базисе, а E_{QNF} получены методом квантовой нормальной формы. Как видно из табл. значения энергии, вычисленные по приближенной формуле (21), хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [13].

Таблица

Сравнение уровней энергии уравнения Шредингера (1-2)

N	E_{exact}	E_{exact}	E_{12}
0	0.50726	0.50724	0.507212
1	1.5356	1.53546	1.535536
2	2.5908	2.5898	2.590721
3	3.6711	3.6678	3.671087
4	4.7749	4.7669	4.775385
5	5.9010	5.8845	5.902891
6	7.0483	7.0181	7.053602
7			8.228526
8			9.430072
9			10.662540
10			11.932711

Здесь E_{exact} и E_{QNF} вычислены методами диагонализации и квантовой нормальной формы, соответственно [13], а E_{12} – по формуле (21) $(\alpha = 0{,}01)$.

Кроме того, если параметр $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ в выражении (2), то формула (21) дает для основного состояния (n=0) значение энергии E(n=0)=0.5 x 1.000 074 984, в то время как точное значение [14] этой величины равно E(n=0)=0.5 x 1.000 074 986. При $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ по нашей формуле (21) получаем E(n=1000) = 0.5 x 2134.5, а точное значение [14] равно E(n=1000)=0.5 x 2134.2.

Однако отметим, что предлагаемое приближение ограничено достаточно малой нелинейной частью в гамильтониане (2) и является одним из вариантов стандартной теории возмущений. Несмотря на частный выбор гамильтониана (2), предлагаемый способ решения уравнения Шредингера можно применить к более широкому классу гамильтонианов.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-02-16337).

Библиографический список

1. Swimm R.T. and Delos.J.B. J. Chem. Phys., 1979, 71, 1706.

2. Jaffe Ch. and Reinhardt W.P. J. Chem. Phys., 1982, 77, 5191.

3. Shirts R.B. and Reinhardt W.P. J. Chem. Phys 1982, 77, 5204.

4. Robnik M. J. Phys.: Math. Gen., 1984, A17, 109.

5. Uzer T., Marcus R.A. J. Chem. Phys., 1984, 81, 5013.

6. N. A. Chekanov N.A. Jad. Fiz., 1989, 50, 344.

7. Farrelly D., Uzer T., Raines P.E., Skelton J.P., Milligan J.A. Phys. Rev., 1992, A45, 4738.

8. Chekanov N.A., Gusev A.A., Krasilnikov V.V. Ghum. Fiz. Khim., 2000, 74, 101.

9. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. New York, A.M.S. Colloquium Publication, 1927.

10. Gustavson F.G. The Astronomical Journal, 1966, 71, 670.

11. Basios V., Chekanov N.A., Markovski B.L., Rostovtsev V.A., and Vinitsky S.I.. Comp. Phys. Commun., 1995, 90, 355.

12. Weyl H. The theory of groups and quantum mechanics. Dover Publications, 1931.

13. Ali M.K. J. Math. Phys., v. 26, No. 10, 1985, p. 2565.

14. Banerjee K., Bhatnagar S.P., Choudhry V. and Kanwal S.S. Proc. R. Soc. Lond., 1978, A 360, 575.

УДК 530.1

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД СО СПОНТАННО НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский

г. Харьков, Харьковский физико-технический институт

В докладе изложены основные идеи и методы гамильтонова подхода описания неравновесной динамики в конденсированных средах. Охвачены классические и квантовые среды, начиная с простых жидкостей и заканчивая такими сложными объектами, как квантовая жидкость ^3He или жидкие кристаллы, которые характеризуются тензорным параметром порядка. Гамильтонов подход позволяет построить нелинейные макроскопические уравнения динамики пространственно-неоднородных состояний упомянутых сред наиболее простым и элегантным способом.

В краткой форме изложены ключевые положения предлагаемого подхода и даны примеры их использования для ряда конденсированных сред.

