УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
БЕЛГОРОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Том III 1961

Ю. К. Василенко

ИЗ ОПЫТА ПРОВЕДЕНИЯ ОБЛАСТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

I

В 1958 г. по инициативе кафедры математики пединститута в г. Белгороде была проведена математическая олимпиада учащихся городских школ.

В 1959 и 1960 годах к участию в математических олимпиадах стали привлекаться также сельские школьники. Этого удалось достигнуть благодаря тому, что первый тур проводился заочно. Задачи публиковались в областной молодежной газете «Ленинская смена». Одновременно с этим областной отдел народного образования направлял во все средние школы указание о привлечении школьников к олимпиаде. Кроме того для учащихся города Белгорода в 1959 г. первый тур был проведен непосредственно в школах. Решившие предложенные задачи наилучшим образом допускались к участию во втором туре. Эта заключительная часть олимпиады проходила в Белгороде, куда съезжались победители отборочного тура со всей области. При окончательном подведении итогов учитывались результаты каждого участника как на первом, так и на втором этапах соревнования.

Сочетание заочного и очного туров представляется нам наиболее удачным методом организации областных олимпиад, так как максимально обеспечивает (особенно через газету) возможность участия в соревновании всех желающих. Кроме этого, такой порядок гарантирует и контроль за самостоятельностью решения задач. Опыт показывает, что некоторые учащиеся, допущенные ко второму туру, не отваживаются в нем участвовать В основном это те, кто пользовался помощью товарищей, старших. Однако несомненно, что даже не вполне самостоятельное решение задач заочного тура олимпиады приносит определенную пользу.

Задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, были рассчитаны на учащихся VIII—X классов. По каждому классу давалось 5 задач, не выходивших за рамки школьных программ. В программу первого тура наряду с легкими задачами, посильными среднему ученику, включались также задачи, требующие умения самостоятельно мыслить, искать подходы к решению. Характерными примерами задач последнего типа могут служить №№ 20 и 26 (см. заключительную часть статьи). Такой подбор задач диктовался стремлением, с одной стороны, не отпугнуть учащихся, а с другой, давал возможность выявить наиболее способных. При этом учитывалось, что на решение задач первого тура предоставляется два месяца.

Задачи второго тура отличались краткостью решения, так как были рассчитаны на ограниченное время. По степени трудности все 5 задач примерно одинаковы.

Наряду с традиционными задачами, выясняющими общее математическое развитие учащихся, в задания включались и такие, которые требуют определенной практической сметки.

Олимпиадам предшествовала значительная подготовительная работа. Наряду с преподавателями института и учителями школ, в ее организации принимали участие студенты физико-математического факультета, проходившие педагогическую практику в школах г. Белгорода и в ряде сельских школ. Активными участниками олимпиады стали члены кружка при кафедре математики пединститута. Для учащихся областного центра был прочитан ряд лекций: «Что такое топология» (кандидат физико-математических наук Е. С. Тихомирова), «Кибернетика и современные вычислительные машины» (кандидат физико-математических наук Ю. И. Соколовский), «Решение задач на максимум и минимум» (преподаватель И. А. Абрамов) и другие.

Каковы же общие итоги олимпиад?

В двух областных олимпиадах приняли участие 260 учащихся VIII—X классов пятидесяти восьми школ г. Белгорода и области. Из них 167 человек решили не менее трех задач и были допущены ко второму туру.

Олимпиады показали, что в школах области имеются способные и хорошо подготовленные по математике учащиеся. К большинству задач, особенно первого тура, имелось три—семь вариантов решений. 10 учащихся были признаны победителями. В их числе ученики школ №№ 1, 3, 7 и 9 г. Белгорода, Погромской и Пятницкой школ Волоконовского района, Ржевской школы Шебекинского района, школы № 1 г. Шебекино, школы им. Энгельса Грайворонского района.

Ученик Алексеевской средней школы № 1 Николай Синев и ученица Новооскольской школы № 1 Елена Борисова дважды оказывались в числе победителей олимпиады. Особенно следует отметить Синева, который дал оригинальные решения задач.

Гораздо больший размах имела третья областная олимпиада, проведенная в 1960–61 учебном году для учащихся VII—X классов. Ей предшествовали внутришкольные и районные отборочные соревнования, в которых участвовало около 8 тысяч школьников. Первое место завоевала ученица школы № 3 г. Белгорода Ирина Кирова, второе место разделили Николай Синев, Вадим Гончаров (школа № 3 г. Старого Оскола), Сергей Подолько (школа № 9 г. Белгорода). Они представляли Белгородскую область на первой всероссийской математической олимпиаде юных математиков, посвященной сорокалетию Всесоюзной пионерской организации имени В. И. Ленина.

