u = f, \tag{26ii}$$

соответствующими операторами второго порядка. По отношению к положительным разностям $r = k_2 - k_1$ и $s = k_3 - k_2$, для которых $r + s \le 5$, задача (2) запишется в форме

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_\Gamma = f_1,\ \left.\frac{\partial^{i+s} u}{\partial n^{i+s}}\right|_\Gamma = f_2,\ \left.\frac{\partial^{i+s+1} u}{\partial n^{i+s+1}}\right|_\Gamma = f_3,\ \ 0 \le i \le 5 - r - s. \tag{$27_{r,s}$}$$

В соответствии с этим, вектор (12) следует взять в виде $q = (1, z^r, z^{r+s})$, так что для матрицы W_q в определении (5), имеем выражения

$$(i)W_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1^r & z_2^r & z_3^r \\ z_1^{r+s} & z_2^{r+s} & z_3^{r+s} \end{pmatrix},\ (ii)W_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ z_1^r & z_2^r & rz_2^{r-1} \\ z_1^{r+s} & z_2^{r+s} & (r+s)z_2^{r+s-1} \end{pmatrix}.$$

В случае (i) определитель матрицы $W_q(z_1, z_2, z_3)$ можем представить в форме

$$-detW_q = (z_1^r - z_2^r)z_3^{r+s} + (z_1^r - z_3^r)z_2^{r+s} + (z_3^r - z_2^r)z_1^{r+s}.$$

Поэтому для функции (15) имеем равенство

$$-R(z) = \frac{(1+z^2)P(z)}{[(1+v_1 z)(1+v_2 z)(1+v_3 z)]^{r+s}},$$

с некоторым многочленом $P(z)$. Здесь учтено, что при $m \ge 3$ функция $R(z)$ обращается в нуль в точках $z = \pm i$.

4. Заключение. Поскольку $\sum_{i>j} l_i l_j = 3$, то на основании теоремы 3 отсюда получаем следующее заключение.

Заключение 2. *Фредгольмовость задачи (26i), (27) равносильно отсутствию вещественных нулей многочлена $P(\zeta)$ на окружности L.*

Многочлен P при $r = 1$ согласно

$$\gamma_i(\zeta) - \gamma_j(\zeta) = \frac{(v_i - v_j)(1+\zeta^2)}{(1+v_i\zeta)(1+v_j\zeta)}$$

имеет вид

$$P(z) = \sum{}' (v_i - v_j)[(1+v_i z)(1+v_j z)]^s (v_k - z)^{s+1},$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по циклическим тройкам

$$(i, j, k) = (1, 2, 3); \quad (2, 3, 1); \quad (3, 1, 2).$$

Если дополнительно и $s = 1$, то, как показывает прямая проверка, $P(z) = c(1 + z^2)^2$ с множителем

$$c = \sum{}' (v_i - v_j)v_k^2 = (v_1 - v_2)v_3^2 + (v_2 - v_3)v_1^2 + (v_3 - v_1)v_2^2.$$

В этом случае индекс задачи равен нулю, что согласуется с теоремой 2.

Обратимся к случаю (ii), где можно считать $v_2 \neq v_1 \neq i$. В этом случае

$$detW_q = z_2^{r-1}[sz_2^s(z_2^r - z_1^r) - rz_1^r(z_2^s - z_1^s)] = z_1^{r+s-1}z_2^{r-1}(z_2 - z_1)\chi(z_2/z_1),$$

где $(q-1)\chi_{r,s}(q) = sq^s(q^r - 1) - r(q^s - 1)$ с многочленом

$$\chi_{r,s}(q) = \sum_{j=0}^{r+s-1} \alpha_j q^j, \quad \alpha_j = \begin{cases} -r, & 0 \leq j \leq s-1, \\ s, & s \leq j \leq r+s-1, \end{cases}$$

степени $r + s - 1 \leq 4$. В явной форме

$$\begin{gathered} \chi_{1,2}(q) = -1 + 2q + 2q^2, \ \chi_{2,1}(q) = -2 - 2q + q^2, \\ \chi_{1,3}(q) = -1 + 3q + 3q^2 + 3q^3, \ \chi_{3,1}(q) = -3 - 3q - 3q^2 + q^3, \\ \chi_{2,3}(q) = -2 - 2q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4, \ \chi_{3,2}(q) = -3 - 3q - 3q^2 + 2q^3 + 2q^4, \\ \chi_{2,2}(q) = -2 - 2q + 2q^2 + 2q^3 = 2(q+1)^2(q+1). \end{gathered}$$

