УДК 621.396.01

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБРАБОТКИ ДЕНДРОРЯДОВ

Е.Г. Жиляков [1], Ф.Н. Лисецкий [2], Н.В. Щербинина [3]

[1] Белгородский государственный университет, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru
[2] Белгородский государственный университет, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: Liset@bsu.edu.ru
[3] Белгородский государственный университет, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: Shcherbinina@bsu.edu.ru

В данной работе рассматриваются методы линейной фильтрации и дифференцирования для выделения внешних воздействий и реакции на них роста дерева на основе частотных представлений. Предложена модель роста дерева для дальнейшей обработки исходных дендрорядов. Приведены основные результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: методы линейной фильтрации и дифференцирования, дендроряд, корреляция, метод скользящего сглаживания средних величин, метод выделения внешних воздействий и реакции на них роста дерева на основе частотных представлений, оценивание производных в классе целых функций, трансформанта Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

Дендрорядом называется хронологически упорядоченная совокупность колец деревьев. Целью обработки дендрорядов является установление корреляции между отдельными внешними факторами и радиальным приростом деревьев с целью прогнозирования прироста деревьев, реконструкции и прогноза динамики климатических и других воздействий, выявления ведущих факторов в формировании ширины годичных колец деревьев.

На рис. 1 представлены ряды радиальных приростов трех дубов Белгородской области, которые были выбраны из региональной базы данных* и рассматриваются в данной работе.

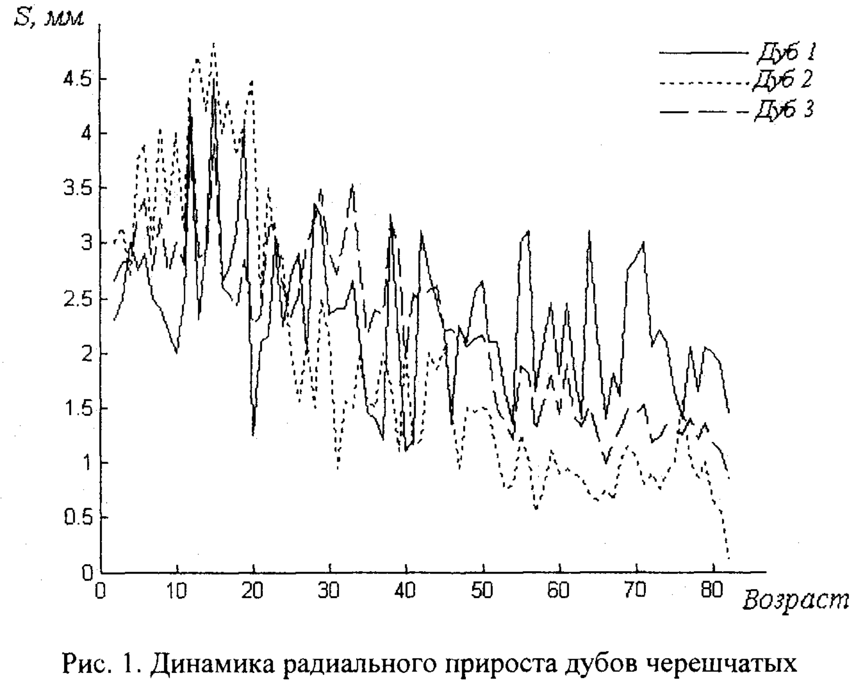

Рис. 1. Динамика радиального прироста дубов черешчатых

* Лисецкий Ф.Н., Митряйкина А.М., Сливченко Е.Н. Временные ряды величин радиального прироста деревьев типичной лесостепи. Свидетельство об официальной регистрации базы данных №2007620209. Зарег. в Реестре баз данных 13.06.2007 г.

Их обработка осуществляется с целью получения некоторых сведений о внешних условиях среды (солнечная активность, климатические условия, гидрологические и почвенно-растительные условия местообитания и другие) в период жизни дерева. Принято также рассматривать функцию роста (внутренняя программа дерева), то есть некоторую реакцию дерева на внешние воздействия, которая реализуется вопреки внешним воздействиям.