Активные участники и призеры олимпиад Владимир Попков, Людмила Белых, Людмила Савченко, Игорь Шестопалов, Алексей Кулько сейчас продолжают свое образование на физико-математическом факультете Белгородского пединститута и являются лучшими студентами, а Людмила Седых и Зоя Сенина успешно сочетают трудовую деятельность с учебой на вечернем отделении института.

В организации и проведении олимпиад, этого нового для Белгородской области мероприятия, имеется и ряд недостатков. Слишком бегло подводятся итоги олимпиады, не проводится детального разбора задач и работ учащихся. В 1960 г. не был проведен отборочный тур олимпиады непосредственно в школах Белгорода, что привело к уменьшению числа участников. Не все учителя проявляют заинтересованность в популяризации олимпиады и побуждают своих учеников участвовать в ней.

Задача, которую должны решить учителя и преподаватели математики, работники органов народного образования, состоит в том, чтобы, совершенствуя формы и методы проведения олимпиад, сделать эти соревнования юных математиков традиционными, наиболее полно и целесообразно использовать все возможности для улучшения математического образования школьников.

II

Рассмотрим более подробно итоговые данные по двум областным олимпиадам, сосредоточенные в нижеследующих таблицах.

Для удобства сравнения работы участников олимпиады характеризуются в привычной пятибалльной системе (фактически же оценки при проверке работ не ставятся). Индексом 5 обозначены полные и исчерпывающие решения; индексом 4—решения верные, но имеющие недочеты; индексом 3—решения, не доведенные до конца, но содержашие верную мысль; индексом 2 — неправильные решения.

В первых трех таблицах задачи, предлагавшиеся участникам, распределены по темам школьного курса, а в четвертой—по методам решений.

1. АЛГЕБРА

Тема	К-во задач	Всего подано решений	Из них				Не подали решений
			5	4	3	2	
Разложение на множители	1	25	19	1	—	5	12
Свойства корней квадратных уравнений	2	43	30	1	1	11	2
Системы уравнений	2	36	25	9	—	2	13
Логарифмы	3	100	76	2	3	19	10
Свойства целых чисел	4	79	50	4	4	21	33
Упрощение алгебраических выражений	2	15	8	6	—	1	12
Задачи на составление уравнений	5	28	13	6	3	6	26
Прогрессии	3	56	19	17	2	18	5
Неравенства 2-й степени	1	27	16	2	—	9	1
Показательные уравнения	4	63	10	8	5	40	16
Вычисления на логарифм. линейке	2	6	—	6	—	—	21
Исследование квадратного трехчлена	1	16	2	2	—	12	5
Трехчленное уравнение	1	6	—	2	—	4	—
Свойства показательной, логарифмической и тригонометрической функций	2	27	7	11	7	2	15
Логарифмические уравнения	1	12	9	—	3	—	4
ИТОГО	34	539	284	77	28	150	175

2. ГЕОМЕТРИЯ

Тема	К-во задач	Всего подано решений	Из них 5	4	3	2	Не подали решений
Многоугольники	2	41	37	—	—	4	9
Окружность	4	75	36	11	10	18	18
Правильные многоугольники	3	55	14	17	8	16	16
Треугольники	7	71	29	14	10	18	42
Расположение в пространстве точек, прямых, плоскостей, фигур	4	85	28	10	16	31	58
Площадь треугольника	1	17	6	8	2	1	2
Шар	1	11	—	—	—	11	10
Объем и поверхность многогранников	2	18	11	—	3	4	26
Объем цилиндра	1	6	—	—	1	5	—
ИТОГО	25	379	161	60	50	108	181

3. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тема	К-во задач	Всего подано решений	Из них 5	4	3	2	Не подали решений
Доказательство тождеств	5	88	72	10	1	5	29
Упрощение выражений	1	76	58	—	—	18	1
Тригонометрические уравнения	1	13	—	—	1	12	6
Вычисление без таблиц тригонометрических выражений	1	17	16	1	—	—	7
ИТОГО	8	194	146	11	2	35	43

4. ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЙ

Тема	К-во задач	Всего подано решений	Из них 5	4	3	2	Не подали решений
Задачи на доказательство:							
а) алгебраические	8	216	145	26	7	38	39
б) геометрические	10	208	76	28	36	68	60
в) тригонометрические	5	88	72	10	1	5	39
Задачи на построение:							
а) график функции	1	17	6	5	5	1	6
б) геометрические	8	101	37	28	6	30	81
Задачи на тождественные преобразования:							
а) алгебраические	3	40	27	7	—	6	24
б) тригонометрические	2	93	74	1	—	18	8
Задачи на составление, решение и исследование уравнений и систем уравнений:							
а) алгебраические	18	243	115	30	12	86	78
б) тригонометрические	1	13	—	—	1	12	6
Задачи на вычисление:							
а) алгебраические	4	26	1	7	3	15	24
б) геометрические	7	67	38	6	9	14	34
Логические задачи	8	117	44	49	7	17	87
ИТОГО	75	1229	635	197	87	310	486

Рассмотрение таблиц позволяет сделать следующие выводы.

