Н. Г. КУЛАКОВ

О ТОЧКАХ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

В данной статье полно и в самом общем виде излагается вопрос о точках разрыва функции одной переменной.

Пусть x_0 есть точка числовой прямой. Интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, где $\delta>0$, называют окрестностью точки x_0. Полуинтервал $(x_0-\delta, x_0]$ называют левой окрестностью точки x_0. Полусегмент $[x_0, x_0+\delta)$ называют правой окрестностью точки x_0.

Пусть $E=\{x\}$ есть множество точек числовой прямой. Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек множества E.

При этом предельная точка x_0 может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать E.

Из определения предельной точки следует, что конечные множества предельных точек не имеют.

Бесконечные множества могут иметь предельные точки, а могут их и не иметь.

Если бесконечное множество является ограниченным, то оно всегда имеет по крайней мере одну предельную точку (теорема Больцано — Вейерштрасса).

Пусть x_0 есть предельная точка множества E. Возможны следующие три случая:

1) Только слева от точки x_0 в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из E.

В этом случае предельную точку x_0 называют левосторонней предельной точкой множества E.

Иначе говоря, точка x_0 называется левосторонней предельной точкой множества E, если в любой левой окрестности точки x_0 и только в ней содержится бесконечное множество точек из E.

2) Только справа от точки x_0 в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из E. В этом элучае предельную точку x_0 называют правосторонней предельной точкой множества E.

Таким образом, точка x_0 называется правосторонней предельной точкой множества E, если в любой правой окрестности точки x_0 и только в ней содержится бесконечное множество точек из E.

3) И слева и справа от точки x_0 в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из E.

В этом случае предельную точку x_0 называют двусторонней предельной точкой множества E.

Иначе говоря, точка x_0 называется двусторонней предельной точкой множества E, если в любой левой окрестности и в любой правой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек из E.

Точка $x_0 \in E$ называется двусторонней изолированной (или просто изолированной) точкой множества E, если она не является предельной для него.

Иными словами, точка $x_0 \in E$ называется двусторонней изолированной точкой множества E, если существует такая окрестность точки x_0, в которой нет других точек из множества E, кроме точки x_0.

Точку $x_0 \in E$ будем называть левосторонней изолированной точкой множества E, если существует такая левая окрестность точки x_0, в которой нет других точек из E, кроме точки x_0, а в любой правой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек из E.

Ясно, что каждая левосторонняя изолированная точка множества E является для него правосторонней предельной точкой.

Если правосторонняя предельная точка множества E принадлежит E, то она будет левосторонней изолированной точкой множества E.

Точку $x_0 \in E$ будем называть правосторонней изолированной точкой множества E, если существует такая правая окрестность точки x_0, в которой нет других точек из E, кроме точки x_0, а в любой левой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек из E.

Заметим, что каждая правосторонняя изолированная точка множества E является для него левосторонней предельной точкой.

Если левосторонняя предельная точка множества E принадлежит E, то она будет правосторонней изолированной точкой множества E.

Ясно, что каждая точка множества E есть либо двусторонняя изолированная, либо предельная точка E.

Множество E называется изолированным множеством, если оно состоит из одних двусторонних изолированных точек.

Если обозначить через:

E' — совокупность всех предельных точек множества E,

e' — совокупность всех предельных точек множества E, принадлежащих E,

E_1 — совокупность всех двусторонних предельных точек множества E,

e'_1 — совокупность всех двусторонних предельных точек множества E, принадлежащих E,

E'_2 — совокупность всех левосторонних предельных точек множества E,

e'_2 — совокупность всех левосторонних предельных точек множества E, принадлежащих E,

E'_3 — совокупность всех правосторонних предельных точек множества E,

e'_3 — совокупность всех правосторонних предельных точек множества E, принадлежащих E,

e — совокупность всех двусторонних изолированных точек множества E,

e_1 — совокупность всех левосторонних изолированных точек множества E,

e_2 — совокупность всех правосторонних изолированных точек множества E, то мы можем написать следующие включения и равенства:

$$e' \subset E', \ e'_1 \subset E'_1, \ e'_2 \subset E'_2, \ e'_3 \subset E'_3, \ e_1 \subset E'_3,$$
$$e_2 \subset E'_2, \ E' = E'_1 + E'_2 + E'_3, \tag{1}$$
(2) $$e' = e'_1 + e'_2 + e'_3, \ E = e + e'_1 + e'_2 + e'_3, \tag{3}$$
(4) $$E = e + e', \ e'_2 = e_2, \ e'_3 = e_1,$$
(5) $$E = e + e'_1 + e_1 + e_2, \ E - E' = E - e' = e,$$

где в равенствах (1), (2), (3), (4) и (5) слагаемые множества попарно не пересекаются.

