Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №4. С. 301–311.

УДК 519.179 DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-301-311
MSC 35L05

ВЕСОВОЕ ОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Алзамили Х., Шишкина Э. Л.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

Воронежский Государственный Университет,
Воронеж, 394018, Россия;
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: alzamili.khitam@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. Целью статьи является изучение связи между продолжением весового однородного распределения и весовым фундаментальным решением эллиптического оператора с операторами Бесселя, действующими по каждому аргументу. Эта задача для невесовых распределений рассматривалась Хёрмандером и наши результаты являются обобщением его результатов. Кроме того, рассмотрена задача Дирихле и получено равенство, дающее связь граничного условия и решения этой задачи Дирихле посредством $B-$потенциала Рисса.

Ключевые слова: весовое однородное распределение, оператор Бесселя, задача Дирихле, $B-$потенциал Рисса

Для цитирования: Алзамили Х., Шишкина Э. Л. 2021. Весовое однородное распределение и его приложения. Прикладная математика & Физика. 53(4): 301–311. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-301-311.

WEIGHTED HOMOGENEOUS DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS

Khitam Alzamili, Elina Shishkina

Belgorod State National Research University
Belgorod, 308015, Russia

Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia;
Belgorod State National Research University,
Belgorod, 308015, Russia;

E-mail: alzamili.khitam@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Received December, 8, 2021

Abstract. The aim of the article is to study the relationship between the continuation of the weighted homogeneous distribution and the weighted fundamental solution of an elliptic operator with Bessel operators acting with respect to each argument. This problem for not weighted distribution was considered by Hörmander and our results are a generalization of his results. In addition, the Dirichlet problem is considered and an equality is obtained that gives a connection between the boundary condition and the solution of this Dirichlet problem by means of the Riesz $B-$potential.

Key words: weighted homogeneous distribution, Bessel operator, Dirichlet problem, Riesz $B-$potential .

For citation: Alzamili Khitam, Shishkina Elina. 2021. Weighted homogeneous distribution and its applications. Applied Mathematics & Physics. 53(4): 301–311. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-301-311.

1. Введение и основные определения. В этом разделе приведены основные определения, включающие пространства основных функций, весовых обобщенных функций и обобщенной свертки.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad x_1>0,\ldots,x_n>0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\},$$

$\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i, $i=1,\ldots,n$, и $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$. Пусть $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Имеем $\Omega_+\subseteq\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на он Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1, ..., n$ непрерывно продолжаются на x_i=0. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f \in C^m(\overline{\Omega}_+)$, таких, что $\left.\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых $k \leq m$ при $i = 1, ..., n$ (см. [1] и [2], стр. 21 и далее). Пусть $C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$. Положим $C^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}{}^n_+) = C^\infty_{ev}$.

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ — множество функций $f \in C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ с компактным носителем.

Будем использовать обозначения $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$, $\mathcal{D}_+(\overline{\mathbb{R}}{}^n_+) = \mathcal{D}_+$. Кроме $\mathcal{D}_+$ будем также использовать множество $\mathscr{D}_+$ функций, определенных также как и $\mathcal{D}_+$, но на $\mathbb{R}^n_+$.

Пространство $L^\gamma_p(\Omega_+)$, $1 \leq p < \infty$ состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, четных по каждой из своих переменных x_i, $i = 1, ..., n$ таких, что если $f \in L^\gamma_p(\Omega_+)$, то

$$\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty, \qquad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Будем использовать обозначения $L^\gamma_p = L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)$ и

$$||f||_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Через $L^\gamma_{p,loc}(\Omega_+)$ будем обозначать множество функций u, определенных почти всюду на $\overline{\Omega}_+$, таких что $u\varphi \in L^\gamma_p(\Omega_+)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$. Пусть $\mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ — сопряжённое пространство к $\mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ пространство. Каждой функции $u \in L^\gamma_{1,loc}(\Omega_+)$ сопоставляется *регулярная весовая обобщенная функция* $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$, действующая по правилу

$$(u, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\Omega_+} u(x)\, \varphi(x)\, x^\gamma\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+).$$

Все остальные обобщенные функции $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ будем называть *сингулярными весовыми обобщенными функциями*. Будем использовать обозначение $\mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_+(\overline{\mathbb{R}}{}^n_+)$. Аналогично определяется $\mathscr{D}'_+$.

Например, сингулярной весовой обобщенной функцией является функция δ_γ:

$$(\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Для удобства будем также писать

$$(\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \delta_\gamma(x)\varphi(x)x^\gamma dx = \varphi(0),$$

понимая такую запись как предел соответствующей последовательности.