В настоящее время для исключения влияния на изменчивость ширины годичных колец фактора возраста, выявления действия климатических факторов и для приведения дендрохронологических данных к сопоставимому виду проводят стандартизацию данных, то есть результаты замеров ширины годичных колец выражают в виде относительных индексов [1]. Стандартизация данных проводится в два этапа. Первый этап – расчет «нормы прироста» (кривой, отражающей изменение темпов роста дерева с возрастом). Для нахождения нормы прироста применяют различные методы [2]. Наиболее распространен метод скользящего сглаживания средних величин. Скользящее сглаживание с 11-летним периодом осреднения проводят по формуле

$$w_{S(J+5)} = \sum_{J}^{J+10} w_j \ / \ 11,$$

где w_j – ширина годичных колец; J – календарный год, $J = 1,\dots,N-10$; $w_{S(J+5)}$ – сглаженное значение годичного кольца (норма прироста).

Второй этап стандартизации данных измерений ширины годичных колец – расчет относительных индексов годичного прироста. Универсальная формула для расчета относительных индексов прироста следующая:

$$I = w_j / w_S \cdot 100\%,$$

где I – относительный индекс, (%); w_S – сглаженная ширина годичного кольца (или норма прироста данного года).

Относительные индексы радиального текущего прироста в настоящее время являются одним из наиболее удобных способов отражения изменчивости ширины годичных колец в зависимости от климатических факторов. Этот подход феноменологический. При этом часто используются явные функциональные зависимости, что равносильно «навязыванию» конкретных законов природе.

Целью данной работы является разработка нового метода выделения внешних воздействий и реакции на них роста дерева на основе частотных представлений.

1. МОДЕЛЬ РОСТА ДЕРЕВА И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДЕНДРОРЯДОВ

Пусть T – длительность анализируемого периода жизни дерева,

$$0 \le t \le T, \tag{1}$$

$U(t)$ – радиальный размер дерева в момент времени t, $V(t)$ – внешние воздействия в момент времени t, $R(t)$ – функция, описывающая реакцию дерева на внешние воздействия.

Тогда в качестве модели роста можно использовать выражение

$$U(t) = \int_0^t R(\tau)V(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Продифференцировав выражение (2), получим

$$U'(t) = R(t)V(t). \tag{3}$$

Значение функции U известно только в дискретные моменты времени, соответствующие измерениям

$$U(k) = \sum_{i=1}^{k} S_i,\ k = 1,2,\dots,N,$$

где S_i – ширина годичных колец дерева в i-м году, $N = T/\theta$, θ – длительность одного года.

Значения $U_i(k)$ для соответствующих дубов рис. 1 отображены на рис. 2.

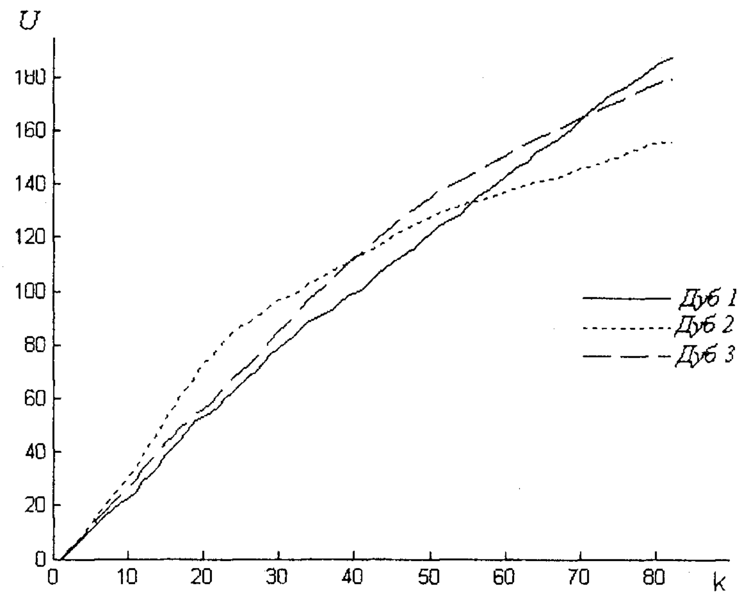

Рис. 2. Зависимость радиального размера древесных колец от возраста

Поэтому необходимо осуществлять численное дифференцирование (оценивание производной).