1. Довольно охотно брались учащиеся и успешно справлялись с задачами, требующими, главным образом, умения производить тождественные алгебраические и тригонометрические преобразования, в том числе и с задачами такого типа на доказательство. Всего могло быть подано к задачам данного вида 760 решений, фактически оказалось 570, из них 446 были правильными или с несущественными недочетами. Можно заключить, что участники олимпиад удовлетворительно владеют аппаратом тождественных преобразований. Правда, имеются отмеченные в п. 2 исключения, однако общей картины они не нарушают.

2. Наименьшую склонность проявили участники олимпиад к таким задачам:

а) геометрические задачи на построение,

б) логические задачи,

в) задачи на вычисление объемов и поверхностей тел,

г) алгебраические примеры на тождественные преобразования, связанные с разложением на множители, свойствами алгебраических дробей, свойствами радикалов,

д) алгебраические примеры на вычисление, в частности с помощью логарифмической линейки.

Следует, однако, отметить, что имеется существенное различие в пунктах «а», «б» и «в», «г». Именно, в первых двух случаях и те учащиеся, которые брались решать задачи данных типов, справились с ними слабо. Что же касается задач, указанных в пунктах «в» и «г», то те, кто решал эти задачи, выполнили их неплохо.

Отсюда можно сделать заключение, что учащиеся оказались недостаточно подготовленными к решению геометрических задач на построение и задач, требующих умения логически рассуждать.

Что же касается примеров на тождественные преобразования и стереометрических задач, то за них не брались, пожалуй, по причинам субъективного порядка.

Видимо, не случайно, что наибольшую трудность для учащихся представили задачи, перечисленные в пунктах «а» и «б». Оба типа требуют не шаблонных решений, а творческого, исследовательского подхода. Такие навыки даже у лучших учащихся вырабатываются недостаточно. А ведь людям, готовящимся жить в век кибернетики, они понадобятся прежде всего.

Особый интерес представляют результаты решения задач практического содержания.

Задачи, которые требовали в основном знания определенных форм и схем решения, затруднений не вызывали (например, №№ 15, 21, 33). В то же время даже легкие по математическому содержанию задачи, но в которых постановка вопроса была необычной, повергали многих участников в смущение (ср. № 34). Здесь также проявилась слабость математического мышления учащихся.

В связи с этим необходимо подчеркнуть, что политехническая подготовка по математике имеет своей целью выработку у учащихся умения производить математический анализ производственных вопросов, а не только сообщение некоторой суммы знаний. Именно этой цели отвечают задачи №№ 20, 30, 26, 31.

Первые три таблицы свидетельствуют, что сравнительно благополучно справились учащиеся с задачами по темам:

а л г е б р а: свойства корней квадратного уравнения, логарифмы, логарифмические уравнения;

г е о м е т р и я: многоугольники, окружность, площадь треугольника;

т р и г о н о м е т р и я: доказательство тождеств, упрощение выражений, вычисление тригонометрических выражений без таблиц.

Нижеследующие задачи вызвали наибольшее число неправильных решений.

АЛГЕБРА

1. **Свойства целых чисел** — (задачи №№ 6, 7, 9, 11, 24). Главный недостаток здесь — отсутствие строгости в рассуждениях. Например, в задаче № 11 большинство участников ограничилось проверкой доказываемого утверждения при $p=5$, 7, 11 и только на этом основании сочло доказанным, что p^2-1 разделится на 24 и при л ю б о м простом p, большем трех. В №№ 6, 7, 9 искомые числа были найдены в основном путем подбора.

2. **Прогрессии** (задачи №№ 12, 17)

Задача № 12 легкая, но не всем участникам удалось найти правильный путь к ее решению. Характерно, что никто и не пытался применить метод математической индукции. Ответы на задачу № 17, как правило, не были обоснованы; проявлялось недостаточно четкое понимание понятия «рациональное число».

