Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №1. С. 5–12.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95+624.04
MSC 35G16.
DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-5-12

КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

К. Б. Сабитов, О. В. Фадеева

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан
Стерлитамак, 453103, Россия
Самарский государственный технический университет
Самара, 443100, Россия

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru, faoks@yandex.ru

Аннотация. В данной работе изучена начально-граничная задача для уравнения колебаний балки, один конец которой свободен, а другой заделан, т. е. для консольной балки. Решение поставленной задачи проведено методами спектрального анализа. Для спектральной задачи найдены собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что построенная система собственных функций является ортогональной и полной в пространстве Ł$_2$. Единственность решения поставленной задачи доказана двумя способами. Первый способ основан на применении интеграла энергии, а второй – на полноте системы собственных функций. Решение данной начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Найдены оценки коэффициентов этого ряда и системы собственных функций, на основании которых установлены достаточные условия на начальные функции, выполнение которых обеспечивает равномерную сходимость построенного ряда в классе регулярных решений уравнения колебаний балки. Опираясь на полученное решение данной задачи, установлена устойчивость ее решения в зависимости от начальных данных.

Ключевые слова: уравнение балки, единственность, ряд, существование, устойчивость.

Для цитирования: Сабитов К. Б., Фадеева О. В., 2021. Колебания балки консольной балки. Прикладная математика & Физика. 53(1): 5–12. DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-5-12.

CONSOLE BEAM VIBRATIONS

K. Sabitov, O. Fadeeva

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

The state autonomous scientific institution «Institute of strategic research of the Republic of Bashkortostan»
Sterlitamak, 453103, Russian Federation
Samara State Technical University
Samara, 443100, Russian Federation
E-mail: sabitov_fmf@mail.ru, faoks@yandex.ru
Received January, 22, 2021

Abstract. In this paper, we study the initial boundary value problem for the vibration equation of a beam, one end of which is free and the other is closed, i.e. for the cantilever beam. The solution of the problem is carried out by methods of spectral analysis. For the spectral problem eigenvalues as roots of the transcendental equation are found and the corresponding system of eigenfunctions is composed. It is shown that the constructed system of eigenfunctions is orthogonal and complete in space Ł$_2$. The uniqueness of the solution of the problem is proved in two ways. The first method is based on the application of the energy integral, and the second - on the completeness of the system of eigenfunctions. The solution of this initial boundary value problem is found as the sum of a series of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. Estimates of the coefficients of this series and the system of eigenfunctions are found, on the basis of which sufficient conditions for the initial functions are established, the fulfillment of which provides uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions of the beam vibration equation. Based on the obtained solution of this problem, the stability of its solution depending on the initial data is established.

Key words: equation beams, uniqueness, series, existence, resistance.

For citation: Sabitov K., Fadeeva O. 2021. The beam fluctuations, one end of which is free and the other clamped. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 5–12 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2021-53-1-5-12.

1. Введение. Множество задач о колебаниях балок, стержней и пластин играют важную роль в теории устойчивости и строительной механике. Описание таких колебательных процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение колебания струны. Рассмотрим балку длины l, один конец которой наглухо заделан, а другой свободен. Под действием непрерывной внешней силы $G(x,t)$, рассчитанной на единицу длины, вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки, при отсутствии вращательного движения, описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка [10, 4]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = G(x,t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Это уравнение перепишем в виде

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S, F(x,t) = G(x,t)/\rho S$.

К уравнению (1) приходят также при изучении задач расчета устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей [3].

В данной работе изучается следующая начально-граничная задача для уравнения (1) в области

$$D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где l и T – заданные положительные действительные числа.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА. Найти определенное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), обладающее следующими свойствами:

$$u(x,y) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

при этом функции $F(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие.