В данной статье предлагается новый подход к оцениванию производных в классе целых функций. Из соображений адекватности представляется целесообразным областью определения функции считать всю числовую ось, т.е.

$$-\infty \le t \le \infty, \tag{4}$$

так как нет оснований полагать, что для эмпирических функций она ограничивается интервалом (1).

При этом на основе физических соображений можно утверждать, что эмпирические функции являются непрерывными со всеми своими производными. Таким образом, для достижения адекватности необходимо, чтобы в любой точке области определения существовали и были непрерывными производные

$$\hat{u}^{(k)}(t) = \frac{d^k \hat{u}(t)}{dt^k},$$

причем выполнялись неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{u}^{(k)}(t)\right|^2 dt < \infty, k = 0,1.... \tag{5}$$

В основе дальнейших построений используется представление

$$\hat{u}(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau, \tag{6}$$

которое позволяет по производной

$$f(\tau) = d\hat{u}(\tau)/d\tau \tag{7}$$

вычислить интерполирующую функцию.

Очевидно, что при этом должны выполняться равенства вида

$$\hat{u}_i = \hat{u}(i\Delta t) = u_i, i = 0,1,...,N, \Delta t = 1 год. \tag{8}$$

Такой подход дает возможность учитывать и другие ограничения, которым должна удовлетворять производная.

Для определения производной предлагается использовать класс непрерывных вещественных дифференцируемых функций с областью определения (4) и ограниченной евклидовой нормой (см. (5)), представимых в виде

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega}F(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega, \tag{9}$$

где $F(\omega)$ – трансформанта Фурье

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau; \tag{10}$$

$$\Omega=[-\Omega_2,-\Omega_1)\cup[\Omega_1,\Omega_2);$$

$$\Omega_1<\infty;\quad \Omega_2<\infty.$$

Выбор области определения трансформанты Фурье Ω может быть продиктован априорными сведениями о свойствах сигнала.

Подстановка представления (9) в правую часть (6) позволяет получить соотношение для вычисления интерполирующей функции на основе трансформанты Фурье производной

$$\hat{u}(t)=u_0+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega}F(\omega)\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega/2}e^{\frac{j\omega t}{2}}d\omega, \tag{11}$$

так что равенствам (8) можно придать вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega}F(\omega)\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta ti}{2}\right)}{\omega\Delta t/2}e^{\frac{j\omega\Delta t}{2}i}d\omega=v_i/\Delta t, \tag{12}$$

где

$$v_i=(u_i-u_0), i=1,...,N. \tag{13}$$

Ясно, что такие интерполирующие функции тоже относятся к классу целых. Вместе с тем имеется возможность использовать дополнительные ограничения.

Можно привести достаточно много аргументов использования вариационного принципа

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega}|F(\omega)|^2d\omega=\min, \tag{14}$$

где использовано равенство Парсеваля [3].

Один из аргументов в пользу использования этого принципа заключается в целесообразности построения функции с наименьшей в смысле евклидовой нормы производной скорости изменения значений.

Другим важным соображением может служить необходимость повышения устойчивости вычислений к воздействиям случайных ошибок измерений (регуляризация).

Таким образом, задача сводится к поиску решения вариационной изопериметрической задачи, определяемой условием (14) и ограничениями вида (12).

Нетрудно показать [4], что искомое решение представимо в виде

$$F(\omega)\equiv\sum_{i=1}^{N}\beta_i\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta ti}{2}\right)}{\omega\Delta t/2}e^{-\frac{j\omega\Delta t}{2}i}d\omega, \tag{15}$$

когда $\omega\in\Omega$ и нулю в противном случае.