Как и в случае $l = 2$, отсюда приходим к следующему выражению для функции $S(z)$ теоремы 3:

$$S(z) = z^{r+s}(1 + z^2)\frac{(1 + az)^{r-1}}{(a - z)^r}P_{r,s}(z), \ P_{r,s}(z) = [q_j z^2 + (1 - q_j)az + 1],$$

где q_j – корни многочлена $\chi_{r,s}(q)$, взятые с учетом кратности.

Поскольку $\sum_{i>j} l_i l_j = 2$, то на основании теоремы 3 отсюда получаем следующее заключение.

Заключение 3. *Фредгольмовость задачи (26ii), (27) равносильно отсутствию нулей многочлена $P_{r,s}$ на окружности L.*

Окончательный ответ удается дать только в случае $r = s = 2$. Для него

$$P_{2,2}(z) = (z^2 - 2\tau z - 1)^2(z^2 + 1),$$

и, как показано в случае $l = 2$ уравнения четвертого порядка, первый множитель здесь не имеет нулей в замкнутом круге $\overline{B}$. Поэтому задача $(26ii)$, $(27_{2,2})$ фредгольмова и ее индекс равен нулю.

Благодарность. *Авторы выражают благодарность за постановку задачи и внимание к работе доктору физико-математических наук, профессору Солдатову Александру Павловичу.*

Список литературы

1. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. 2010. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 18(5): 6–20.

2. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. 1962. Оценки в близи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Наука, 206.

3. Бицадзе А. В. 1988. О некоторых свойствах полигармонических функций. Дифференциальные уравнения, 24(5): 825–831.

4. Ващенко О. В., Солдатов А. П. 2006. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами. Научные ведомости БелГУ. Серия: Информатика. Прикладная математика, 21(6): 3–6.

5. Дезин А. А. 1954. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве. Доклады АН СССР, 96(5): 901–903.

6. Кошанов Б. Д., Солдатов А. П. 2016. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высшего порядка на плоскости. Дифференциальные уравнения, 52(12): 1594–1609. Doi: 10.1134/S0012266116120077.

7. Кошанов Б. Д., Солдатов А. П. 2018. О разрешимости краевых задач для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости. Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика, 91(3): 24–31. Doi: 10.31489/2018M3/24-30.

8. Кошанов Б. Д. 2013. Условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 11(154): 44–54.

9. Лопатинский Я. Б. 1953. Об одном способе приведения ганичных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Украинский математический журнал, 5(2): 123–151.

10. Малахова Н. А., Солдатов А. П. 2008. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка. Дифференциальные уравнения, 44(8): 1111–1118. Doi: 10.1134/S0012266108080089.

11. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. 1991. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 336.

12. Солдатов А. П. 1989. Эллиптические системы высокого порядка. Дифференциальные уравнения, 25(1): 136–144.

13. Солдатов А. П. 2017. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения на плоскости в многосвязной области. Владикавказский математический журнал. 19(3): 51–58.

14. Douglis A. A. 1960. On uniqueness in Cauchy probblems for ellipilc systems of equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13(4): 593–607.

15. Gilbert R. P. 1969. Function theoretic methods in partial differential equations. New York.: Academic Press, 311.

16. Soldatov A. P. 2014. Generalized potentials of double layer in plane theory of elasticity. Eurasian mathematical journal, 5(4): 78–125.

17. Soldatov A. P. 2018. On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity. Journal of Mathematical Sciences, 235(4): 484–535. Doi: 10.1007/s10958-018-4083-7.

18. Schechter M. 1950. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 12: 467–480.

19. Yeh R. Z. 1990. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. Pacific Journal of Mathematics, 142(2): 379–399.

References

1. Abapolova Ye. A., Soldatov A. P. 2010. K teorii singulyarnykh integral'nykh uravneniy na gladkom konture [On the theory of singular integral equations on a smooth contour]. Nauchnyye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika, 18(5): 6-20 (in Russian).