3. **Показательное уравнение** (задача № 23)

При его решении выявились недостаточное владение приемами решения показательных уравнений, слабость «математического зрения»: никто из участников не сообразил заменить

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ через } \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

4. **Исследование квадратного трехчлена и решение неравенств второй степени** (задачи №№ 27, 31)

Неумение определить минимум квадратного трехчлена. У многих — отсутствие требуемых программой знаний о знаке квадратного трехчлена.

5. **Графическое решение уравнений** (задача № 45)

Эту задачу решил только Синев с помощью аналитического метода. Ни у одного из десятиклассников даже не возникло мысли воспользоваться графиком. Графический метод решения уравнений, имеющий очень широкое практическое употребление, как видно, по-прежнему не пользуется достаточным вниманием учителей.

ГЕОМЕТРИЯ

1. **Шар** (задача № 30)

Здесь сказалось неумение найти подход к необычным образом сформулированной задаче. Большинство участников предлагало прокатить шар по бумаге.

2. **Расположение в пространстве точек, прямых, плоскостей, фигур** (задачи №№ 14, 19, 26, 29)

Слабость пространственного воображения, неумение последовательно и строго провести рассуждение.

3. **Свойства правильных многоугольников** (задача № 20)

Неумение провести математический анализ поставленного вопроса и, в частности, сформулировать математические требования для его решения.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. **Тригонометрическое уравнение с числовым аргументом** (задача № 16)

Непонимание темы; незнание определения косинуса.

К сожалению, приходится отметить, что некоторые (и не столь уж немногочисленные) участники допускали также грубейшие ошибки, свидетельствующие о незнании самых основ изучаемой темы. Например, при решении задачи № 16 встречались такие «преобразования»:

$$\text{если } \cos(\cos x)=0, \quad \text{то } \cos=\frac{0}{\cos x} \ (?!)$$

Отдельные учащиеся при логарифмировании полагали логарифм суммы равным сумме логарифмов слагаемых, логарифм нуля равным нулю, а при решении логарифмического уравнения «просто» отбрасывали знак логарифма.

Многие неправильные представления выявились при возвышении в степень и извлечении корня: степень суммы принималась равной сумме степеней слагаемых, такая же ошибка допускалась и при извлечении корня; при сложении степеней складывались показатели и т. п.

При решении задачи № 34 некоторые десятиклассники исходили из того, что объем цилиндра прямо пропорционален диаметру его основания...

Следует подчеркнуть, что каждый из приведенных «перлов» — это не ляпсус, который был допущен одним каким-то участником, а ошибка, сделанная целой группой учеников, причем из разных школ.

Возможность таких ошибок, несомненно, свидетельствует о том, как мало уделяется внимания сознательному усвоению учащимися основных математических понятий, как много еще в знаниях учащихся формального, механически заученного, как часто забываются прекрасные слова К. Д. Ушинского о том, что разум ученика — это не сосуд, который надо наполнить, а светильник, который надо зажечь.

Все приведенные выше соображения позволяют, на наш взгляд, сделать один общий вывод: во многих школах Белгородской области мало уделяется внимания работе с учениками, проявляющими математические способности. Эта работа подчас ограничивается созданием математического кружка, эпизодическим проведением вечеров занимательной математики, выпуском стенгазет. Между тем, этого совершенно недостаточно. Чтобы развить склонности учащихся, требуется систематическая и целеустремленная деятельность учителя. В связи с этим будет полезным высказать ряд пожеланий, которые, не являясь новыми, все же часто не реализуются учителями.

1. При подготовке к уроку, в особенности, если этот урок посвящается решению задач и примеров, учитель должен иметь в виду не только весь класс в целом, но и отдельные группы учащихся. В частности, для сильных учащихся следует подбирать задачи повышенной трудности. Нельзя успокаиваться выставлением «пятерки» за решение задач, рассчитанных на среднего ученика. Нам думается, что приемы работы учительницы математики Г. Гусарской из г. Казани, изложенные в ее статье «От каждого по способностям» (газета «Известия», № 214 за 1960 год) в определенной мере могут применяться каждым учителем.

2. Чрезвычайно полезно создать из лучших учащихся регулярно работающую группу для систематического углубления и расширения знаний. Занятия в такой группе ведет сам учитель по определенной программе, с обязательными заданиями для самостоятельной работы и т. д. Опыт созда-

ния таких групп имеется в ряде педагогических институтов, но, по нашему мнению, его вполне можно перенести и в школы, особенно расположенные в сельской местности.

3. Следует учить старшеклассников не только приемам решения задач, но и методам поисков этих решений, а также умению анализировать различные проблемы с точки зрения математических требований к ним.

