УДК 519.1, 621.3.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ СЛУЧАЯ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ПРОБЛЕМОЙ ВКЛЮЧЕНИЯ

В.Е. Хачатрян[1], А.А. Несвитайло[2]

[1, 2] Белгородский государственный университет, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: Khachatryan@bsu.edu.ru

В работе описывается множество многоленточных автоматов с неразрешимой проблемой включения. Доказывается, что трансформационный метод задает алгоритм разрешения эквивалентности.

Ключевые слова: множество многоленточных автоматов с неразрешимой проблемой включения, метод трансформационного распознавания эквивалентности в моделях вычислений.

ВВЕДЕНИЕ

В [1, 2, 3] предложен метод трансформационного распознавания эквивалентности в моделях вычислений. В [3] доказана применимость для множества многоленточных автоматов с непересекающимися циклами. Модель вычислений, многоленточные автоматы введены в [6]. Принципиальное отличие этой модели вычислений от других заключается в том, что для неё неразрешима проблема включения [6, 7]. Этот факт потребовал создания методов, позволяющих доказывать разрешимость проблемы эквивалентности без обращения к проблеме включения. Таковым является метод, рассматриваемый в данной работе и основанный на использовании эквивалентных преобразований (э.п.) [5].

Отметим работу Р. Бёрда [6], в которой приводится алгоритм разрешения эквивалентности двухленточных автоматов, и работу Т. Харью и Кархумяки [8], где доказывается разрешимость проблемы эквивалентности во всем классе многоленточных автоматов.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Опишем класс автоматов с неразрешимой проблемой включения, для которого трансформационный метод задает алгоритм разрешения эквивалентности.

Рассмотрим множество двухленточных бинарных автоматов, определенных над алфавитами P={p,q}, Q={0,1} и имеющих вид представленный на рис. 1. Обозначим это множество автоматов через R_0. Автомат D, изображенный на рис. 1, содержит не менее 3 p-состояний и некоторое количество q-состояний. Входом автомата D является p-состояние с одной выходящей дугой помеченной символом 1 (на рис. 1 дуга, несущая символ 1, помечена точкой у основания, а – 0 вообще никак не помечена). Этой дугой начинается цепочка, состоящая из p-состояний. В этой цепочке p-состояния следуют одно за другим. Число этих состояний не меньше одного. Из каждого p-состояния этой цепочки, за исключением последнего, исходит по две дуги. Дуга, выходящая из p-состояния и помеченная символом 1, направлена из этого p-состояния в следующее p-состояние. Дуги, исходящие из этих p-состояний и помеченные символом 0, направлены в различные q-состояния автомата. Этими состояниями начинаются цепочки, состоящие только из q-состояний. Все q-состояния имеют лишь по одной выходящей дуге, помеченной символом 0 или 1. Цепочки не имеют общих состояний и на рис. 1 изображены пунктирными линиями. Эти цепочки завершаются в одном p-состоянии. Назовем это p-состояние предвыходом автомата. Дуга, помеченная символом 0 и выходящая из предвыхода, ведет в выход автомата, а помеченная символом 1 – в состояние, в которое направлена дуга, исходящая из входа автомата.

Автомат D, изображенный на рис. 1, принимает ленты, их содержимое запишем в виде пары (t_1,t_2) . Это упорядоченная пара, компоненты которой состоят из проекций историй путей через автомат, соответственно на символы p и q. Т.е. t_1 – это последовательность меток дуг, исходящих из p-состояний. Значит, $t_1 = i_1,i_2\ldots,i_j\ldots i_k,0$, где $i_j = 1\ldots10$; в этой последовательности ровно i_j – единиц и один 0, $1\leq j \leq k$, $k\geq1$; $t_2 = b_{i1}\, b_{i2}\ldots b_{ij}\ldots b_{ik}$, где b_{ij} – последовательность меток дуг, исходящих из q-состояний.