Для вычисления вектора множителей Лагранжа $\vec{\beta}=(\beta_1,...,\beta_N)^T$ следует воспользоваться подстановкой представления (15) в левые части равенств (12). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A\vec{\beta}=\vec{v}=(v_1,...,v_N)^T, \qquad (16)$$

где

$$A=\{a_{ki}\};$$

$$a_{ik}=\frac{1}{\pi}\int_{\overline{\Omega}_1}^{\overline{\Omega}_2}\frac{\sin\left(\frac{xk}{2}\right)\sin\left(\frac{xi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cos\left[\frac{x}{2}(k-i)\right]dx; \qquad (17)$$

$$\overline{\Omega}_r=\Delta t\Omega_r, r=1,2.$$

В строгом смысле симметричная матрица с элементами вида (17) является положительно определенной. Однако, если интервал интегрирования мал, например при выполнении условия

$$N(\overline{\Omega}_2-\overline{\Omega}_1)<\pi, \qquad (18)$$

то подынтегральная функция сохраняет знак, и, в силу теоремы о среднем, получаем неравенство

$$a_{ik}=\frac{\overline{\Omega}_2-\overline{\Omega}_1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{x_c k}{2}\right)\sin\left(\frac{x_c i}{2}\right)}{\left(x_c/2\right)^2}\cos\left[\frac{x_c(k-i)}{2}\right]<\frac{1}{N}.$$

Здесь x_c – некоторая средняя точка интервала интегрирования, которая в рассматриваемом смысле будет слабо зависеть от сочетания индексов k,i. Поэтому значения элементов матрицы будут близки и ее определитель будет близок к нулю. Следовательно, решение СЛАУ вида (16) может быть неустойчивым.

Вместе с тем можно показать, что при выполнении неравенства

$$N(\overline{\Omega}_2-\overline{\Omega}_1)\geq\pi$$

матрица с элементами вида (17) будет неособенной.

После решения СЛАУ (16) для вычислений оценки производной и интерполирующей функции можно воспользоваться соотношениями (9) и (11), куда следует подставить представление (15). В результате нетрудно получить вычислительные формулы

$$f(\tau)=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\beta_i\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}i\right)}{\omega\Delta t/2}\cos\left[\omega\left(\tau-i\Delta t/2\right)\right]d\omega; \qquad (19)$$

Результат применения предложенного метода оценивания производных исходных дендрорядов, приведенных на рис. 1, представлен на рис. 3.

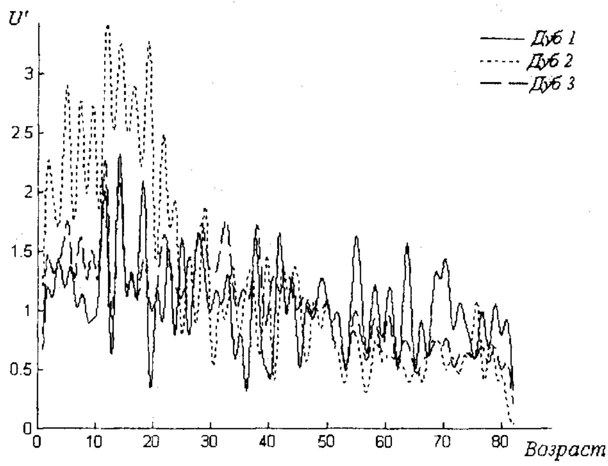

Рис. 3. Результат дифференцирования дендрорядов

Если прологарифмировать выражение (3), то получим следующее соотношение

$$\log(U'(t)) = \log(R(t)) + \log(V(t)), \tag{20}$$

:е $V(t)$ – внешние воздействия в момент времени t, $R(t)$ – функция, описывающая ›акцию дерева на внешние воздействия.

Результат логарифмирования подвергли спектральному анализу в соответствии определением трансформанты Фурье.

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N} x(i)e^{-j(i-1)\omega}, \tag{21}$$

;е в качестве компонента вектора $\bar{x} = (x_1, ..., x_N)^T$ взяты значения логарифма диффе- :нцированной функции U, которые соответствуют значениям аргумента $i\Delta t$

$$x_i = x(i\Delta t),\ i = 1, ..., N,$$

;е Δt – интервал дискретизации по времени; $X(\omega)$ – трансформанта Фурье отрезка ›четов функции, в качестве области определения которой рассматривается

$$-\pi \le \omega \le \pi.$$

Результаты вычислений спектральной плотности приведены на рис. 4.