Пусть далее:

1) $E^+(x_0, \delta) = E \cdot (x_0, x_0 + \delta)$ есть пересечение множества E с интервалом $(x_0, x_0 + \delta)$.

2) $E^-(x_0, \delta) = E \cdot (x_0 - \delta, x_0)$ есть пересечение множества E с интервалом $(x_0 - \delta, x_0)$.

3) $E(x_0, \delta) = E \cdot [(x_0 - \delta, x_0) + (x_0, x_0 + \delta)]$ есть пересечение множества E с суммой интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$.

Прежде чем перейти к изложению вопроса о точках разрыва функции одной переменной, остановимся коротко на понятии одностороннего предела функции.

Пусть конечная действительная функция $\varphi(x)$ действительного переменного x определена на множестве E. Могут быть следующие четыре друг друга исключающие возможности:

1) Точка x_0 является левосторонней предельной точкой множества E. В этом случае вводится понятие левого предела функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, но не вводится понятие правого предела.

а) Число A называют левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^-(x_0, \delta)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon,$$

и пишут:

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \varphi(x_0 - 0).$$

б) Несобственное число ∞ называют левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого числа $K > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^-(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| > K,$$

и пишут:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \infty.$$

в) Несобственное число $+\infty$ называют левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого числа $K > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^-(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\varphi(x) > K,$$

и пишут:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = +\infty.$$

Ясно, что если функция имеет левый предел, равный $+\infty$, то можно сказать, что ее левый предел равен и ∞.

г) Несобственное число $-\infty$ называют левым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого числа $K > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^-(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\varphi(x) < -K,$$

и пишут:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = -\infty.$$

Заметим, что если функция имеет левый предел, равный $-\infty$, то можно сказать, что ее левый предел равен и ∞.

2) Точка x_0 является правосторонней предельной точкой множества E. В этом случае вводится понятие правого предела функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, но не вводится понятие левого предела.

а) Число B называют правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E^+(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - B| < \varepsilon,$$

и пишут:

$$B = \lim_{x \to x_0 + 0} \varphi(x) = \varphi(x_0 + 0).$$

б) Несобственное число ∞ называют правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого числа

$K>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек $x \in E^+(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)|>K,$$

и пишут:

$$\lim_{x \to x_0+0} \varphi(x)=\infty.$$

в) Несобственное число $+\infty$ называют правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого числа $K>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек $x \in E^+(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\varphi(x)>K,$$

и пишут:

$$\lim_{x \to x_0+0} \varphi(x)=+\infty.$$

Заметим, что если функция имеет правый предел, равный $+\infty$, то можно сказать, что ее правый предел равен и ∞.

г) Несобственное число $-\infty$ называют правым пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого числа $K>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек $x \in E^+(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\varphi(x)<-K,$$

и пишут:

$$\lim_{x \to x_0+0} \varphi(x)=-\infty.$$

Отметим, что если функция имеет правый предел, равный $-\infty$, то можно сказать, что ее правый предел равен и ∞.

3) Точка x_0 является двусторонней предельной точкой множества E. В этом случае можно говорить и о левом и о правом пределах функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E. Если точка x_0 есть двусторонняя предельная точка множества E, то вводится понятие предела.

Если левый и правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E совпадают, то их общее значение

$$\lim_{x \to x_0-0} \varphi(x)=\lim_{x \to x_0+0} \varphi(x)$$

называют пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E.

Это определение (в случае конечного предела) равносильно следующему определению.

Число C называют пределом функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек $x \in E(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)-C|<\varepsilon,$$

и пишут:

$$C=\lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

4) Точка x_0 является двусторонней изолированной точкой множества E. В этом случае не вводится понятие левого предела и не вводится понятие правого предела (и тем более не вводится понятие предела) функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E.

Теперь перейдем к изложению вопроса о точках разрыва функции. Рассмотрим семь возможных случаев.

1) Если x_0 есть двусторонняя изолированная точка множества E, то функция $\varphi(x)$, по определению, считается непрерывной (непрерывной и слева и справа) в точке x_0 по множеству E.

2) Точка x_0 является левосторонней изолированной точкой множества E.

По определению, функция $\varphi(x)$ считается непрерывной слева в точке x_0 по множеству E.

Если выполняется равенство

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \varphi(x), \tag{1}$$

то функцию $\varphi(x)$ называют непрерывной справа в точке x_0 по множеству E.

При нарушении равенства (1) говорят, что функция $\varphi(x)$ имеет правый разрыв в точке x_0 по множеству E.

Если правый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E не существует или является бесконечным, то правый разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом второго рода. Он является неустранимым.