Отметим, что в книгах [10, 4, 3, 2, 1, 9] методом разделения переменных найдены собственные частоты и формы собственных колебаний для уравнения (1) с различными граничными условиями, но начально-граничные задачи не исследованы. В данной статье, следуя работам [6, 7, 8] , решение поставленной начально-граничной задачи построено в явном виде как сумма ортогонального ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи, приведены доказательства теорем единственности, существования и устойчивости построенного решения.

2. Единственность решения начально-граничной задачи. Для доказательства единственности решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением из работы [7].

Теорема 1. *Если существует решение начально-граничной задачи (1) – (4), то для любого t, $0 \le t \le T$, справедлива оценка*

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2)dx \le e^T \left[\int_0^l (\psi^2(x) + \alpha^2(\varphi''(x))^2)dx + \iint_{\overline{D}} F^2(x,t)dxdt \right]. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2) – (4), то она единственна.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, являющиеся решениями данной задачи. Тогда разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению $u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$ и нулевым начальным и граничным условиям. Для этой разности в силу оценки (5) при любом $t \in [0,T]$ имеем $\int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2)dx = 0$. Это возможно только в случае, когда $u_t = u_{xx} = 0$ в области D , т. е. $u(x,t) = c_1 x + c_2$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Из выполнимости граничных условий (3) получаем $c_1 = c_2 = 0$, т. е. $u(x,t) = 0$ в $\overline{D}$, откуда и следует утверждение теоремы.

3. Существование решения начально-граничной задачи. Решение поставленной задачи проведем для случая $F(x,t) \equiv 0$. Разделяя в уравнении (1) переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, получаем следующую спектральную задачу относительно функции $X(x)$:

$$X^{IV} + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0. \tag{7}$$

Если $\lambda > 0$, то, полагая $\lambda = 4d^4, d > 0$, найдем общее решение уравнения (6):

$$X(x) = e^{dx}(a_1 \cos dx + a_2 \sin dx) + e^{-dx}(a_3 \cos dx + a_4 \sin dx),$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные постоянные.

Подчиняя функцию $X(x)$ и ее производные до третьего порядка граничным условиям (7), получим линейную систему относительно неизвестных постоянных a_i, $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} \sin dl - a_2 e^{dl} \cos dl - a_3 e^{-dl} \sin dl + a_4 e^{-dl} \cos dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} - a_4 e^{-dl})(\cos dl + \sin dl) - (a_2 e^{dl} + a_3 e^{-dl})(\cos dl - \sin dl) = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен $\Delta = e^{2dl} + e^{-2dl} + 2(1 + \cos^2 dl)$.

Ясно, что данный определитель отличен от нуля, поэтому система имеет только тривиальное решение, а значит $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda = 0$, легко показать, что спектральная задача (6), (7) так же имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda < 0$, то полагая $\lambda = -d^4, d > 0$, построим общее решение уравнения (6) в виде

$$X(x) = a_1 e^{dx} + a_2 e^{-dx} + a_3 \cos dx + a_4 \sin dx,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные пока неизвестные постоянные.

Удовлетворяя функцию $X(x)$ граничным условиям (7), получим следующую систему относительно неизвестных постоянных:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl} - a_3 \cos dl - a_4 \sin dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl}) + a_3 \sin dl - a_4 \cos dl = 0, \end{cases} \tag{8}$$

определитель которой равен $\Delta = -4(\operatorname{ch} dl \cdot \cos dl + 1)$.

Для того, чтобы система (8) имела ненулевые решения, потребуем, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\operatorname{ch} dl \cdot \cos dl = -1. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет счетное множество корней d_n [10], которые можно вычислить по формуле [5]

$$d_n = \frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n\right), \tag{10}$$

где $\Theta_n \in (0; 1/2), \Theta_n = O(1/n^2)$. Отсюда следует, что собственные значения спектральной задачи (6), (7) находятся по формуле $\lambda_n = -d_n^4$, где d_n – корень уравнения (9).