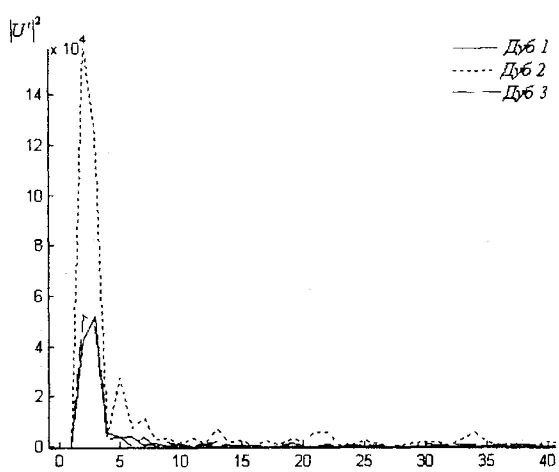

Рис. 4. Спектральный анализ

Анализ графиков достаточно отчетливо показывает, что имеются некоторые :стотные области с повышенной концентрацией энергии. Предполагаем, что в низко- стотной области сосредоточена энергия логарифма функции R. Для ее выделения ›жно воспользоваться частотной фильтрацией.

2. РАЗДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ

Для разделения компонент используется метод линейной фильтрации. В качестве исходных значений рассмотрим вектор эмпирических данных вида

$$\vec{x} = (x_1,..,x_N)',$$

где штрих означает транспонирование, получен в результате регистрации эмпирических данных в дискретных точках интервала наблюдений, причём дискретизация предполагается эквидистантной. То есть речь идёт о представлении исходного вектора в виде суммы векторов

$$\vec{x} = (x_1,..,x_N)' = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,$$

где первый из векторов в правой части удовлетворяет вариационному принципу

$$S^2(\vec{x},\vec{x}_1) = \int_{\omega\in\Omega} |X(\omega) - X_1(\omega)|^2\, d\omega + \int_{\omega\notin\Omega} |X_1(\omega)|^2\, d\omega = \min,$$

где $X(\omega)$ – трансформанта Фурье исходного вектора, $X_1(\omega)$ – трансформанта Фурье искомого вектора, имеющая вид

$$X_1(\omega) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{(-j(k-1)\omega)}.$$

Нетрудно показать справедливость представления

$$S^2(\vec{x},\vec{x}_1) = \vec{x}'A\,\vec{x} - 2\vec{x}'A\,\vec{x} + \|\vec{x}_1\|^2,$$

используя которое, легко получить решение вариационной задачи

$$\vec{x}_1' = A\,\vec{x},$$

где

$$A = \{a_{ik}\}$$

$$a_{ik} = (\sin(\Omega_2(i-r)) - \sin(\Omega_1(i-k)))/(\pi(i-k));\, i,k = 1,..,N. \qquad (22)$$

Используя метод линейной фильтрации, в исходных дендрорядах мы выделили функции, описывающие реакцию дерева на внешние воздействия, предполагая, что ее энергия сосредоточена в низкочастотной области. Для этого в соотношении (23) были выбраны следующие параметры: для первого дуба $\overline{\Omega}_1 = 0, \overline{\Omega}_2 = {}^{2.5\pi}/_{1000}$; для второго и третьего дуба $\overline{\Omega}_1 = 0, \overline{\Omega}_2 = {}^{4\pi}/_{1000}$. Выделенные функции представлены на рис. 5.