Вариационный принцип. Основополагающую роль при получении скобок Пуассона (СП) играет структура кинематической части лагранжиана, содержащая линейным и однородным образом временные производные от динамических переменных

$$L = L_k(\varphi,\dot{\varphi}) - H \equiv \int d^3x F_\alpha(x,\varphi(x'))\dot{\varphi}_\alpha(x) - H .$$

Здесь $L_k(\varphi,\dot{\varphi})$ – кинематическая часть лагранжиана, $H(\varphi) = \int d^3x \varepsilon(\varphi)$ – гамильтониан системы, $F_\alpha(x,\varphi(x'))$ – некоторый функционал динамических переменных $\varphi_\alpha(x)$. Из принципа стационарного действия следуют уравнения движения для компонент поля $\varphi_\alpha(x)$

$$\dot{\varphi}_\alpha(x) = \int d^3x' J^{-1}_{\alpha\beta}(x,x') \frac{\delta H}{\delta\varphi_\beta(x')}, \qquad (1)$$

$$J_{\alpha\beta}(x,x') \equiv \frac{\delta F_\beta(x')}{\delta\varphi_\alpha(x)} - \frac{\delta F_\alpha(x)}{\delta\varphi_\beta(x')}.$$

Определим СП произвольных функционалов $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ равенством

$$\{A,B\} \equiv \int d^3x d^3x' \frac{\delta A}{\delta\varphi_\alpha(x)} J^{-1}_{\alpha\beta}(x,x') \frac{\delta B}{\delta\varphi_\beta(x')} . \qquad (2)$$

Такое определение приводит к антисимметрии скобки Пуассона и справедливости тождества Якоби. Уравнения (1) примут обычный гамильтонов вид

$$\dot{\varphi}_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x), H\} . \qquad (3)$$

Канонические преобразования. Существенное значение в построении гамильтонова формализма имеют канонические преобразования. Конечные преобразования

$$\varphi_\alpha(x) \to \varphi'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x,\varphi(x')), \qquad (4)$$

оставляющие инвариантной кинематическую часть действия будут каноническими, если выполняется условие:

$$\int d^3x F_\alpha(x;\varphi)\,\delta\varphi_\alpha(x) - \int d^3x F_\alpha(x;\varphi')\,\delta\varphi'_\alpha(x) = \delta Q(\varphi). \qquad (5)$$

Здесь $Q(\varphi)$ – некоторый функционал динамических переменных φ_α, зависящий от структуры канонических преобразова-ний. Такие преобразования удовлетворяют соотношению

$$F_\alpha(x;\varphi) = \int d^3x' F_\beta(x';\varphi') \frac{\delta\varphi'_\beta(x';\varphi)}{\delta\varphi_\alpha(x)},$$

при $Q(\varphi) - const$ и, согласно (5), являются каноническими. В случае бесконечно малых преобразований

$$\varphi_\alpha(x) \to \varphi'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) + \delta\varphi_\alpha(x;\varphi(x'))$$

соотношение (5) принимает вид

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x), G\}, \qquad (6)$$

$$G = \int d^3x F_\alpha(x,\varphi)\delta\varphi_\alpha(x) .$$

Для получения СП необходимо рассмотреть наиболее общие канонические преобразования динамических переменных, которые не обязательно являются преобразованиями группы нарушенной симметрии.

Сокращенное описание и скобки Пуассона. Вопрос выбора параметров сокращенного описания (гидродинами-ческих параметров) в конденсированных средах обусловлен рядом факторов. Часть из них связана со свойствами симметрии гамильтониана, что проявляется наличием динамических уравнений, обусловленных дифференциальными законами сохранения. Для конденсированных сред с нарушенной симметрией ряд параметров сокращенного описания связан с характером такого нарушения симметрии. Обычно генераторами нарушенной симметрии являются импульс, число частиц или спин системы. Возникающие при этом дополнительные гидродинамические параметры необходимо представить в терминах величин канонически сопряженных к генераторам нарушенной симметрии. Наконец, в случае низкоразмерных конденсированных сред $(d < 3)$, в присутствии внешних сильных полей, и благодаря взаимодействиям, приводящим к нескольким характерным временам релаксации, в набор параметров сокращенного описания входят некоторые определенные функции параметра порядка. При этом поведение таких величин может и не являться гидродинамическим. Последнее означает, что если волновой вектор $k \to 0$, то время релаксации $\tau \to \infty$.