Находя общее решение системы (8) и учитывая условие (9) при $d = d_n$ получаем систему собственных функций

$$X_n = \frac{\operatorname{sh} d_n l + \sin d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + \cos d_n l}(\operatorname{ch} d_n x - \cos d_n x) + \sin d_n x - \operatorname{sh} d_n x.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$\operatorname{sh} d_n l = \sqrt{\operatorname{ch}^2 d_n l - 1} = |\operatorname{tg} d_n l| = -\frac{|\sin d_n l|}{\cos d_n l},$$

получаем две подсистемы

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n \operatorname{ch} d_n(x - 0,5l) + b_n \sin d_n(x - 0,5l), & n = 2k - 1, \\ c_n \operatorname{sh} d_n(x - 0,5l) + f_n \cos d_n(x - 0,5l), & n = 2k, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\operatorname{sh} 0,5 d_n l}, \quad b_n = \frac{1}{\cos 0,5 d_n l}, \quad c_n = -\frac{1}{\operatorname{ch} 0,5 d_n l}, \quad f_n = \frac{1}{\sin 0,5 d_n l}.$$

Таким образом, нами построена система собственных функций задачи (6), (7) по формуле (11). Как известно из [6], эта система ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, l]$. Для удобства дальнейших исследований нормируем систему функций (11). Для нахождения норм собственных функций вычислим интеграл

$$I_{nn} = \int_0^l X_n^2(x)dx.$$

Для нечетных номеров имеем

$$I_{nn} = \int_0^l (a_n \operatorname{ch} d_n(x-0,5l) + b_n \sin d_n(x-0,5l))^2 dx = (a_n^2 + b_n^2)0,5l + \frac{a_n^2}{2d_n}\operatorname{sh} d_n l - \frac{b_n^2}{2d_n}\sin d_n l.$$

С учетом условия (9), получим

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)dx = l\frac{\operatorname{ch} d_n l + 1}{\operatorname{ch} d_n l - 1} = l \operatorname{cth}^2 0,5 d_n l. \quad (12)$$

Аналогично для четных номеров получаем

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)dx = l\frac{\operatorname{ch} d_n l - 1}{\operatorname{ch} d_n l + 1} = l \operatorname{th}^2 0,5 d_n l. \quad (13)$$

На основании равенств (12) и (13) нормируем систему функций (11):

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l}\operatorname{cth} 0,5d_n l, & n = 2k-1, \\ \sqrt{l}\operatorname{th} 0,5d_n l, & n = 2k. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1) – (4). Следуя [6, 7] введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t)Y_n(x)dx. \quad (15)$$

Дважды дифференцируя равенство (15) и учитывая уравнение (1), получим

$$u_n''(t) = -\alpha^2 \int_0^l u_{xxxx}(x,t)Y_n(x)dx + F_n(t),$$

где $F_n(t) = \int_0^l F(x,t)Y_n(x)dx$.

Интегрируя здесь по частям четыре раза с учетом граничных условий (3) и (7), получим уравнение

$$u_n''(t) + \alpha^2 d_n^4 u_n(t) = F_n(t),$$

общее решение которого находим методом вариации произвольных постоянных:

$$u_n(t) = \alpha_n \cos \alpha d_n^2 t + \beta_n \sin \alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2}\int_0^l F_n(s)\sin[\alpha d_n^2(t-s)]ds, \quad (16)$$

где α_n, β_n – произвольные постоянные.

Для нахождения постоянных α_n, β_n, подчинив функции (15) условиям (4), получим начальные условия:

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)Y_n(x)dx = \int_0^l \varphi(x)Y_n(x)dx = \varphi_n, \quad (17)$$

$$u_n'(0) = \int_0^l u_t(x,0)Y_n(x)dx = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)dx = \psi_n. \quad (18)$$

Удовлетворяя функции (16) полученным начальным условиям, находим $\alpha_n = \varphi_n, \beta_n = \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2}$ и явный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2} \int\limits_0^l F_n(s) \sin[\alpha d_n^2 (t-s)] ds. \tag{19}$$