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, принадлежащую $\mathbb{R}^n_+$, будем обозначать $B^+_r(n)$. Граница $B^+_r(n)$ состоит из части сферы $S^+_r(n) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : |x| = r\}$ и из частей координатных гиперплоскостей x_i=0, i=1, . . ., n, таких что $|x| \leq r$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma \mathbf{T}^y_x f)(x) = {}^\gamma \mathbf{T}^y_x f(x) = ({}^{\gamma_1} T^{y_1}_{x_1} ... {}^{\gamma_n} T^{y_n}_{x_n} f)(x), \tag{2}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T^{y_i}_{x_i}$ acts for i=1, ..., n имеет вид

$$({}^{\gamma_i} T^{y_i}_{x_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi f(x_1, ..., x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + \tau_i^2 - 2x_i y_i \cos\varphi_i}, x_{i+1}, ..., x_n) \ \sin^{\gamma_i - 1} \varphi_i \, d\varphi_i.$$

Обобщенный сдвиг (2) подробно изучен в [3].

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом ${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y$, определяется формулой

$$(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)({}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y g)(x)y^\gamma\,dy. \tag{3}$$

2. Весовые однородные распределения. В этом разделе технику однородных распределений распространим на случай, когда присутствует степенной вес x^γ, что позволит применить полученные результаты к дифференциальным уравнениям с оператором Бесселя.

Пусть функция $u\in L_{1,loc}^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ — однородная порядка a, то есть $u(tx)=t^a u(x)$ при $t>0$. Весовое распределение u однородно порядка a в $\mathbb{R}_+^n$, если выполняется следующее равенство

$$(u,\varphi)_\gamma=t^a(u(x),\varphi_t(x))_\gamma, \tag{4}$$

где $\varphi_t(x)=t^{n+|\gamma|}\varphi(tx)$, $\varphi\in\mathcal{D}_+$. Если u — весовое распределение в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ и (4) верно для всех $\varphi\in\mathcal{D}_+$, то u — есть однородное распределение порядка a в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$.

Рассмотрим определение весового однородного распределения подробнее. Если функция $u\in L_{1,loc}^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ однородна порядка a, то есть $u(tx)=t^a u(x)$ при $t>0$, то

$$(u(y),\varphi(y))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} u(y)\varphi(y)y^\gamma dy=\{y=tx,t>0\}=$$

$$=t^{n+|\gamma|+a}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} u(x)\varphi(tx)x^\gamma dx=t^a(u(x),\varphi_t(x))_\gamma,$$

где $\varphi_t(x)=t^{n+|\gamma|}\varphi(tx)$, $\varphi\in\mathcal{D}_+$. Обратно, из соотношения $(u(y),\varphi(y))_\gamma=t^a(u(x),\varphi_t(x))_\gamma$ следует, что u — однородна. Если $a>-n-|\gamma|$, то u — интегрируема с весом x^γ в некоторой окрестности нуля, поскольку при переходе к сферическим координатам $x=r\omega$, $|\omega|=1$ имеем $dx=r^{n+|\gamma|-1}\omega^\gamma drd\omega$ и

$$\int\limits_{U_\varepsilon(0)}|u(r\omega)|x^\gamma dx=\int\limits_0^\varepsilon r^{a+n+|\gamma|-1}dr\int\limits_{S_1^+(n)}|u(\omega)|\omega^\gamma d\omega=$$

$$=\frac{\varepsilon^{a+n+|\gamma|}}{a+n+|\gamma|}\int\limits_{S_1^+(n)}|u(\omega)|\omega^\gamma d\omega<\infty.$$

Теорема 2.1. *Условия однородности весового однородного распределения u порядка a*

$$(u,\varphi)_\gamma=t^a(u,\varphi_{n,\gamma,t})_\gamma,\quad \varphi_{n,\gamma,t}(x)=t^{n+|\gamma|}\varphi(tx),\quad \varphi\in\mathcal{D}_+ \tag{5}$$

и

$$(u,\psi)_\gamma=0,\quad \psi\in\mathcal{D}_+,\quad \int\limits_0^\infty r^{a+n+|\gamma|-1}\psi(rx)dr=0 \tag{6}$$

эквивалентны. Кроме того, для весовых однородных распределений u степени a справедлива формула

$$\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=au. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (5) по t, получим

$$at^{a-1}(u(x),t^{n+|\gamma|}\varphi(tx))_\gamma+$$

$$+t^a\left(u(x),(n+|\gamma|)t^{n+|\gamma|-1}\varphi(tx)+t^{n+|\gamma|-1}\frac{d\varphi(tx)}{dt}\right)_\gamma=0. \tag{8}$$