Общим требованием является замкнутость алгебры скобок Пуассона для набора параметров сокращенного описания. Построение СП для всего набора этих гидродинамических переменных и представляет основную проблему.

Дифференциальные законы сохранения. В рамках гамильтонова подхода сформулируем дифференциальные законы сохранения, связанные с симметрией гамильтониана. Генераторами преобразований группы симметрии гамильтониана являются аддитивные интегралы движения. Законы сохранения в дифференциальной форме имеют вид

$$\dot{\zeta}_a(x) = -\nabla_k \zeta_{ak}(x). \tag{7}$$

Имеет место представление плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах скобок Пуассона от соответствующих плотностей ζ_a [1]

$$\zeta_{ak}(x) = -\delta_{ak}\varepsilon(x) + \int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda \{\zeta_a(y), \varepsilon(y')\},$$

$$a \neq 0, \tag{8}$$

$$\zeta_{0k}(x) = \frac{1}{2}\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda \{\varepsilon(y), \varepsilon(y')\},$$

$$(y \equiv x + \lambda x', y' \equiv x - (1-\lambda)x').$$

Импульс – генератор нарушенной симметрии. Классические сплошные среды. В терминах лагранжевых переменных ξ_i, соответствующих недеформированному состоянию, запишем лагранжиан системы в виде

$$L = L_k - \int d^3\xi \underline{\varepsilon}(\xi),$$

где $\underline{\varepsilon}(\xi) = \underline{\varepsilon}(\underline{\pi}(\xi); \partial x/\partial\xi)$ – плотность энергии,

L_k – кинематическая часть лагранжиана:

$$L_k = \int d^3\xi \underline{L}_k(\xi), \underline{L}_k(\xi) = \underline{\pi}_i(\xi)\dot{x}_i(\xi) \tag{9}$$

и $\underline{\pi}_i(\xi)$ – лагранжева плотность импульса. Связь лагранжевой переменной ξ_i с эйлеровой x_k определяется равенством

$$x(\xi) = \xi_i + u_i(x,t).$$

Здесь $u_i(x,t)$ – вектор смещения частиц сплошной среды. Замечая, что

$$b_{ij}(x)\dot{x}_j = \dot{u}_i(x),$$
$$b_{ij}(x) = \delta_{ij} - \nabla_j u_i(x), \tag{10}$$

представим плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$L_k(x) = \pi_i(x) b_{ij}^{-1}(x)\dot{u}_j(x), \tag{11}$$

где $\pi_i(x) = |\partial\xi/\partial x|\underline{\pi}_i(\xi)$ – эйлерова плотность импульса и b_{ij} – тензор дисторсии. Для формулировки уравнения адиабатичности понадобятся СП, содержащие плотность энтропии $\sigma(x)$. С этой целью переопределим кинематическую часть лагранжиана

$$L_k(x) = p_j(x)\dot{u}_j(x) - \sigma(x)\dot{\psi}(x), \tag{12}$$

$$p_j(x) \equiv (\pi_i(x) - \sigma(x)\nabla_i\psi(x)) b_{ij}^{-1}(x).$$

Переменная $\psi(x)$, сопряженная к переменной $\sigma(x)$, введена формально и при написании уравнений движения будет считаться циклической.