Поскольку для функций (15) получен явный вид (19), на основании полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ можно доказать единственность решения задачи (1) – (4). Действительно, предположим, что существуют две различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, являющиеся решениями данной задачи. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением однородной задачи (1) – (4), где $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Тогда из формул (17) – (19) следует, что $u_n(t) = 0$ при любом $t \in [0,T]$, что, с учетом (15), влечет выполнимость равенства

$$\int\limits_0^l u(x,t) Y_n(x) dx = 0,$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любого $n \in N$. Отсюда, в силу полноты системы функций $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$, следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку $u(x,t)$ в силу условия (2) непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Решение поставленной задачи (1) – (4) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \tag{20}$$

где $u_n(t)$ и $Y_n(x)$ определяются формулами (19) и (14).

Лемма 1. *Для любых $t \in [0,T]$ и натуральных n справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \le C_1 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} + \frac{1}{n^2} \|F_n\| \right), \quad |u_n''(t)| \le C_2 n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} + n^2 \|F_n\| \right),$$

где $\|F_n\| = \max |F_n(t)|$ для любых $t \in [0,T]$, а C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок следует непосредственно из формулы (19).

Лемма 2. *Для любых $x \in [0,l]$ и больших $n \in N$ справедливы оценки*

$$|Y_n^{(i)}(x)| \le C_{i+3} n^i, \quad i = \overline{0,4}. \tag{21}$$

Доказательство. Для случая $n = 2k-1$ на основании формулы (11) имеем

$$\begin{aligned} X_n(x) &= a_n \operatorname{ch} d_n(x - 0,5l) + b_n \sin d_n(x - 0,5l) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} 0,5 d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \operatorname{ch} d_n(x - 0,5l) + \frac{2 \operatorname{ch} d_n l \cos 0,5 d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \sin d_n(x - 0,5l). \end{aligned}$$

Из данного представления при всех $x \in [0,l]$ и $n \in N$ оценим X_n :

$$|X_n| \le \frac{\operatorname{sh} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} + \frac{2 \operatorname{ch} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \le \frac{4}{(1 - e^{-d_1 l})^2} = C_3.$$

Теперь из формулы (12) следует, что $\|X_n(x)\| \ge \sqrt{l}; \lim n \longrightarrow \infty \|X_n(x)\| = \sqrt{l}$. Отсюда вытекает, что существует номер n_1 , такой, что при всех $n > n_1 : \sqrt{l} \le \|X_n(x)\| \le 2\sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0,l]$

$$|Y_n(x)| \le \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} < \frac{C_3}{\sqrt{l}}.$$

При $n = 2k$ на основании формулы (14) имеем

$$\begin{aligned} X_n(x) &= c_n \operatorname{sh} d_n(x - 0,5l) + f_n \cos d_n(x - 0,5l) = \\ &= \frac{\operatorname{sh} d_n(x - 0,5l)}{\operatorname{ch} 0,5 d_n l} - \frac{2 \operatorname{ch} d_n l \sin 0,5 d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + 1} \cos d_n(x - 0,5l), \end{aligned}$$

откуда при всех $x \in [0,l]$ и $n \in N$ имеем

$$|X_n(x)| \le \frac{\operatorname{sh} 0,5 d_n l}{\operatorname{ch} 0,5 d_n l} + \frac{2 \operatorname{ch} d_n l}{1 + \operatorname{ch} d_n l} \le 3.$$

Из (13) имеем : $\|X_n(x)\| \le \sqrt{l}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}$. Отсюда следует, что существует номер n_2, такой, что при всех $n > n_2 : 0,5\sqrt{l} \le \|X_n(x)\| \le \sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0,l]$ справедлива оценка

$$|Y_n(x)| \le \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} \le \frac{6}{\sqrt{l}}.$$

Вычисляя производные функций $Y_n(x)$ до четвертого порядка включительно, с учетом асимптотической формулы для d_n (10) убеждаемся в справедливости оценок (21) для больших $n \in N$ и любых $x \in [0,l]$.