Поскольку

$$\frac{d\varphi(tx)}{dt}=\sum_{k=1}^n\frac{\partial\varphi(tx)}{\partial x_k}\frac{d(tx_k)}{dt}=\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial\varphi(tx)}{\partial x_k},$$

то равенство (8) может быть записано в виде

$$at^{a-1}(u(x),t^{n+|\gamma|}\varphi(tx))_\gamma+$$

$$+t^a\left(u(x),(n+|\gamma|)t^{n+|\gamma|-1}\varphi(tx)+t^{n+|\gamma|-1}\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial\varphi(tx)}{\partial x_k}\right)_\gamma=0. \tag{9}$$

Положив $t=1$ в (9), будем иметь

$$(a+n+|\gamma|)(u,\varphi)_\gamma+(u,\lambda\varphi)_\gamma=0, \tag{10}$$

где $\lambda=\sum\limits_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}$.

Рассмотрим уравнение

$$(a+n+|\gamma|)\varphi(x)+\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x)=\psi(x) \tag{11}$$

и покажем, что у него есть решение в $\mathscr{D}_+$. Переходя в (11) к сферическим координатам $x=r\omega$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n+|\gamma|}\varphi(r\omega))=\psi(r\omega)r^{a+n+|\gamma|-1}.$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n+|\gamma|}\varphi(r\omega))=(a+n+|\gamma|)r^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(r\omega)+r^{a+n+|\gamma|}\frac{\partial\varphi(r\omega)}{\partial r}=$$

$$=(a+n+|\gamma|)r^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(r\omega)+r^{a+n+|\gamma|}\sum_{k=1}^n\frac{\partial\varphi(r\omega)}{\partial(r\omega_k)}\frac{\partial(r\omega_k)}{\partial r}=$$

$$=(a+n+|\gamma|)r^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(r\omega)+r^{a+n+|\gamma|-1}\sum_{k=1}^n r\omega_k\frac{\partial\varphi(r\omega)}{\partial(r\omega_k)}=$$

$$=r^{a+n+|\gamma|-1}\left[(a+n+|\gamma|)\varphi(x)+\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x)\right]=r^{a+n+|\gamma|-1}\psi(x).$$

Следовательно,

$$\psi=(a+n+|\gamma|)\varphi+\lambda\varphi, \tag{12}$$

равенство

$$\int_0^\infty r^{a+n+|\gamma|-1}\psi(rx)dr=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n+|\gamma|}\varphi(r\omega))dr=r^{a+n+|\gamma|}\varphi(r\omega)\Big|_0^\infty=0$$

верно и $\psi\in\mathscr{D}_+$. Таким образом, из (12) и (10) следует равенство (6).

Теперь докажем (7). Для $(u,\lambda\varphi)_\gamma$ получим

$$(u,\lambda\varphi)_\gamma=\left(u(x),\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\right)_\gamma=\sum_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}_+^n}u(x)x_k\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}x^\gamma dx=$$

$$=\sum_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}}x_1^{\gamma_1}...x_{k-1}^{\gamma_{k-1}}x_{k+1}^{\gamma_{k+1}}...x_n^{\gamma_n}dx_1...dx_{k-1}dx_{k+1}...dx_n\left[\int_0^\infty u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}x_k^{\gamma_k+1}dx_k\right]. \tag{13}$$

Применим формулу интегрирования по частям к интегралу по x_k:

$$\int_0^\infty u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}x_k^{\gamma_k+1}dx_k=\left\{U=u(x)x_k^{\gamma_k+1},dV=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}dx_k\right\}=$$

$$=u(x)\varphi(x)x_k^{\gamma_k+1}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left[x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+(1+\gamma_k)u(x)\right]\varphi(x)x_k^{\gamma_k}dx_k=$$

$$=-\int_0^\infty x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\ \varphi(x)x_k^{\gamma_k}dx_k-(1+\gamma_k)\int_0^\infty u(x)\varphi(x)x_k^{\gamma_k}dx_k.$$

Суммируя по k от 1 до n и возвращаясь к интегралу (13), будем иметь

$$(u,\lambda\varphi)_\gamma=-(\lambda,\varphi)_\gamma-(n+|\gamma|)(u,\varphi)_\gamma. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (10), получим

$$(a+n+|\gamma|)(u(x),\varphi(x))_\gamma-\left(\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial u}{\partial x_k},\varphi(x)\right)_\gamma-(n+|\gamma|)(u(x),\varphi(x))_\gamma=0$$

или

$$a(u(x),\varphi(x))_\gamma=\left(\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial u}{\partial x_k},\varphi(x)\right)_\gamma,$$

что дает (7).