Рассмотрим бесконечно малые канонические преобразования $\delta\varphi_a(x;\varphi)$, оставляющие инвариантной кинематическую часть лагранжиана. Зная, с одной стороны, их явный вид, а с другой стороны, представляя $\delta\varphi_a$ в виде (6), нетрудно найти СП различных динамических переменных. Легко видеть, что вариации

$$\delta p_i(x) = \delta\sigma(x) = 0,$$
$$\delta u_i(x) = f_i(x), \qquad \delta\psi(x) = \chi(x) \tag{13}$$

(где функции $f_i(x)$, $\chi(x)$ не зависят от $u_i(x), p_i(x), \sigma(x), \psi(x)$) оставляют инвариантной кинематическую часть лагранжиана (12). Представляя их в виде

$$\delta p_i(x) = \{p_i(x), G\}, \delta u_i(x) = \{u_i(x), G\},$$
$$\delta\sigma(x) = \{\sigma(x), G\}, \delta\psi(x) = \{\psi(x), G\}, \tag{14}$$

где G – генератор преобразований (13)

$$G = \int d^3x (p_i(x) f_i(x) - \sigma(x)\chi(x)), \tag{15}$$

из (14),(15) найдем СП физических переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, $\sigma(x)$, $\psi(x)$

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\nabla_i\delta(x-x'),$$
$$\{\pi_i(x), \psi(x')\} = \nabla_i\psi(x)\delta(x-x'),$$

$$\{\pi_i(x),\pi_k(x')\}=$$
$$=\pi_k(x)\nabla'_i\delta(x-x')-\pi_i(x')\nabla_k\delta(x-x'),$$
$$\{u_i(x),\pi_k(x')\}=b_{ik}(x)\delta(x-x') \qquad (16)$$
$$\{\sigma(x),\psi(x')\}=\delta(x-x').$$

Если $\widetilde{\rho}$ – плотность вещества, отнесенная к единице недеформированного объема, то истинная плотность ρ определяется формулой

$$\rho=\widetilde{\rho}\det(b_{ij}). \qquad (17)$$

Принимая во внимание (16),(17), найдем СП для $\rho(x)$, $\pi_i(x)$:

$$\{\pi_i(x),\rho(x')\}=\rho(x)\nabla'_i\delta(x-x'). \qquad (18)$$

Гамильтониан рассматриваемой сплошной среды имеет вид

$$H=\int d^3x\,\varepsilon(x),\varepsilon(x;\sigma(x'),\pi_i(x'),b_{ij}(x')). \quad (19)$$

Здесь $\varepsilon(x)$ – плотность энергии в эйлеровых переменных и связанная с плотностью энергии в лагранжевых переменных формулой $\varepsilon(x)=|\partial\xi/\partial x|\underline{\varepsilon}(\xi)$.

В силу свойства инвариантности относительно трансляций лагранжевых координат, плотность энергии $\varepsilon(x)$ зависит не от самих величин $u_i(x)$, а только от тензора дисторсии $b_{ij}(x)$. Его ненулевая СП с плотностью импульса $\pi_i(x)$ равна

$$\{b_{ij}(x),\pi_k(x')\}=-b_{ik}(x')\nabla_j\delta(x-x'). \qquad (20)$$

Используя СП (16),(20), получим

$$\dot{\sigma}(x)=-\nabla_i\left(\sigma(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\right),$$
$$\dot{b}_{ik}(x)=-\nabla_k\left(b_{ij}(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_i(x)}\right), \qquad (21)$$
$$\dot{\pi}_i(x)=-\pi_j\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\pi_j(x)}-\nabla_j\left(\pi_i(x)\frac{\delta H}{\delta\pi_j(x)}\right)-$$
$$-b_{ki}(x)\nabla_j\frac{\delta H}{\delta b_{kj}(x)}-\sigma(x)\nabla_i\frac{\delta H}{\delta\sigma(x)}.$$

Уравнения (21) и общий функциональный вид плотности энергии (19) описывают неравновесные свойства сплошных сред с произвольным характером пространственных неоднородностей и являются весьма сложными для анализа. Значительное упрощение возникает при исследовании этих уравнений в длинноволновом приближении, когда пространственные неоднородности динамических величин малые.