Производственное обучение, введенное в соответствии с Законом о школе, представляет широкие возможности привлечения задач, взятых не только из задачников, но и из самой жизни.

4. Желательно расширить внеклассную работу по математике и сделать ее более разнообразной. Регулярно проводить внутришкольные математические олимпиады, викторины, конкурсы решений задач, командные соревнования по математике между классами и др.

Наряду с общеизвестными пособиями богатый материал для дополнительной работы со способными учащимися учитель математики может найти в следующих книгах: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом «Избранные задачи и теоремы элементарной математики»; Г. Штейнгауз «Математический калейдоскоп», «Сто задач»; П. Ю. Германович «Вопросы и задачи на соображение», «Математические викторины»; С. П. Бобров «Волшебный двурог», «Архимедово лето»; Детская энциклопедия, том 3.

Ценные методические указания по воспитанию математического мышления даются в книгах Д. Пойа «Как решать задачу» и Б. А. Кордемского «Очерки о математических задачах на смекалку».

III

Приводим некоторые задачи олимпиад, имея в виду, что они могут быть использованы учителями математики для внеклассной работы и, в частности, как тренировочные для подготовки к новым соревнованиям юных математиков.

VIII класс

1. Разложить на множители x^5+x+1.

Указание: прибавить и вычесть все недостающие степени x, меньше пятой, и сгруппировать.

Ответ: $(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$

2. Школьное совещание началось между 6 и 7 часами вечера, а окончилось между 9—10 часами. Определить точно, в котором часу началось совещание, если минутная и часовая стрелки поменялись за время совещания местами.

Решение: обозначим через x количество минутных делений, на которое продвинулась часовая стрелка после 6 часов к началу заседания, а через y — количество минутных делений, на которое продвинулась минутная стрелка после 9 часов к началу заседания. Так как минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, то $12x=45+y$. В конце заседания стрелки поменялись местами. Значит, часовая ушла на y после 9, а минутная — на x после 6 часов. Отсюда $12y=30+x$.

Решив полученную систему уравнений, найдем $x=3\frac{141}{143}$, $y=2\frac{119}{143}$. Значит, совещание началось в 6 часов $47\frac{119}{143}$ мин., а закончилось в 9 часов $33\frac{141}{143}$ мин.

3. Построить окружность, касательную к данной прямой MN и проходящую через данные две точки A и B, не лежащие на MN.

Указание: продолжить AB до пересечения с MN в точке C. Тогда, если T — точка касания, то $TC^2=AC \times BC$, что дает возможность построить точку T.

4. Сколько раз в сутки стрелки часов будут перпендикулярны?

Решение: если бы часовая стрелка не двигалась, то минутная при каждом обороте дважды образовывала бы с ней прямые углы и всего была бы перпендикулярна к ней 48 раз. Но часовая стрелка за сутки совершает 2 оборота, «уходя» от минутной. Поэтому число прямых углов будет равняться 44.

5. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют также квадрат.

Указание: сравнить треугольники, в которые входят данные прямые, и углы между этими прямыми.

6. Найти двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

Решение: из условия ясно, что цифра единиц искомого числа — четное число. По условию $10a+b=2ab$ или $5+\frac{b}{2a}=b$, откуда $b>5$. Значит, b или 6 или 8. Проверкой убеждаемся, что $b=6$. Тогда $a=3$. Искомое число 36.

7. По схеме произведенного извлечения найти квадратный корень (звездочки обозначают цифры).

```
√*****  = ***
 *
 ---
  **
  **
  ---
  2***
  ****
  ----
     0
```

Ответ: 314.

8. В данный прямоугольник вписать ромб, сторона которого а. Исследовать решение.

Указание: убеждаемся, что центр симметрии ромба совпадает с центром симметрии прямоугольника. Затем, рассматривая соответствующие треугольники, приходим к равенству

$$\frac{b^2+c^2}{4\cos A}=a^2, \text{ где}$$

b и с — смежные стороны прямоугольника, А — угол между диагональю ромба и средней линией прямоугольника.

Отсюда находим $\cos A$, а затем (построением) угол А. Решение возможно при b^2+c^2 не больше чем $4a^2$.

9. Задумано слово, состоящее из девяти различных букв, и в нем буквы пронумерованы, начиная с первой, последовательными цифрами от 1 до 9. Затем составлен пример на деление, и цифры заменены соответствующими буквами:

```
 ловец | рея
_лрю   |-----
       | оер
  еце
 _ели
 ----
   роц
  _рея
  ----
    ри
```

Найти задуманное слово.

Ответ: революция.