3. Продолжение весовых однородных распределений. Продолжение весового однородного распределения с $\mathbb{R}^n_+$ до распределения на $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ является нетривиальной задачей, но необходимой для построения фундаментальных решений. В этом разделе мы построим продолжение весового однородного распределения порядка a.

Теорема 3.1. *Пусть $u\in\mathscr{D}'_+$ — весовое однородное распределение порядка a. Если $a\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\leq -n-|\gamma|$, то распределение u имеет единственное продолжение $u^*\in\mathcal{D}'_+$ однородное порядка a. Если $a\neq 1-n-|\gamma|$, то $(B_{\gamma_j}u)^*=B_{\gamma_j}u^*$, $B_{\gamma_j}=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{\gamma_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Отображение $u\to u^*$ непрерывно.*

Доказательство. Сначала докажем существование весового распределения $u^*\in\mathcal{D}'_+$,однородного порядка a, которое является продолжением $u\in\mathscr{D}'_+$.

Если u — функция и $\varphi\in\mathscr{D}_+$, то переходя к сферическим координатам $x=r\omega$, получим

$$(u,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}u(x)\varphi(x)x^\gamma dx=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(n)}u(\omega)\varphi(r\omega)r^{a+n+|\gamma|-1}\omega^\gamma drd\omega.$$

На основе этого равенства введем одномерное распределение (не весовое)

$$(R_a\varphi)(x)=(t_+^{a+n+|\gamma|-1},\varphi(tx)),\qquad \varphi\in\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^n_+). \tag{15}$$

Функция $R_a\varphi$ однородна порядка $-n-|\gamma|-a$, то есть $(R_a\varphi)(bx)=b^{-n-|\gamma|-a}(R_a\varphi)(x)$. Действительно,

$$(R_a\varphi)(bx)=(t_+^{a+n+|\gamma|-1},\varphi(btx))=\int\limits_0^\infty t^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(btx)dt=\{bt=y\}=$$

$$=b^{-n-|\gamma|-a}\int\limits_0^\infty y^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(yx)dy=b^{-n-|\gamma|-a}(R_a\varphi)(x).$$

Из [6] следует, что R_a есть непрерывное отображение из $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(K)$ в $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ для любого компакта $K\subset\mathbb{R}^n_+$.

Выберем фиксированную функцию $\psi\in\mathscr{D}_+$, такую что

$$\int\limits_0^\infty\psi(tx)\frac{dt}{t}=1,\qquad x\neq 0.$$

Тогда $\psi R_a\varphi\in\mathscr{D}_+$ и

$$R_a(\psi R_a\varphi)(x)=\int\limits_0^\infty t^{a+n+|\gamma|-1}\psi(tx)(R_a\varphi)(tx)dt=$$

$$=(R_a\varphi)(x)\int\limits_0^\infty\psi(tx)\frac{dt}{t}=(R_a\varphi)(x).$$

Таким образом, $u(\psi R_a\varphi)$ всегда не зависит от ψ и $u(\psi R_a\varphi)=u(\varphi)$, если $\varphi\in\mathscr{D}_+$. Следовательно,

$$(u^*,\varphi)_\gamma=(u,\psi R_a\varphi)_\gamma,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_+$$

определяет распределение u^* в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, продолжающее u. Отображение $u\to u^*$ непрерывно. Поскольку

$$(R_a\varphi_t)(x)=(r_+^{a+n+|\gamma|-1},t^{n+|\gamma|}\varphi(rtx))=t^{-a}R_a\varphi(x),\qquad \varphi_t(x)=t^{n+|\gamma|}\varphi(tx),$$

что дает однородность u^*. Наконец заметим, что $(B_{\gamma_j}u)^* - B_{\gamma_j}u^*$ однородно порядка $a-2$ и имеет носитель в нуле 0, таким образом, должно равняться нулю. Это завершает доказательство.

4. Весовое фундаментальное решение B–эллиптического уравнения Цель этого раздела — показать, как теорию весовых однородных распределений можно использовать для получения того, что мы называем весовыми фундаментальными решениями уравнений в частных производных.

Распределение $E \in \mathcal{D}'_+$ называется **весовым фундаментальным решением** дифференциального оператора $L = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i B_{\gamma_i}$ с операторами Бесселя, с постоянными (комплексными) коэффициентами, если $LE = \delta_\gamma$.