Теория упругости. Получим уравнения теории упругости из общих динамических уравнений (21). Предположение об инвариантности гамильтониана системы относительно произвольных вращений решетки приводит к тому, что плотность энергии взаимодействия будет зависеть от вполне определенных комбинаций тензора дисторсии b_{ij}. Поскольку при вращениях тела преобразуются координаты x_k, соответствующие положениям частиц среды в деформированном состоянии, а лагран-жевы координаты ξ_k остаются неизменными, то в качестве инвариантов могут быть выбраны величины

$$K_{ij}=\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}=b_{ik}b_{jk}.$$

В локальном приближении $\varepsilon(x)\equiv\varepsilon(\sigma(x),\pi_i(x),b_{ij}(x))$ и с учетом инвариантности Галилея получим уравнения движения упругой среды:

$$\dot{\sigma}=-\nabla_i(\sigma\pi_i/\rho), \qquad \dot{b}_{ik}=-\nabla_k(b_{ij}\pi_j/\rho),$$
$$\dot{\pi}_i=-\nabla_j t_{ij},$$
$$t_{ij}=\frac{\pi_i\pi_j}{\rho}+2b_{mi}b_{lj}\frac{\partial\nu}{\partial K_{ml}}+\left(-\nu+\sigma\frac{\partial\nu}{\partial\sigma}\right)\delta_{ij},$$

где $\nu(x)$ – плотность энергии взаимодействия.

Гидродинамика. Если плотность энергии зависит от тензора дисторсии только посредством плотности числа частиц $\rho(x)$ (см. (17)), то из уравнений движения упругой среды получим обычные уравнения идеальной гидродинамики

$$\dot{\varsigma}_a=-\nabla_k\varsigma_{ak}, \qquad (22)$$

где плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах термодинамического потенциала $\omega(Y_a)\equiv Y_a\varsigma_a-\sigma$ имеют вид

$$\varsigma_{ak}=-\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0}. \qquad (23)$$

Термодинамические силы Y_a связаны с плотностями аддитивных интегралов движения ζ_a соотношениями $\partial\omega/\partial Y_a=\zeta_a$.

Жидкие кристаллы. Расширение набора параметров сокращенного описания для жидких кристаллов обусловлено свойствами анизотропии и конформационной нежесткостью молекул. Тензор дисторсии $b_{ki}(x)$ (10) задает ориентационные и трансляционные состояния равновесия, а также определяет группу движений в неравновесном состоянии.

Для нематика с молекулами стержнеобразной формы недеформированное состояние можно задать некоторым семейством линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением стержней. Пусть $\xi_i = \xi_i(\alpha)$ – параметрические уравнения одной из линий этого семейства. Тогда направление стержней в каждой точке характеризуется вектором с координатами $\underline{a}_i \equiv d\xi_i / d\alpha$. Этот вектор описывает ориентационный и конформационный порядок недеформиро-ванного жидкого кристалла и имеет смысл лагранжевой переменной. Модуль этого вектора задает конформационную степень свободы недеформированного состояния. При деформации среды линии семейства также деформируются, происходит изменение направления оси анизотропии и конформационного параметра. Пусть $x_i = x_i(\alpha)$ – параметрические уравнения уже рассмотренной линии семейства – после деформации характеризуются вектором $a_i(x) = dx_i / d\alpha$. Учитывая, что $x_i = x_i(\xi)$, легко видеть, что векторы $\underline{a}_i$ и $a_i(x)$ связаны соотношением

$$a_i(x) = b_{ij}^{-1}(x)\underline{a}_j. \tag{24}$$

Отсюда следует, что единичный вектор для произвольного неравновесного состояния может быть определен формулой [2]

$$n_i(x) = a_i(x) / a(x). \tag{25}$$

Используя (10) и (25), легко найти СП для переменных $\pi_i(x)$, $n_j(x)$:

$$\begin{aligned} \{\pi_\lambda(x), n_j(x')\} &= \delta(x - x')\nabla_\lambda n_j(x) - \\ &- \delta_{\lambda j}^{\perp}(\vec{n}(x'))n_k(x')\nabla'_k \delta(x - x'), \\ \delta_{ij}^{\perp}(n(x)) &\equiv \delta_{ij} - n_i(x)n_j(x). \end{aligned} \tag{26}$$