Далее дифференцируя почленно ряд (20) составим ряды из производных:

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) Y_n(x), \tag{22}$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 u_n(t) Y_n(x). \tag{23}$$

Полученные ряды (22) и (23), как и ряд (20), на основании лемм 1 и 2 при любых $(x,t) \in \overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_8 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} + n^2 \|F_n\| \right).$$

Лемма 3. *Если функции $\varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) \in C^6[0,l], \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{V}(0) = 0,\\
&\psi(x) \in C^4[0,l], \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(l) = \psi'''(l) = 0,\\
&F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^4(\overline{D}), F(0,t) = F_x(0,t) = F_{xx}(l,t) = F_{xxx}(l,t) = 0
\end{aligned}$$

при любых $0 \le t \le T$, то имеют место следующие представления:

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(6)}}{d_n^6}, \quad \psi_n = \frac{\psi_n^{(4)}}{d_n^4}, \quad F_n(t) = \frac{1}{d_n^4} F_n^{(4)}(t),$$

где

$$\varphi_n^{(6)} = \begin{cases} \frac{1}{\|X_n\|} \int\limits_0^l \varphi_n^{(6)}(x)(a_n \operatorname{ch} d_n(x-0,5l) + b_n \sin d_n(x-0,5l))dx, & n = 2k-1,\\ \frac{1}{\|X_n\|} \int\limits_0^l \varphi_n^{(6)}(x)(c_n \operatorname{sh} d_n(x-0,5l) - f_n \cos d_n(x-0,5l)), & n = 2k, \end{cases}$$

$$\psi_n^{(4)} = \int_0^l \psi^{(4)}(x) Y_n(x) dx,$$

$$F_n^{(4)}(t) = \int_0^l F_x^{(4)}(x,t) Y_n(x) dx.$$

Доказательство. Заметим, что непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что

$$Y_n^{(4)}(x) = d_n^4 Y_n(x).$$

Тогда, на основании (17), имеем

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \varphi(x) Y_n^{(4)}(x) dx.$$

Интегрируя здесь по частям четыре раза и учитывая граничные условия (3), получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^8} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) Y_n^{(4)}(x) dx.$$

Интегрируя в последнем интеграле дважды по частям , приходим к справедливости первого представления леммы 3.

Аналогично, используя представления для ψ_n и $F_n(t)$, получим

$$\psi_n = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)dx = \frac{1}{d_n^4}\int_0^l \psi(x)Y_n^{(4)}(x)dx = \frac{1}{d_n^4}\psi_n^{(4)},$$

$$F_n(t) = \int_0^l F(x,t)Y_n(x)dx = \frac{1}{d_n^4}\int_0^l F(x,t)Y_n^{(4)}(x)dx = \frac{1}{d_n^4}\int_0^l F_{xxxx}(x,t)Y_n(x)dx = \frac{1}{d_n^4}F_n^{(4)}(t).$$

На основании леммы 3 ряды (20), (22), (23) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(|\varphi_n^{(6)}| + |\psi_n^{(4)}| + \|F_n^{(4)}\|\right).$$

т. е. они сходятся равномерно на $\overline{D}$. Следовательно, сумма ряда (20) удовлетворяет всем условиям задачи (1) – (4).

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x), \psi(x), F(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение задачи (1) – (4) и оно определяется суммой ряда (20).*

4. Устойчивость решения начально-граничной задачи. В этом пункте установим зависимость решения задачи (1) – (4) от начальных функций.

Теорема 4. *Для решения (20) начально-граничной задачи (1) – (4) при $F(x,t) \equiv 0$ справедливы оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \le C_{10}\left(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\right),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \le C_{11}\left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi(x)\|_{C[0,l]}\right).$$

Доказательство. Так как система функций $Y_n(x)$ ортонормирована, то из представления (20) в силу леммы 1, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty}u_n^2(t) \le 2C_1^2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^2 + \psi_n^2) = C_{10}\left(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]}\right).$$

Из полученного неравенства следует справедливость первой оценки.