Весовое фундаментальное решение эллиптического оператора с оператором Бесселя, действующим по одной переменной, было получено И. А. Киприяновым в [2] другим методом.

Теорема 4.1. *Пусть $u_1, ..., u_n \in \mathcal{D}'_+$ функции, однородные порядка $2-n-|\gamma|$ в $\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{j=1}^{n} B_{\gamma_j}u_j = 0$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} B_{\gamma_j}u_j^* = c\delta_\gamma$, где c — некоторая константа.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1, весовое распределение $\sum\limits_{j=1}^{n} B_{\gamma_j}u_j^*$ однородно порядка $-n-|\gamma|$ и имеет носитель в 0, следовательно $\sum\limits_{j=1}^{n} B_{\gamma_j}u_j^* = c\delta_\gamma$ для некоторой константы c.

Лемма 4.1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n_+$, $n > 1$ и*

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \ln|x|, & n+|\gamma| = 2; \\ \frac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)|S_1^+(n)|_\gamma}, & n+|\gamma| > 2, \end{cases}$$

где

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

то для $|x| > \varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0$ имеем

$$\triangle_\gamma E(x) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n+|\gamma| > 2$. Получим

$$\triangle_\gamma E(x) = \sum_{j=1}^{n} B_{\gamma_j}E(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}x_j^{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial x_j}E(x) =$$

$$= \frac{1}{(2-n-|\gamma|)|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}x_j^{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{2-n-|\gamma|} =$$

$$= \frac{1}{(2-n-|\gamma|)|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}x_j^{\gamma_j}\,\frac{(2-n-|\gamma|)}{2}\,|x|^{-n-|\gamma|}\,2x_j =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n-|\gamma|}x_j^{1+\gamma_j} =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\left[\frac{(-n-|\gamma|)}{2}|x|^{-n-|\gamma|-2}\,2x_j^{2+\gamma_j} + (1+\gamma_j)|x|^{-n-|\gamma|}x_j^{\gamma_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}[(-n-|\gamma|)|x|^{-n-|\gamma|-2}\,x_j^2 + (1+\gamma_j)|x|^{-n-|\gamma|}] =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma}[(-n-|\gamma|)|x|^{-n-|\gamma|} + (n+|\gamma|)|x|^{-n-|\gamma|}] = 0.$$

Теперь рассмотрим случай $n+|\gamma| = 2$:

$$\triangle_\gamma E(x) = \sum_{j=1}^{n} B_{\gamma_j}E(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}x_j^{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial x_j}E(x) =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}x_j^{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\ln|x| = \frac{1}{|S_n^+|_\gamma}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-2}\,x_j^{1+\gamma_j} =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} [-2|x|^{-4}\, x_j^{2+\gamma_j} + (1+\gamma_j)|x|^{-2}\, x_j^{\gamma_j}] =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^{n} [-2|x|^{-4}\, x_j^{2} + (1+\gamma_j)|x|^{-2}] =$$

$$= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} [-2|x|^{-2} + (n+|\gamma|)|x|^{-2}] = 0,$$

так как $n+|\gamma|=2$.

Теорема 4.2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}_n^+$, $n>1$ *и*

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{|S_2^+|_\gamma} \ln|x|, & n+|\gamma|=2; \\ \frac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)\,|S_n^+|_\gamma}, & n+|\gamma|>2, \end{cases}$$

тогда $B_{\gamma_j} E \in L^1_{loc,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ *и*

$$\triangle_\gamma E = \delta_\gamma.$$

Доказательство. Докажем сначала, что $B_{\gamma_j} E \in L^1_{loc,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$. Для $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{ev}(\overline{\mathbb{R}}{}^n_+)$ имеем

$$(B_{\gamma_j}E,\varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} B_{\gamma_j}E(x)\ \varphi(x) x^\gamma dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\right) \varphi(x) x^\gamma dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} x_1^{\gamma_1} ... x_{j-1}^{\gamma_{j-1}} x_{j+1}^{\gamma_{j+1}} ... x_n^{\gamma_n} dx_1 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\right) \varphi(x) dx_j.$$