Для одноосного учет конформационной степени свободы осуществляется путем включения в набор параметров сокращенного описания дополнительной переменной – модуля вектора $a(x) = |\vec{a}(x)|$. В соответствии с формулой (24) получим скобку Пуассона для этой гидродинамической величины [3]

$$\begin{aligned} \{\pi_i(x), a(x')\} &= \delta(x - x')\nabla_i a(x) + \\ &+ a(x')\delta_{i\lambda}^{\perp}(\vec{n}(x'))\nabla'_\lambda \delta(x - x'). \end{aligned} \tag{27}$$

СП (15), (26), (27) образуют алгебру динамических переменных нематика со стержнеобразными молекулами при наличии конформационной степени свободы. Уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a(x) = (\varepsilon(x), \pi_k(x), \rho(x))$ по-прежнему записываются в форме (22), где плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах термодинамического потенциала $\omega = \omega(Y, \vec{n}, \nabla\vec{n}, a)$ имеют вид:

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} +$$

$$+\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla_k n_j}\nabla_i n_j + n_i\frac{\delta\omega}{\delta n_k} + \frac{\partial\omega}{\partial a}a\delta_{ik}^{\perp}(\vec{n})\right]\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_i}{Y_0}.$$

Уравнения движения для дополнительных параметров имеют вид

$$\dot{n}_j(x) = -v_s(x)\nabla_s n_j(x) - \delta_{ij}^{\perp}(x)n_\lambda(x)\nabla_\lambda v_i(x),$$

$$\dot{a}(x) = -v_s(x)\nabla_s a(x) - a(x)\delta_{kl}^{\perp}(\vec{n}(x))\nabla_k v_l(x)$$

Здесь $v_i = \pi_i / \rho$ – скорость движения единицы массы среды.

Спин – генератор нарушенной симметрии. Многоподрешеточные магнетики. В случае систем с полным спонтанным нарушением симметрии относительно спиновых вращений дополнительными динамическими величинами являются углы поворота φ_α, осуществляющие параметризацию группы трехмерных вращений спинового пространства, или связанная с ними вещественная матрица поворота $a(\varphi)$ ($a\tilde{a} = 1$, здесь под знаком ~ понимается операция транспонирования), которая в экспоненциальной параметризации имеет вид

$$a(\varphi) = \exp(-\varepsilon\varphi), \quad (\varepsilon\varphi)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_\gamma.$$

Матрице поворота $a(\varphi)$ сопоставляются правая $\underline{\omega}_{\alpha k}$ и левая $\omega_{\alpha k}$ дифференциальные формы Картана, определяемые соотношениями

$$\underline{\omega}_{\alpha k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_{\beta\lambda}\nabla_k a_{\gamma\lambda}\ ,\ {}_{\lambda\gamma}\nabla_k a_{\lambda\beta}\ .$$

$$\omega_{\alpha k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_{\lambda\gamma}\nabla_k a_{\lambda\beta}\ .$$

Для получения алгебры СП динамических переменных магнетика запишем кинематическую часть лагранжиана в виде

$$L_k = \int d^3x\, L_k(x), \quad L_k(x) = -s_\alpha(x)\omega_\alpha(x),$$

где $\omega_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{a}\dot{a})_{\gamma\beta}$ – левая форма Картана. Найдем преобразования, оставляющие кинематическую часть инвариантной. С этой целью рассмотрим вариации $\delta a_{\alpha\beta}$, для которых сохраняется условие ортогональности $a\tilde{a} = 1$: $\delta a\tilde{a} + \tilde{a}\,\delta a = 0$. Так как вариации $\delta a_{\alpha\beta}$ определяются тремя бесконечно малыми параметрами, то в качестве параметров можно принять величины $R_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\tilde{a}_{\gamma\mu}\delta a_{\mu\beta}$. Вариация левой формы Картана равна