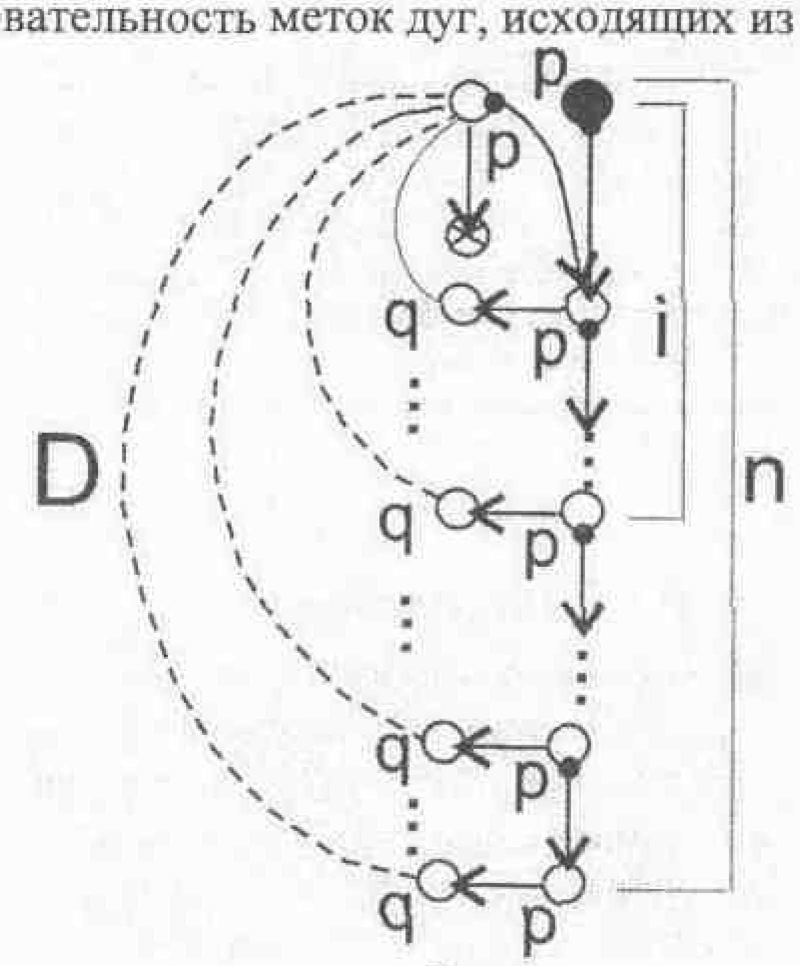

Рис. 1

Обозначим через E(D) множество всех пар (t_1,t_2) лент, принимаемых автоматом D.

Утверждение 1. Проблема выяснения, справедливо ли для любых двух конечных двухленточных автоматов D_1, D_2 из R_0 равенства $E(D_1)\cap E(D_2)=\varnothing$, алгоритмически неразрешима.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2,\ldots a_n$ и $b_1, b_2,\ldots b_n$ – два упорядоченных списка равной длины, состоящих из конечных последовательностей символов алфавита {0,1}. Проблема соответствия Э. Поста [9] состоит в следующем: необходимо выяснить, существует ли последовательность индексов $i_1, i_2,\ldots,i_j,\ldots,i_k$, где $1\leq i_j \leq n$, $k\geq1$, $a_{i1}\, a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{ik} = b_{i1}\, b_{i2}\ldots b_{ij}\ldots b_{ik}$.

Э. Пост доказал [9], что проблема соответствия (для алфавита, содержащего более чем один символ) является алгоритмически неразрешимой.

Сведем проблему непустоты пересечения автоматов множества R_0 к проблеме соответствия Э.Поста.