Интегрируя по частям по x_j, получим

$$\int\limits_0^\infty (B_{\gamma_j}E(x))\, \varphi(x) x_j^{\gamma_j} dx_j = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\right) \varphi(x) x_j^{\gamma_j} dx_j =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\right) \varphi(x) dx_j = \left\{U=\varphi(x), dV = \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) dx_j\right\} =$$

$$= x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\varphi(x)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty x_j^{\gamma_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx_j =$$

$$= - \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E(x)\right) x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx_j =$$

$$= \left\{U = x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x), dV = \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) dx_j\right\} =$$

$$= -x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x) E(x)\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\right) E(x) dx_j =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{x_j^{\gamma_j}}\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\right) E(x) x_j^{\gamma_j} dx_j = \int\limits_0^\infty (B_{\gamma_j}\varphi(x))\, E(x) x_j^{\gamma_j} dx_j.$$

Следовательно,

$$(B_{\gamma_j}E,\varphi)_\gamma = (E, B_{\gamma_j}\varphi)_\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{|x|>\varepsilon\}^+} (B_{\gamma_j}\varphi(x))\, E(x) x^\gamma dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (B_{\gamma_j}\varphi(x))\, E(x) x^\gamma dx - \int\limits_{\{|x|\le\varepsilon\}^+} (B_{\gamma_j}\varphi(x))\, E(x) x^\gamma dx\right].$$

Используя формулу (4) из [7], получим

$$(B_{\gamma_j}E,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}(B_{\gamma_j}\varphi(x))\,E(x)x^\gamma dx-\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{|x|=\varepsilon\}^+}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,E(x)\cos(\vec{\nu},\vec{e}_j)x^\gamma dS,$$

где $\vec{\nu}$ — направление внешней нормали к границе $\{|x|=\varepsilon\}^+$, $\vec{e}_j$ — направление оси Ox_j. Поскольку $\cos(\vec{\nu},\vec{e}_j)=\frac{x_j}{|x|}$, то

$$(B_{\gamma_j}E,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(B_{\gamma_j}\varphi(x))\,E(x)x^\gamma dx-\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{|x|=\varepsilon\}^+}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,E(x)\frac{x_j}{|x|}x^\gamma dS.$$

Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{|x|=\varepsilon\}^+}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,E(x)\frac{x_j}{|x|}x^\gamma dS=0$$

и, следовательно,

$$(B_{\gamma_j}E,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(B_{\gamma_j}E(x))\,\varphi(x)x^\gamma dx,$$

то есть, весовое распределение $B_{\gamma_j}E$ определяемое функцией $B_{\gamma_j}E(x)$ локально интегрируемо с весом x^γ.

Поскольку для $|x|>\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$ выполняется равенство

$$\triangle_\gamma E(x)=0,$$

то снова используя формулу (4) из [7], будем иметь

$$(\triangle_\gamma E,\varphi)_\gamma=(E,\triangle_\gamma\varphi)_\gamma=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{|x|>\varepsilon\}^+}E(x)(\triangle_\gamma\varphi(x))x^\gamma dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{|x|>\varepsilon\}^+}[E(x)(\triangle_\gamma\varphi(x))-(\triangle_\gamma E(x))\varphi(x)]x^\gamma dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\{|x|=\varepsilon\}^+}\left(E(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\vec{\nu}}-\varphi(x)\frac{\partial E(x)}{\partial\vec{\nu}}\right)x^\gamma\,dS=\varphi(0).$$

Доказательство закончено.

5. Задача Дирихле. Основным назначением весового фундаментального решения является то, что оно позволяет решать неоднородные уравнения или задачу Дирихле с неоднородным условием, в которых неоднородный член имеет компактный носитель.

В этом пункте строится весовое фундаментальное решение задачи Дирихле, т. е. решением задачи Дирихле с весовой дельта-функцией в граничном условии. Решение задачи Дирихле с произвольной функцией в граничном условии в этом случае можно записать как обобщенную свертку (3) функции с весовым фундаментальным решением задачи Дирихле, если эта обобщенная свертка существует.

Пусть $\Delta_{\gamma,a}=\Delta_\gamma+B_a$. В этом пункте рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta_{\gamma,a}u=0,\qquad u=u(x,y), \tag{16}$$