$$\delta\omega_\alpha = \dot{R}_\alpha + (\omega + R)_\alpha. \qquad (28)$$

Рассмотрим не зависящие от времени $(\dot{R} = 0)$ вариации (28) и наряду с ними – преобразования плотности спина:

$$\delta\omega_\alpha = (\omega + R)_\alpha\ , \delta s_\alpha = (s + R)_\alpha. \qquad (29)$$

Закон преобразования плотности спина определен таким образом, что кинематическая часть лагранжиана была инвариантна относительно данного класса вариаций, $\delta L_k = 0$. Генератор преобразований (29) равен

$$G = -\int d^3x s_\alpha(x) R_\alpha(x).$$

Представим канонические преобразования (29) в виде

$$\delta a_{\alpha\beta} = \{a_{\alpha\beta}(x), G\}, \delta s_\alpha = \{s_\alpha(x), G\}. \qquad (30)$$

Выражая вариации δa, δs через R:

$$\delta a_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\rho}\,\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\,R_\gamma\ ,$$

$$\delta s_\alpha = \varepsilon_{\rho\beta\gamma}s_\alpha\,R_\gamma$$

и сравнивая левую и правую части формул (30), найдем СП:

$$\{s_\alpha(x),\ s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(x)\delta(x - x'),$$

$$\{a_{\alpha\beta}(x),\ s_\gamma(x')\} = a_{\alpha\rho}(x)\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\delta(x - x'). \quad (31)$$

Для получения СП $\{a_{\alpha\beta}(x),\ a_{\mu\nu}(x')\}$ воспользуемся экспоненциальной параметризацией матрицы поворота. Действуя аналогично, получим

$$\{a_{\alpha\beta}(x),\ a_{\mu\nu}(x')\} = 0. \qquad (32)$$

Плотность энергии магнетиков является функцией величин s, a, ω_k :

$$\varepsilon(x;\ s(x'),\ a(x')) = \varepsilon(s(x),\ a(x),\ \omega_k(x)).$$

Поскольку основные взаимодействия в системе носят обменный характер, то эта величина инвариантна относительно однородных вращений в спиновом пространстве, поэтому

$$\varepsilon(s, \omega_k, a) = \varepsilon(as, a\omega_k, 1) \equiv \varepsilon(\underline{s}, \underline{\omega}_k),$$

где $\underline{s} = as$, $\underline{\omega}_k = a\omega_k$. Используя (8), (31), (32), плотности потока энергии и спина ς_{ak} ($a = 0, \alpha$) представим в форме

$$\varsigma_{ak} = \frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{ak}}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_\alpha}{Y_0}.$$

Таким образом, динамические уравнения для магнетиков со спонтанно нарушенной симметрией в длинноволновом случае имеют вид [1]

$$\dot{\varsigma}_\alpha = -\nabla_k\varsigma_{\alpha k}\ , \quad \dot{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\rho}\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_\gamma}.$$

Число частиц – генератор нарушенной симметрии. Квантовые кристаллы. Явление сверхтекучести квантового кристалла связано с возможностью движения узлов решетки, характерного для твердого тела, и переноса массы квазичастицами при неподвижных узлах решетки, характерного для сверхтекучей жидкости. Переменными, описывающими нарушение фазовой и трансляционной инвариантности равновесного состояния квантового кристалла, являются сверхтекучая фаза $\phi(x)$ и вектор смещения узлов решетки. Плотность энергии $\varepsilon(x)$ представляет собой функционал переменных – сверхтекучей фазы $\phi(x)$, вектора смещения и плотностей энтропии $\sigma(x)$, массы $\rho(x)$, импульса $\pi_i(x)$: $\varepsilon(x)=\varepsilon(x';\sigma(x'),\ \rho(x'),\ \pi_i(x'),\ \phi(x'),\ u_i(x'))$. В механике сплошных сред переменные $\rho(x)$, $u_i(x)$ не являются независимыми, а связаны соотношением (17). Для квантово-кристаллической фазы число атомов и число узлов решетки не совпадают и переменные $\rho(x)$ и $u_i(x)$ рассматриваются как независимые, так что соотношение (17) уже не выполняется. Запишем плотность кинематической части лагранжиана в виде