Если же правый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E является конечным, но не равным числу $\varphi(x_0)$, то правый разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом первого рода. Он всегда является устранимым.

Если значение функции $\varphi(x)$ в точке x_0 переопределить, положив его равным правому пределу функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, то правый разрыв в точке x_0 устраняется и, следовательно, функция $\varphi(x)$ становится непрерывной справа в точке x_0 по множеству E.

3) Точка x_0 является правосторонней изолированной точкой множества E.

По определению, функция $\varphi(x)$ считается непрерывной справа в точке x_0 по множеству E.

Если выполняется равенство

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \varphi(x), \tag{2}$$

то функцию $\varphi(x)$ называют непрерывной слева в точке x_0 по множеству E.

При нарушении равенства (2) говорят, что функция $\varphi(x)$ имеет левый разрыв в точке x_0 по множеству E.

Если левый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E не существует или является бесконечным, то левый разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом второго рода. Он является неустранимым.

Если же левый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E является конечным, но не равным числу $\varphi(x_0)$, то левый разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом первого рода.

Он всегда является устранимым. Если значение функции $\varphi(x)$ в точке x_0 переопределить, положив его равным левому пределу функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, то левый разрыв в точке x_0 устраняется и, следовательно, функция $\varphi(x)$ становится непрерывной слева в точке x_0 по множеству E.

4) Точка x_0 является левосторонней предельной точкой множества E, не принадлежащей E.

По определению, функция $\varphi(x)$ считается разрывной (разрывной слева и справа) в точке x_0 по множеству E.

Если левый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E не существует или является бесконечным, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом второго рода. Он является неустранимым.

Если же левый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E является конечным, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом первого рода. Он всегда является устранимым.

Если значение функции $\varphi(x)$ в точке x_0 доопределить, положив его равным левому пределу функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, то разрыв в точке x_0 устраняется и, следовательно, функция $\varphi(x)$ становится непрерывной (непрерывной и слева и справа) в точке x_0 по множеству $E+\{x_0\}$.

5) Точка x_0 является правосторонней предельной точкой множества E, не принадлежащей E.

По определению, функция $\varphi(x)$ считается разрывной (разрывной слева и справа) в точке x_0 по множеству E.

Если правый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E не существует или является бесконечным, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом второго рода. Он является неустранимым.

Если же правый предел функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E является конечным, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом первого рода. Он всегда является устранимым.

Если значение функции $\varphi(x)$ в точке x_0 доопределить, положив его равным правому пределу функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, то разрыв в точке x_0 устраняется и, следовательно, функция $\varphi(x)$ становится непрерывной (непрерывной и слева и справа) в точке x_0 по множеству $E+\{x_0\}$.

6) Точка $x_0 \in E$ является двусторонней предельной точкой множества E.

Функцию $\varphi(x)$ называют непрерывной (непрерывной слева и справа) в точке x_0 по множеству E, если выполняется двойное равенство

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \varphi(x) \tag{3}$$

При нарушении равенства (3) говорят, что функция $\varphi(x)$ имеет разрыв в точке x_0 по множеству E.

Если хотя бы один из односторонних пределов функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E не существует или является бесконечным, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом второго рода. Он является неустранимым.

Если левый и правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E являются конечными и для них нарушается равенство (3), то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом первого рода.

Разрыв первого рода функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют устранимым, если выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} \varphi(x), \tag{4}$$

в противном случае разрыв называют неустранимым.

Если значение функции $\varphi(x)$ в точке x_0 устранимого разрыва переопределить, положив его равным общему значению левого и правого пределов функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, то разрыв в точке x_0 устраняется и, следовательно, функция $\varphi(x)$ становится непрерывной (непрерывной и слева и справа) в точке x_0 по множеству E.

7) Точка x_0 является двусторонней предельной точкой множества E, не принадлежащей E.

По определению, функция $\varphi(x)$ считается разрывной (разрывной и слева и справа) в точке x_0 по множеству E.

Если хотя бы один из односторонних пределов функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E не существует или является бесконечным, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом второго рода. Он является неустранимым.

Если левый и правый пределы функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E являются конечными, то разрыв функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют разрывом первого рода.

Разрыв первого рода функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E называют устранимым, если выполняется равенство (4). В противном случае разрыв называют неустранимым.

Если значение функции $\varphi(x)$ в точке x_0 устранимого разрыва доопределить, положив его равным общему значению левого и правого пределов функции $\varphi(x)$ в точке x_0 по множеству E, то разрыв в точке x_0 устраняется и, следовательно, функция $\varphi(x)$ становится непрерывной (непрерывной и слева и справа) в точке x_0 по множеству $E + \{x_0\}$.