$$u(x,0)=f(x). \tag{17}$$

Пусть $\vec{e}=(e_1,...,e_n)$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$, $\nabla'_{\gamma,a}=\left(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{1}{x_n^{\gamma_n}}\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{1}{y^a}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — первый взвешенный оператор набла, $\nabla''_{\gamma,a}=\left(x_1^{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x_1},...,x_n^{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial x_n},y^a\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — второй взвешенный оператор набла, тогда $(\nabla'_{\gamma,a}\cdot\nabla''_{\gamma,a})=\Delta_{\gamma,a}$. Если $\vec{F}=\vec{F}(x,y)=(F_1(x,y),...,F_{n+1}(x,y))$ — векторное поле, то $div'_{\gamma,a}\vec{F}=(\nabla'_{\gamma,a}\cdot\vec{F})=\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+...+\frac{1}{x_i^{\gamma_n}}\frac{\partial F_n}{\partial x_n}+\frac{1}{y^a}\frac{\partial F_{n+1}}{\partial y}$ — первая весовая дивергенция, $div''_{\gamma,a}\vec{F}=(\nabla''_{\gamma,a}\cdot\vec{F})=x_1^{\gamma_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+...+x_n^{\gamma_n}\frac{\partial F_n}{\partial x_n}+y^a\frac{\partial F_{n+1}}{\partial y}$ — вторая весовая дивергенция.

Уравнение (16) можно переписать в виде $div'_{\gamma,a}(\nabla''_{\gamma,a}u)=0$.

Введя новую переменную $\eta = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{1-a}$, получим

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{-a},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{-2a} u_{\eta\eta} = \eta^{\frac{2a}{a-1}} u_{\eta\eta}$$

и уравнение (16) перепишется в виде

$$(\Delta_\gamma)_x u + \eta^{\frac{2a}{a-1}} u_{\eta\eta} = 0. \tag{18}$$

Интегральный оператор дробного порядка $\alpha > 0$ следующего вида

$$(\mathbf{U}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \frac{{}^\gamma\mathbf{T}_x^y \varphi(x)}{|y|^{n+|\gamma|-\alpha}}\, y^\gamma dy \tag{19}$$

называется B-потенциалом Рисса (см. [4]). В [5] построено его обращение в виде B−гиперсингулярного интеграла. При $0 < \alpha < 1$ B−гиперсингулярный интеграл имеет вид

$$C_{n,\gamma,a} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{f(\xi) - {}^\gamma\mathbf{T}_x^\xi f(x)}{|x|^{n+|\gamma|-a+1}} \xi^\gamma d\xi = (\mathbf{D}_\gamma^{1-a} f)(x)$$

где $C_{n,\gamma,a} = \frac{1}{C(n,\gamma)\, S_{n,l}(\alpha)}$, $C(N,\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\, \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}\right) \pi^{n/2}}$, $S_{N,l}(\alpha) = \beta_N(\alpha) \frac{A_l(\alpha)}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}$,

Лемма 5.1. *Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 1$ и*

$$P(x,y) = C_{n,\gamma,a} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}},$$

то для $|x| > \varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0$ имеем

$$\Delta_{\gamma,a} P(x,y) = 0.$$

Доказательство. Действительно, непосредственные вычисления дают

$$\Delta_{\gamma,a} P(x,y) = C_{n,\gamma,a}\, \Delta_{\gamma,a} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}} =$$

$$= C_{n,\gamma,a} \left(\sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}} + (B_a)_y \frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}} \right) =$$

$$= C_{n,\gamma,a} \Bigg(y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1) \sum_{i=1}^n \left((\gamma_i+1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-3}{2}} + x_i^2(a-n-|\gamma|-3)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \right) -$$

$$-y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((a-3)|x|^2+y^2(|\gamma|+n)\right) \Bigg) =$$

$$= C_{n,\gamma,a} \Bigg(y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \sum_{i=1}^n \left((\gamma_i+1)\left(|x|^2+y^2\right) + x_i^2(a-n-|\gamma|-3) \right) -$$

$$-y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((a-3)|x|^2+y^2(|\gamma|+n)\right) \Bigg) =$$

$$= C_{n,\gamma,a} \Bigg(y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((n+|\gamma|)\left(|x|^2+y^2\right) + |x|^2(a-n-|\gamma|-3) \right) +$$

$$-y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((a-3)|x|^2+y^2(|\gamma|+n)\right) \Bigg) =$$

$$= C_{n,\gamma,a} \Bigg(y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((n+|\gamma|)y^2 + (a-3)|x|^2 \right) +$$

$$-y^{1-a}(a-|\gamma|-n-1)\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((a-3)|x|^2+y^2(|\gamma|+n)\right) \Bigg) = 0.$$

Следствие 5.1. *Функция*

$$P(x,z)=C_{n,\gamma,a}\,\frac{\eta}{\left(|x|^2+(1-a)^2\eta^{\frac{2}{1-a}}\right)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}}$$

является решением уравнения (18).