10. В шахматном турнире участвовало два ученика девятого класса и некоторое число учеников десятого класса. Каждый участник играл с каждым другим один раз, причем победителю засчитывалось 1 очко, проигравшему — нуль, а за ничью — по $\frac{1}{2}$ очка. Два девятиклассника набрали вме-

сте 8 очков, а все десятиклассники набрали одинаковое число очков каждый. Сколько десятиклассников участвовало в турнире?

Решение: пусть х — число десятиклассников, у — число очков, набранных каждым из них. Тогда число очков, набранных всеми участниками, будет $xy+8$. Всего участников $x+2$. Ими было сыграно $\frac{(x+2)\ (x+1)}{2}$ партий, следовательно, $xy+8=\frac{(x+2)\ (x+1)}{2}$. После преобразования получаем

$$x(x+3-2y)=14.$$

x—натуральное число, 2у—натуральное. Значит $(x+3-2y)$ — целое число, и 14 делится на х, т. е. х может быть одним из чисел 1, 2, 7, 14; x не может равняться 1 или 2, так как тогда девятиклассники не набрали бы 8 очков. Значит, $x=7$ или $x=14$.

11. Если p — простое число, большее трех, то p^2-1 делится на 24. Доказать.

Указание: $p^2-1=(p-1)\ (p+1)$; т. к. p — простое число, большее, чем 3, то $(p-1)$ и $(p+1)$ — последовательные четные числа.

IX класс.

12. Вывести формулу произведения n членов геометрической прогрессии.

Ответ: произведение n членов геометрической прогрессии равняется первому члену прогрессии в n-ой степени, умноженному на знаменатель прогрессии в степени $\frac{n\ (n-1)}{2}$.

13. Доказать, что наибольшие значения выражений

$$(\log_5 6)^{\sin x} \quad \text{и} \quad (\log_6 5)^{\cos x}$$

равны между собой.

Указание: первое выражение принимает наибольшее значение при наибольшем значении sinx, а второе — при наименьшем значении cosx.

14. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных в пространстве точек, не лежащих в одной плоскости?

Ответ: 4.

15. Два шкива, диаметры которых D_1 и D_2 известны, соединены ременной перекрестной передачей. Известно также рас-

стояние между центрами шкивов a. Вычислить угол, под которым пересекаются ремни передач.

Ответ: $\sin\frac{A}{2} = \frac{D_1+D_2}{2a}$

16. Решить уравнение $\cos(\cos x) = 0$

Решение: из условия имеем $\cos x = (2k+1)\cdot\frac{П}{2}$[1]

Наименьшее по абсолютной величине значение $\cos x = \frac{П}{2} > 1$.

Уравнение не имеет решений.

17. Можно ли утверждать, что каковы бы ни были три рациональных числа a, b и c, они всегда могут рассматриваться как члены некоторой арифметической прогрессии?

Решение: утверждать можно; они будут членами прогрессии

$\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \frac{3}{M}$ ..., где M — общий знаменатель данных чисел.

18. Вычислить выражение

$$a^{\log_b c} - c^{\log_b a}$$

Указание: взять логарифмы уменьшаемого и вычитаемого по основанию b.

Ответ: 0.

19. Найти геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от вершин плоского выпуклого четырехугольника. При каком условии задача имеет решение?

Ответ: перпендикуляр, восставленный к плоскости четырехугольника из центра окружности, описанной вокруг этого четырехугольника. Задача имеет решение, когда сумма противоположных углов четырехугольника равняется 180°.

20. Как известно, ячейка пчелиных сот имеет в разрезе форму правильного шестиугольника. Оказывается, это не случайно. Естественный отбор привел пчел к наиболее рациональной форме ячейки. Почему же правильный шестиугольник — наиболее удачная форма для ячеек пчелиных сот?

Указание: форма ячейки должна удовлетворять следующим требованиям: а) ячейки должны заполнять плоскость без промежутков между ними; б) на нее должно затрачиваться наименьшее количество материала, т. е. при данной площади сечения ячейки периметр его должен быть наименьшим.

21. Из металлического листа изготовляют гофрированный лист, профиль которого состоит из одинаковых дуг, центральный угол которых равен a. Какой длины нужно взять плоский

---

[1] Здесь и далее по техническим причинам знак «П» поставлен вместо греческой буквы «пи».

лист, чтобы получить гофрированный лист длиной l?

Ответ:

$$L = \frac{la}{2\sin\frac{a}{2}}$$

22. Начертить и исследовать график функции

$$y = \lg\cos x$$

Ответ: функция периодическая с периодом 2Π. Определена на промежутках $(4к-1)\frac{\Pi}{2}$, $(4к+1)\frac{\Pi}{2}$. В левой половине промежутка возрастает от минус бесконечности до нуля, в правой убывает от нуля до минус бесконечности. Имеет нули в точках $2к\Pi$. Все ветви расположены ниже оси x-ов.

23. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x - 4$$

Указание:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Ответ: $x=2$.

24. Доказать, не пользуясь логарифмическими таблицами.

$$\frac{1}{\log_5 \Pi} + \frac{1}{\log_2 \Pi} > 2.$$

Указание: перейти к основанию Π и учесть, что $\Pi^2 > 10$.

X класс

25. Доказать, что $a^7 + 6!a$ делится на 7 при всех целых a.

Указание: применить метод полной математической индукции.

26. «К» проволочных треугольников расположены в пространстве так, что: а) каждые два из них имеют ровно одну общую вершину, б) в каждой вершине сходится одно и то же число «р» треугольников.

Найти все значения «к» и «р», при которых описанное расположение возможно.

Решение: пусть ABC один из треугольников. Из его вершины выходит еще по $р-1$ треугольников. Пусть ADE один из таких треугольников. По условию а) он имеет ровно по одной общей вершине со всеми другими треугольниками, в частности, с выходящими из вершины B. Таких треугольников, включая ABC, р. С ADE все они по условию а) могут иметь только разные вершины. Отсюда следует, что р не больше трех. При $р=1$, $к=1$, при $р=2$, $к=4$, при $р=3$, $к=7$.

27. Решить неравенство $x^3 + x^2 + x + 1 < 0$

Указание: разложить на множители.

Ответ: $x < -1$.

28 Доказать, что для любого треугольника имеет место соотношение

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

Указание: использовать выражение для косинуса угла, получаемое из теоремы косинусов.

29. Даны 12 точек, из которых 5 лежат на одной прямой. Кроме них никакие три не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

Ответ: $21+35+1=57$.

30. С помощью циркуля и линейки определить радиус материального шара.

Указание произвольным раствором циркуля строим окружность на поверхности шара. Выбираем на окружности три точки A, B и C и измеряем расстояния AB, AC и BC. На чертеже строим, треугольник ABC, описываем вокруг него окружность и находим ее центр O_1 и радиус. Теперь в большом круге, проходящем через точки A и B, нам известны хорда AB и полухорда BO_1. Из треугольника ABO_1 находим AO_1, а затем и диаметр шара.

31. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света, если периметр фигуры имеет данную величину p?

Указание: составить функцию, выражающую зависимость площади окна от радиуса полукруга, завершающего окно, и найти максимум.

Ответ: радиус полукруга $\frac{p}{\Pi + 4}$

32. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. Найти зависимость между сторонами.

Ответ: $a^2 = b^2 + bc$

33. Для определения твердости металла в образец вдавливают четырехугольную правильную пирамиду с углом между противоположными гранями, равным 136^0. Затем измеряют диагональ отпечатка (т. е. диагональ основания пирамиды). Число твердости H определяют как отношение силы давления P на пирамиду при вдавливании (в кг) к площади S соприкосновения пирамиды с образцом (в кв. мм). Вывести формулу для определения числа твердости по экспериментально определяемым силе давления P и диагонали отпечатка d.

Ответ: $H = \frac{2P \sin 68°}{d^2} \approx 1{,}8544 \frac{P}{d^2}$.

34. Рулон бумаги весит P кг и имеет диаметр D см. Из этого рулона нужно смотать P_1 кг бумаги. До какого диаметра нужно размотать рулон?

Ответ: $d = D \sqrt{\frac{P - P_1}{P}}$ см.

35. Пользуясь логарифмической линейкой, составить таблицу функции

$$y = 2{,}75\ x^3$$

при значении x от 3,05 до 3,50, берущихся через 0,05 .

Указание: Записать данное выражение в виде

$$\frac{2{,}75\cdot}{1} = \frac{y}{x^3}$$

и сопоставлять основную шкалу движка со шкалой кубов.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ НА ТРЕТЬЕЙ ОЛИМПИАДЕ

VII—VIII классы

36. В классе 25 учеников. Из них 8 занимаются в секции велосипедистов, 13 — в секции плавания, а 17 — в лыжной секции. Ни один из учеников не занимается в трех секциях, но зато все спортсмены учатся только на «4» и «5», не в пример шести ученикам, имеющим тройки по математике. Сколько учеников имеют двойки по математике? Сколько велосипедистов занимаются в секции плавания?