$$L_k(x)=\pi_i^* b_{ij}^{-1}\dot{u}_j(x)-\sigma(x)\dot{\psi}(x)-\rho(x)\dot{\phi}(x),$$
$$\pi_i^*=\pi_i-\sigma\nabla_i\psi(x)-\rho\nabla_i\phi.$$

Для получения СП рассмотрим вариации (13) с обобщенным импульсом $p_j=\pi_i^* b_{ij}^{-1}$ и наряду с ними вариации

$$\delta\rho(x)=0,\qquad \delta\phi(x)=g(x).$$

Этим вариациям соответствует генератор

$$G=\int d^3x(p_i f_i-\sigma\chi-\rho g).$$

Поступая аналогично вышеизложенному, придем к алгебре СП (16), (18), включая сверхтекучую фазу квантового кристалла:

$$\{\pi_i(x),\ \phi(x')\}=-\delta(x-x')\nabla_i\phi(x),$$
$$\{\sigma(x),\ \psi(x')\}=\{\rho(x),\ \phi(x')\}=\delta(x-x').$$

Отметим, что в силу свойства инвариантности $\varepsilon(x)$ относительно глобальных фазовых преобразований и пространственных трансляций, плотность энергии $\varepsilon(x)$ зависит не от самих величин $\phi(x), u_i(x)$, а только от их производных

$$\varepsilon(x)=\varepsilon(x';\ \sigma(x'),\ \rho(x'),\ \pi_i(x'),\ p_i(x'),\ b_{ik}(x')).$$

Вектор $\vec{p}(x)$ имеет смысл сверхтекучего импульса. Уравнения динамики квантовых кристаллов имеют вид (22) и

$$\dot{b}_{ik}=\nabla_k\left(b_{ij}\frac{Y_j}{Y_0}\right),\qquad \dot{p}_i=\nabla_i\left(\frac{Y_4+Y_j p_j}{Y_0}\right),$$

где плотности потоков могут быть записаны в компактной форме

$$\varsigma_{ak}=-\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0}+$$
$$+\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_4+Y_i p_i}{Y_0}+\frac{\partial\omega}{\partial b_{jk}}\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{b_{jl}Y_l}{Y_0}.$$

Библиографический список

1. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Шишкин А.Л. // УФЖ, 1991.–Т.36.– С.245.
2. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. // ЭЧАЯ, 1996, Т.27.– С.431.
3. Ковалевский М.Ю., Шишкин А.Л.: Вест. Харьковского национального университета № 510. Сер. физ. "Ядро, частицы, поля".– 2001.– Вып. 1/13.– С. 31.

УДК 532.783

АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУХОСНЫХ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С УЧЕТОМ КОНФОРМАЦИОННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.Ю. Ковалевский

Харьковский физико-технический институт

А.Л. Шишкин

г. Харьков, Научно-технический центр электрофизической обработки НАН Украины

Уравнения динамики жидких кристаллов в феноменологическом подходе получаются из соображений симметрии с учетом законов сохранения [1-3]. При этом возникает проблема аккуратного учета в них нелинейных слагаемых. Более последовательным является гамильтонов подход, который является эффективным методом построения нелинейных динамических уравнений описывающих явления переноса в сывающих явления переноса в различных конденсированных средах [4-6].

Существенным фактором, влияющим на состав гидродинамических параметров, является форма молекул. Как показано в работах [7, 8, 9], структура скобок Пуассона гидродинамических параметров имеет различный вид для дископодобных и стержнеподобных молекул. Физическими проявле-