Теорема 5.1. *Пусть* $x\in\mathbb{R}_n^+$, $n>1$ *и*

$$P(x,y)=C_{n,\gamma,a}\,\frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}},$$

тогда $B_{\gamma_j}P(x,y)\in L^1_{loc,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ *и решение задачи* (16)–(17) *имеет вид*

$$u(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}P(x,y)f(\xi)\xi^{\gamma}d\xi.$$

Доказательство. Очевидно, что если $P(x,y)$ есть решение уравнения (16), то и $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}P(x,y)f(\xi)\xi^{\gamma}d\xi$ есть решение (16). Кроме того,

$$P(x,y)=y^{-n-|\gamma|}P(x/y,1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{y\to0}P(x,y)=\delta_{\gamma}.$$

Тогда

$$\lim_{y\to0}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}P(x,y)f(\xi)\xi^{\gamma}d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}\delta_{\gamma}(x)f(\xi)\xi^{\gamma}d\xi=f(x).$$

Что и завершает доказательство.

Следствие 5.2. *Решение задачи* (18)–(17) *имеет вид* $u(x,z)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}P(x,z)f(\xi)\xi^{\gamma}d\xi.$

Теорема 5.2. *Пусть* $f\in L_p^{\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$, $0<a<1$, $s=\frac{1-a}{2}$, $s<\frac{n+|\gamma|}{p}$, $\eta=\left(\frac{y}{1-a}\right)^{1-a}$

$$(-\Delta_{\gamma})^s f(x)=-\lim_{y\to+0}y^a u_y(x,y)=u_{\eta}(x,0).$$

Доказательство. Имеем

$$u_{\eta}(x,0)=\lim_{\eta\to0}\frac{u(x,\eta)-u(x,0)}{\eta}=\lim_{z\to0}\frac{1}{\eta}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}P(x,\eta)(f(\xi)-f(x))\xi^{\gamma}d\xi=$$

$$=C_{n,\gamma,a}\lim_{\eta\to0}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}\left(\left(|x|^2+(1-a)^2\eta^{\frac{2}{1-a}}\right)^{\frac{a-n-|\gamma|-1}{2}}\right)(f(\xi)-f(x))\xi^{\gamma}d\xi=$$

$$=C_{n,\gamma,a}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{f(\xi)-{}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{\xi}f(x)}{|x|^{n+|\gamma|-a+1}}\xi^{\gamma}d\xi=(\mathbf{D}_{\gamma}^{1-a}f)(x),$$

где $\mathbf{D}_{\gamma}^{1-a}=(-\Delta_{\gamma})^{\frac{1-a}{2}}$ — B–гиперсингулярный интеграл (см. [4, 5]).

Список литературы

1. Житомирский Я. И. 1955. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Матем. сб., 36(78)(2): 299–310.

2. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.

3. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2(42): 102–143.

4. Ляхов Л. Н. 1991. Обращение B-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР, 321(3): 466–469.

5. Ляхов Л. Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР, 315(2): 291–296.

6. Хермандер Л. 1986. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений. М., Мир, 482.

7. Шишкина Э. Л. 2019. Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для B−эллиптических и B−гиперболических операторов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(4): 506–513.

References

1. Zhitomirskii Ya. I. 1955. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. Mat. Sb. (N.S.), 36(78)(2): 299–310 (in Russian).

2. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit, 204 (in Russian).

3. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk, 6:2(42): 102–143 (in Russian).

4. Lyakhov L. N. 1992. Inversion of Riesz B-potentials. Dokl. Math., 44(3): 717–720(in Russian).

5. Lyakhov L. N. 1991. A class of hypersingular integrals. Dokl. Math., 42(3): 765–769 (in Russian).

6. Hermander L. 1986. Analysis of linear partial differential operators. 1. The theory of distributions. M ., Mir, 482 (in Russian).

7. Shishkina E. L. 2019. Generalized divergent theorem and second Green identity of B−elliptic and B−hyperbolic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(4): 506–513 (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 08.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алзамили Хитам – аспирант Белгородского государственного национального исследовательского университето (НИУ «БелГУ»)

http://orcid.org/0000-0003-1354-6478
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия
E-mail: alzamili.khitam@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского Государственного Университета и Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»)

http://orcid.org/0000-0003-4083-1207
Университетская пл., д.1, Воронеж, 394018, Россия; ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия
E-mail: ilina_dico@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Khitam Alzamili – Postgraduate student, Belgorod State National Research University (NRU "BelGU"), Belgorod, Russia
Elina Shishkina – Doctor of Sciences Phys. Math., Associate Professor, Professor of Voronezh State University and Belgorod State National Research University (NRU "BelGU"), Voronezh, Belgorod, Russia