Решение: всего в секциях занимаются 38 человек. Оценки «4», «5» и «2» по математике могут иметь 19 учеников. Если бы спортсменов было меньше 19, то некоторые занимались бы в трех секциях. Значит, в классе 19 спортсменов, и, следовательно, не успевающих по математике нет. Из 19 спортсменов 17 лыжников. Значит, двое и велосипедисты, и пловцы.

37. У берега реки требуется построить водонапорную башню, из которой вода доставлялась бы по трубам в селения A и B. В какой точке нужно ее соорудить, чтобы общая длина труб до обоих селений была наименьшей? (Берег считать прямолинейным, A и B расположены по одну и ту же сторону реки).

Решение: построить точку B_1, симметричную B относительно линии берега. Точка C пересечения AB_1 с линией берега — искомая.

38. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}};\quad \sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}};\quad \sqrt{6\frac{6}{35}}=6\sqrt{\frac{6}{35}}\ \text{и т. д}$$

Записать в общем виде данное свойство корней и доказать его.

Решение:

$$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3-a+a}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$$

39. Вычислить: $\underbrace{1999\ldots9}_{n\ \text{раз}}{}^2$

Решение: $\underbrace{1999\ldots9}_{n\ \text{раз}}{}^2=(\underbrace{2000\ldots0}_{n\ \text{раз}}-1)^2=\underbrace{400\ldots0}_{2n\ \text{раз}}-\underbrace{40000\ldots0}_{n\ \text{раз}}+$

$+1=3\underbrace{99\ldots9}_{n-1\ \text{раз}}6\underbrace{0000\ldots0}_{n-1\ \text{раз}}1$

40. Что больше: куб гипотенузы или сумма кубов катетов?

Решение: $c^2=a^2+b^2$; $c^3=a^2c+b^2c$;
$a^2c>a^3$; $b^2c>b^3$; $c^3>a^3+b^3$

IX класс

41. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ быть какими-либо членами одной арифметической прогрессии?

Решение: пусть $\sqrt{2}=a_k$; $\sqrt{3}=a_m$; $\sqrt{5}=a_p$

$\sqrt{2}=a_1+(k-1)d$ $\qquad \sqrt{2}-\sqrt{3}=(k-m)d$

$\sqrt{3}=a_1+(m-1)d$ $\qquad \sqrt{3}-\sqrt{5}=(m-p)d$

$\sqrt{5}=a_1+(p-1)d$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{k-m}{m-p}$

Это равенство невозможно, так как левая часть равенства — рациональное число, а правая — иррациональное.

42. От двух слитков с различным процентным содержанием меди, весящих m кг и n кг, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого слитка, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

Решение: пусть процентное содержание меди в первом сплаве равно p%, во втором—q%.

Тогда, обозначив неизвестное буквой x, получим, что в отрезанных кусках чистой меди было

$$\frac{xp}{100}\ \text{кг} \quad \text{и} \quad \frac{xq}{100}\ \text{кг},$$

а в оставшихся частях слитков соответственно

$$\frac{(m-x)p}{100}\ \text{кг} \quad \text{и} \quad \frac{(n-x)q}{100}\ \text{кг}$$

После сплавления процентное содержание меди оказалось одинаковым. Следовательно,

$$\frac{\frac{(m-x)p}{100}+\frac{xq}{100}}{m}\cdot 100=\frac{\frac{(n-x)q}{100}+\frac{xp}{100}}{n}\cdot 100$$

Отсюда

$$x=\frac{mn}{m+n}\ \text{кг}$$

X класс

43 Найти $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$

Решение:

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12}16}{\log_{12}6} = \frac{4\log_{12}2}{\log_{12}2+\log_{12}3}$$

$$3\log_{12}3 = a = 3\log_{12}\frac{12}{4} = 3(1-2\log_{12}2);$$

$$\log_{12}2 = \frac{3-a}{6}; \quad \log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$$

44. Шесть точек расположены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат в одной плоскости

Некоторые из отрезков, попарно соединяющих данные точки, окрашены в красный цвет, остальные —в синий. Доказать, что, по крайней мере, один из образовавшихся треугольников будет одноцветным

Решение: в каждой точке сходится пять отрезков Из них, по крайней мере, три одного цвета Если хотя бы один из отрезков, соединяющих концы этих трех, будет того же цвета, то требуемое доказано. Если же все три отрезка, соединяющие концы трех одноцветных, будут отличного от них цвета, то они образуют сами искомый треугольник.

45 Сколько решений имеет уравнение:

$$\sin x = \lg x$$

Указание: решение проще всего находится графически.

Ответ: три решения.

* * *

Большинство из приведенных задач взято из различных сборников, а отдельные составлены преподавателями кафедры математики Белгородского пединститута.