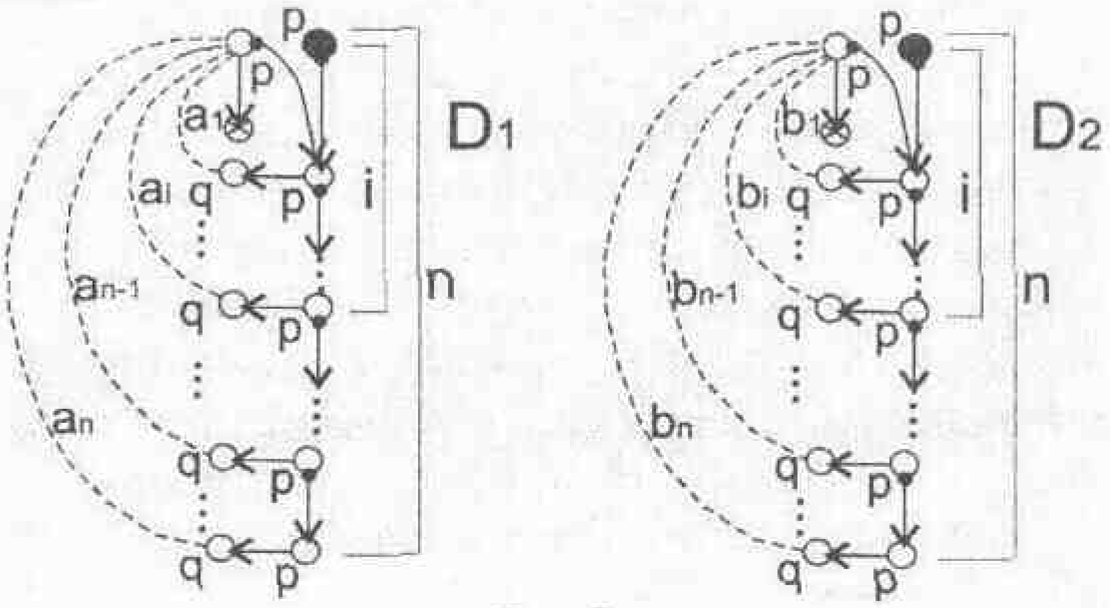

Рис. 2

Рассмотрим автоматы D_1, D_2 из R_0, имеющие вид изображений на рис. 2.

На рисунке пунктирными линиями изображены цепочки, содержащие только q-состояния. Через a_i, b_i, $i = 1,\dots,n$ обозначены последовательности, состоящие из меток дуг этих цепочек.

Очевидно, что $E(D_1)\cap E(D_2)\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда существует такая пара $(t_1,t_2) \in E(D_1)\cap E(D_2)$, что $t_1=i_1 i_2\dots i_j\dots i_k$, где $i_j=1\dots10$, причем в этой последовательности ровно i_j – единиц, $1\leq j \leq n$, а $t_2= a_{i1}\, a_{i2}\dots\, a_{ij}\dots\, a_{ik} = b_{i1}\, b_{i2}\dots\, b_{ij}\dots\, b_{ik}$, $k\geq1$.

Утверждение 1 доказано.

Для каждого автомата D, D из R_0 определим автомат D*, который принимает множество лент являющегося дополнением множества E(D) относительно множества всех пар лент над выбранным алфавитом. Автомат D* получается из D следующим образом:

• удаляется дуга, ведущая из предвыхода в выход автомата D (на самом деле она направляется в пустой цикл);

• из каждого состояния автомата D выводится дуга, помеченная символом ε (маркер завершения), которая направлена в выход автомата D.

На рис. 3 изображен автомат D*, построенный по автомату D с рис. 1.

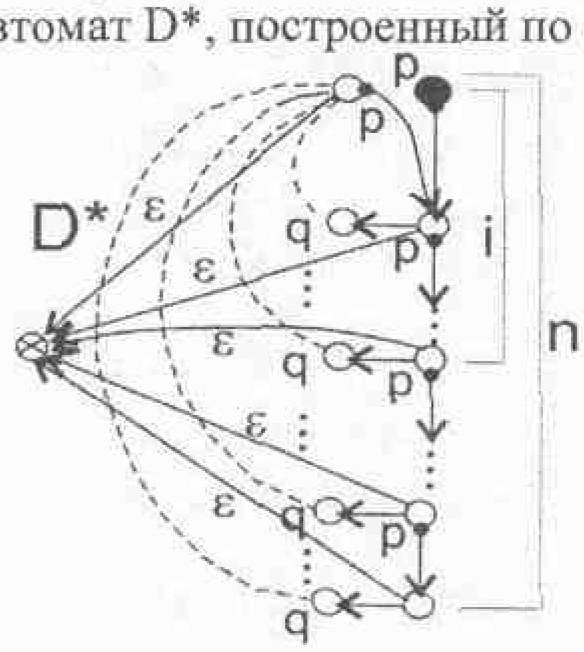

Рис. 3

Обозначим через R_0* множество автоматов, полученных таким образом по всем автоматам множества R_0.

Будем предполагать, что и при работе автомата D, D из R_0, при достижении выхода, на лентах выставляется символ ε.

Лемма 1. Проблема включения для автоматов, принадлежащих множеству $R_0\cup R_0$*, неразрешима.

Доказательство. Проведем от противного, т.е. предположим, что проблема разрешима. Тогда, поскольку для любых двух автоматов D_1, D_2 из $R_0\cup R_0$*, $R(D_1)\subseteq R(D_2)$ тогда и только тогда, когда $D_1\cap D_2^* = \varnothing$, можно утверждать, что проблема пустоты разрешима в множестве $R_0\cup R_0$*, а значит, и в множестве R_0. Последнее противоречит утверждению 1.

Лемма 1 доказана.

Обозначим через $[R_0]$ множество всех бинарных двухленточных автоматов, удовлетворяющих условию: p-проекция автомата из $[R_0]$ изоморфна p-проекции некоторого автомата из R_0.