Из (20) на основании лемм 1 и 2 при любом $(x,t) \in \overline{D}$ имеем

$$|u(x,t)| \le C_{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\right) \le C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\varphi_n^{(4)}|}{n^4} + \frac{|\psi_n|}{n^2}\right) \le C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(|\varphi_n^{(4)}| + |\psi_n|\right).$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского , получим

$$|u(x,t)| \le C_{13}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(4)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$$
$$= C_{14}\left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\right).$$

Из полученной оценки непосредственно следует вторая оценка теоремы 4.

Список литературы

1. Бидерман В. Л. 1980. Теория механических колебаний. М., Высшая школа, 408.
2. Коллатц Л. 1968. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М., Наука, 503.
3. Крылов А. Н. 2012. Вибрация судов. М., Гостехиздат, 447.
4. Релей Л. 1955. Теория звука. Т. 1. М., Гостехиздат, 503.
5. Рудаков И. А. 2015. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями. Изв. РАН. Сер. матем, 79(5): 215–238.
6. Сабитов К. Б. 2015. Колебания балки с заделанными концами. Вестник Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 19(2): 311–324.

7. Сабитов К. Б. 2017. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. Дифференц. уравнения, 53(1): 89–100.

8. Сабитов К. Б. 2017. Начальная задача для уравнения колебаний балок. Дифференц. уравнения, 53(5): 665–671.

9. Тимошенко С. П. 1967. Колебания в инженерном деле. М., Физматлит, 444.

10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М., Наука, 736.

References

1. Biderman V. L. 1980. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Theory of mechanical vibrations]. M., Vysshaya shkola, 408.

2. Kollatts L. 1968. Zadachi na sobstvennye znacheniya s tekhnicheskimi prilozheniyami [Eigenvalue problems with technical applications]. M., Nauka, 503.

3. Krylov A. N. 2012. Vibratsiya sudov [Vibration of vessels]. M., Gostekhizdat, 447.

4. Reley L. 1955. Teoriya zvuka [Theory of sound]. T.1. M., Gostekhizdat, 503.

5. Rudakov I. A. 2015. Periodicheskie resheniya kvazilinejnogo uravneniya vynuzhdennyh kolebanij balki s odnorodnymi granichnymi usloviyami [Periodic oscillations of the quasi-linear equation of forced beam vibrations with uniform boundary conditions]. Izv. RAN. Ser. matem, 79(5): 215–238.

6. Sabitov K. B. 2015. Kolebaniya balki s zadelannymi kontsami [Vibrations of beams with closed ends]. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, 19(2): 311–324.

7. Sabitov K. B. 2017. K teorii nachal'no-granichnykh zadach dlya uravneniya sterzhney i balok [On the theory of initial-boundary problems for the equation of rods and beams]. Differentsial'nye uravneniya, 53(1): 89–100.

8. Sabitov K. B. 2017. Nachal'naya zadacha dlya uravneniya kolebaniy balki [The Initial problem for the equation of vibrations of a beam]. Differentsial'nye uravneniya, 53(5): 665–671.

9. Timoshenko S. P. 1967. Kolebaniya v inzhenernom dele [Fluctuations in engineering]. M., Fizmatlit, 444.

10. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. 1966. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. M., Nauka, 724.

Получена 22.01.2021

Сабитов Камиль Басирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Стерлитамакского филиала Института стратегических исследований Республики Башкортостан; профессор кафедры высшей математики Самарского государственного технического университета

http://orcid.org/0000-0001-9516-2704
ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103, Россия
E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Фадеева Оксана Владиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Самарского государственного технического университета

http://orcid.org/0000-0003-1704-9524
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия
E-mail: faoks@yandex.ru