2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. 1962. Estimates near the boundary of solutions of elliptic partial differential equations under general boundary conditions. M.: Nauka, 206 (in Russian).

3. Bitsadze A. V. 1988. On some properties of polyharmonic functions. Differential equations, 24(5): 825-831.

4. Vashchenko O. V., Soldatov A. P. 2006. Integral'noye predstavleniye resheniy obobshchennoy sistemy Bel'trami [Integral representation of solutions of the generalized Beltrami system]. Nauchnyye vedomosti BelGU. Seriya: Informatika. Prikladnaya matematika, 21(6): 3-6 (in Russian).

5. Dezin A. A. 1954. Vtoraya krayevaya zadacha dlya poligarmonicheskogo uravneniya v prostranstve [The second boundary value problem for a polyharmonic equation in space]. Doklady AN SSSR, 96(5): 901-903 (in Russian).

6. Koshanov B. D., Soldatov A. P. 2016. Boundary value problem with normal derivatives for a higher order elliptic eguation on the plane. Differential Equations, 52(12): 1594-1609. Doi: 10.1134/S0012266116120077.

7. Koshanov B. D., Soldatov A. P. 2018. On the Solvability of the Boundary Value Problems for the Elliptic Equation of High Order on a Plane. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, 91(3): 24-31. Doi: 10.31489/2018M3/24-30.

8. Koshanov B. D. 2013. Usloviya razreshimosti krayevykh zadach dlya neodnorodnogo poligarmonicheskogo uravneniya v share [Conditions for the solvability of boundary value problems for an inhomogeneous polyharmonic equation in a ball]. Nauchnyye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika, 11(154): 44-54 (in Russian).

9. Lopatinskiy Ya. B. 1953. Ob odnom sposobe privedeniya ganichnykh zadach dlya sistemy differentsial'nykh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integral'nym uravneniyam [On one way of reducing ganic problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations]. Ukrainskii matematicheskii zhurnal. 5(2): 123-151 (in Russian).

10. Malakhova N. A., Soldatov A. P. 2008. On a boundary value problem for a higher-order elliptic equation. Differential Equations, 44(8): 1111-1118. Doi: 10.1134/S0012266108080089.

11. Nazarov S. A., Plamenevskiy B. A. 1991. Ellipticheskiye zadachi v oblastyakh s kusochno gladkoy granitsey [Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries]. M.: Nauka, 336 (in Russian).

12. Soldatov A.P. 1989. High order elliptical systems. Differential equations, 25(1): 136-144.

13. Soldatov A. P. 2018. On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity. Journal of Mathematical Sciences, 235(4): 484-535. Doi: 10.1007/s10958-018-4083-7.

14. Douglis A. A. 1960. On uniqueness in Cauchy probblems for ellipilc systems of equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13(4): 593-607.

15. Gilbert R. P. 1969. Function theoretic methods in partial differential equations. New York.: Academic Press, 311.

16. Soldatov A. P. 2014. Generalized potentials of double layer in plane theory of elasticity. Eurasian mathematical journal, 5(4):78-125.

17. Soldatov A. P. 2017. Ob odnoy krayevoy zadache dlya ellipticheskogo uravneniya na ploskosti v mnogosvyaznoy oblasti [A boundary value problem for an elliptic equation on a plane in a multiply connected domain]. Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal. 19(3): 51-58 (in Russian).

18. Schechter M. 1950. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 12: 467-480.

19. Yeh R. Z. 1990. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. Pacific Journal of Mathematics, 142(2): 379-399.

Получена 27.02.2021

Кошанов Бакытбек Данебекович – доктор физико-математических наук, профессор Казахского национального педагогического университета имени Абая, ГНС Института математики и математического моделирования

http://orcid.org/0000-0002-0784-5183
пр. Достык, 13, Алматы, 050010, Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
E-mail: koshanov@list.ru

Кунтуарова Арай Довлетбаевна – преподаватель Казахского национального педагогического университета имени Абая

http://orcid.org/0000-0002-8077-1109
пр. Достык, 13, Алматы, 050010, Казахстан
E-mail: araika.14.89@mail.ru