Рассмотрим множество автоматов $R=[R_0]\cup R_0$*. Легко увидеть, что принадлежность автомата множеству R эффективно проверяемо.

Теорема 1. Проблема эквивалентности в множестве R – разрешима.

Доказательство. Покажем, что алгоритм ρ, используемый в трансформационном методе [3], является алгоритмом разрешения эквивалентности для автоматов из множества R.

Рассмотрим возможные случаи работы алгоритма ρ на паре автоматов D_1, D_2.

1. Автомат D_1 принадлежит $[R_0]$, а D_2 из R_0^*.

При выполнении процедуры τ_2 алгоритм ρ ломается, поскольку автомат D_1 не принимает пустую ленту, а D_2 – принимает. Аналогично рассматривается случай, когда D_2 принадлежит $[R_0]$, а D_1 из R_0^*.

2. Оба автомата D_1 и D_2 принадлежат R_0^*.

В этом случае алгоритм ρ завершит удачно свое выполнение только в том случае, когда автоматы изоморфны. В противном случае он "ломается". Действительно, вначале выполняется процедура τ_1. Она применяется к автомату D_1 и всегда выполнима. Предположим, D_1 – автомат, изображенный на рис. 3. Тогда процедура τ_1 выдает покрытие автомата D_1. Оно может иметь вид, представленный на рис. 4. Тогда множество пар эквивалентных вершин $S=\{(e_1,e_1'), (e_2,e_2^1), \ldots, (e_2,e_2^i),\ldots, (e_2,e_2^n)\}$. Эти пары состояний на рис. 4 выделены кружками и квадратиками. Кроме того, предполагается, что дуги, помеченные символом ε, ведут в выход автомата. Это не указано на рис. 4.

При выполнении процедуры τ_2 в автомате D_2 э.п. выделяется, если это возможно, купол, изоморфный покрытию $\tau_1(D_1)$.

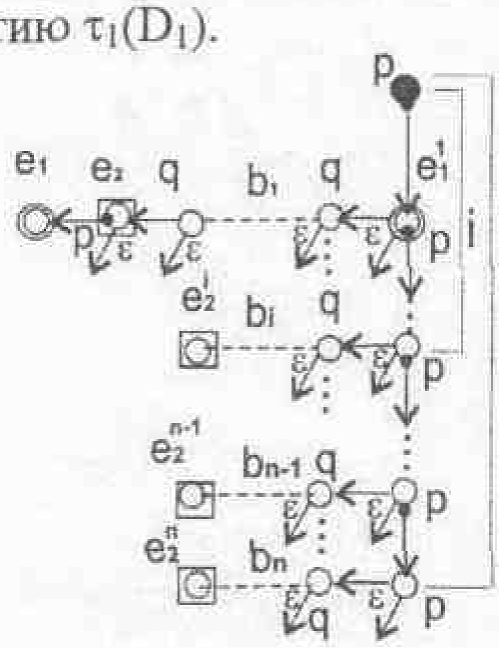

Рис. 4

Если цепочка из p-состояний автомата D_2 отличается от аналогичной цепочки покрытия, изображенного на рис. 3, то процедура τ_2 "ломается", и тогда автоматы D, D_2 неэквиваленты.

В противном случае процедура τ_2 пытается выделить в куполе автомата D_2 цепочки q-состояний $a_1,a_2 \ldots a_n$. Обозначим цепочки q-состояний автомата D_2 через $b_1,b_2 \ldots b_n$. Если для какой-либо цепочки b_i, $i=1 \ldots n$ цепочка a_i не является ее началом, то процедура τ_2 также "ломается". В случае, когда цепочки a_i и b_i, $i=1 \ldots n$ совпадают и цепочка b_i оканчивается p-состоянием, процедура τ_2 завершится удачно. Тем самым алгоритм ρ определит эквивалентность автоматов D и D'.

В случае, когда какая-либо цепочка a_i, $i=2 \ldots n$ является началом цепочки b_i, не совпадая с ней, процедура τ_2 также завершится удачно. Обозначим одну из таких цепочек через a_{i0}.

В автомате D_2 будет выделен купол, изоморфный покрытию $\tau_1(D_1)$, которое изображено на рис. 4.

На куполе автомата $\tau'_2(\tau_1(D_1),D_2)$ будет определено множество пар эквивалентных состояний. Обозначим это множество $S'=\{(d_1,d_1'), (d_2,d_2'),\ldots, (d_i, d_i'),\ldots, (d_n,d_n')\}$. К каждой паре будут вновь применены процедуры τ_1 и τ_2. Легко видеть, что на паре автоматов, задаваемых состояниями d_{i0}, d_{i0}', процедура τ_2 "ломается", а значит, автоматы D_1 и D_2 в этом случае неэквивалентны.

3. Оба автомата D_1 и D_2 принадлежат $[R_0]$.

Подслучай, когда оба автомата принадлежат множеству R_0 аналогичен случаю 2. Поэтому достаточно рассмотреть подслучаи, когда они оба принадлежат множеству

$[R_0] \setminus R_0$ либо когда один из них принадлежит множеству R_0, а второй – $[R_0] \setminus R_0$. Рассмотрим второй, первый рассматривается аналогично, при этом рассмотрим подслучай, когда D_1 принадлежит $[R_0] \setminus R_0$, а D_2 из R_0.

Используя процедуру τ_1, построим покрытие автомата D_1. Используя процедуру τ_2, в автомате D_2 попробуем выделить купол, изоморфный покрытию $\tau_1(D_1)$. Легко видеть, что если p-проекции автоматов D_2 и D_1 различны, то процедура τ_2 "ломается". Предположим, они совпадают. Пути L_1 и L_2, проходящие через автоматы D_1 и D_2 соответственно, назовем согласованными, если совпадают их p-проекции. Понятно, что процедуре τ_2 в автомате D_2 удастся выделить купол, изоморфный покрытию $\tau_1(D_1)$, только в том случае, когда для любого простого пути L_1 через автомат D_1 ему согласованный путь L_2 в автомате D_2 обладает q-проекцией, началом которой является q-проекция пути L_1. В противном случае процедура τ_2 "ломается". Если q-проекции всех согласованных путей совпадают, то наличие купола, изоморфного покрытию $\tau_1(D_1)$, будет свидетельствовать об удачном завершении процедуры τ_2, поскольку пары подавтоматов, определяющие дерево потомков, при этом состоят из изоморфных автоматов. Если же найдется пара согласованных путей с различными q-проекциями, то процедура τ_2 "ломается". Этот факт устанавливается подобно тому, как это делалось в случае 2.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Подловченко Р.И. Метод трансформацинного распознавания эквивалентности в моделях вычислений. / Р.И. Подловченко, В.Е. Хачатрян // Дискретная математика и ее приложения: 8 междунар. семинар. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – С. 38-43.

2. Хачатрян В.Е. Трансформационный метод сравнения моделей на эквивалентность / В.Е. Хачатрян. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2004. – С. 40–52.

3. Подловченко Р.И. Об одном подходе к разрешению проблемы эквивалентности / Р.И. Подловченко, В.Е. Хачатрян // Программирование. – 2004. – № 3. – С. 3–20.

4. Хачатрян В.Е. Решение обобщенной проблемы минимизации для двухленточных автоматов с одной фиксированной лентой / В.Е. Хачатрян // ДАН. – 2006. – Т. 411. – №3. – С. 314–318.

5 Подловченко Р.И. построение полных систем эквивалентных преобразований схем программ / Р.И. Подловченко, М.Т. Айрапетян // Программирование. – 1996. – № 1. – С. 3-29.

6 Rabin M.O., Scott D., Finite automata and their decision problems // IBM Journal of Research and Development, 1959. – V. 3. – № 2. – pp. 114–125 (Русский перевод: Кибернетический сборник. – 1962. – N 4. – С. 58–91).

7 Bird, R. The equivalence problem for deterministic two-tape automata // Journal of Computer and System Science. – 1973. – V. 7. – №4. – pp. 218–236.

5. Harju T., Karhumaki J. The equivalence of multitape finite automata // Theoretical Computer Science. – 1991. – V. 78. – №2. – pp. 347–355.

6. Post E., A variant of recursively unsolvable problem, Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946), pp. 264-68.

USE OF TRANSFORMCIONNOGO OF METHOD FOR CASE WITH INSOLUBLE PROBLEM OF INCLUDING

V.E. Khachatryan[1)], A.A. Nesvitaylo[2)]

[1, 2)]Belgorod state university, 308015, Belgorod, street of Victory, 85
e-mail: Khachatryan@bsu.edu.ru

The great number of multiband automats is in-process described with the insoluble problem of including. Proved, that a transformation method is set by the algorithm of permission an equivalence.

Keywords: great number of multiband automats with the insoluble problem of including, method of transformation recognition of equivalence in the models of calculations.