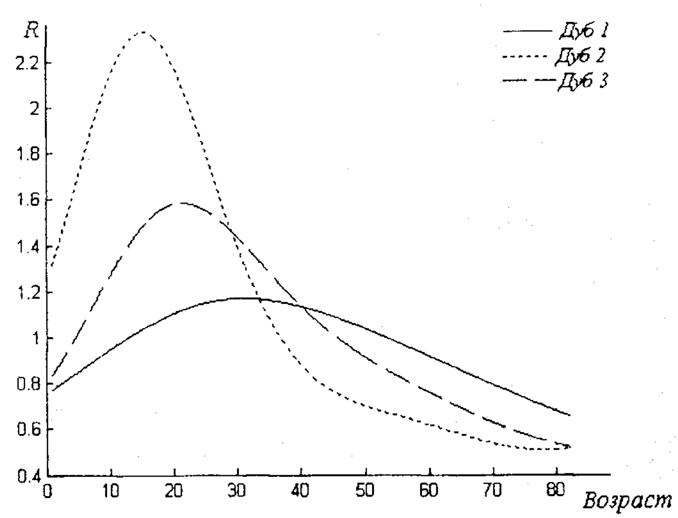

Рис. 5. Функция, описывающая реакцию дерева на внешние воздействия

Далее выделим внешние воздействия, которые необходимы для реконструкции и прогноза динамики внешних воздействий, влияющих на формирование ширины годичных колец деревьев. Для получения внешних воздействий из логарифма функции U вычтем функцию $\ln(R(t))$, описывающую реакцию дерева на внешние воздействия.

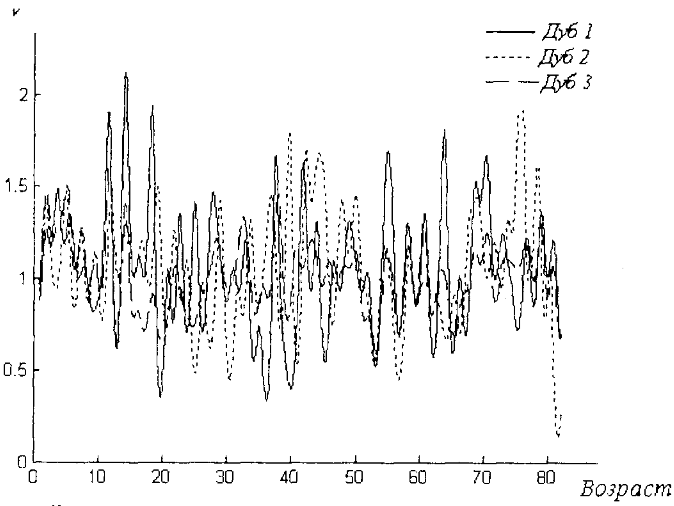

Рис. 6. Внешние воздействия, влияющие на рост дерева

ВЫВОДЫ

В данной работе с помощью предложенных методов линейной фильтрации и дифференцирования выделили внешние воздействия и реакцию на них роста дерева на основе частотных представлений. Легко видеть, что графики внешних воздействий соответствуют представлениям о стационарности. Это свидетельствует в пользу применения изложенной методики.

Литература

1. Матвеев, С.М. Методика дендрологического анализа / С.М, Матвеев. – Воронеж: Изд-во ВГЛТА, 1999. – 31 с.
2. Матвеев, С.М. Дендроиндикация динамики состояния сосновых насаждений Центральной лесостепи: монография / С.М. Матвеев. – Воронеж. гос. лесотехн. акад. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2003. – 272с.
3. Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с. : ил.
4. Смирнов, В. И. Курс высшей математики : учеб. пособие для мех.-мат. и физ.-мат. фак. ун-тов : в 5 т. / В. И. Смирнов. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1974. – Т. 4, ч. 1. – 336 с.
5. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа : справ. рук. / К. Ланцош ; пер. с англ. М. З. Кайнера. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

ABOUT ONE METHOD OF PROCESSING OF TREES ROWS

E.G. Zhilyakov[1], F.N. Lisetsky[2], N.V.Shcherbinina[3]

[1] Belgorod State University, Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru
[2] Belgorod State University, Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, e-mail: Liset@bsu.edu.ru
[3] Belgorod State University, Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, e-mail: Shcherbinina@bsu.edu.ru

In the given article methods of a linear filtration and differentiation for allocation of external influences and reactions to them of growth of a tree on the basis of frequency representations are considered. The model of growth of a tree for the further processing initial lines of the trees is offered. The basic results of computing experiments are presented.

Keywords: methods of linear filtration and differentiation, row of woods, correlation, method of the sliding smoothing out of averages, method of selection of external influences and reaction on them of growth of tree on the basis of frequency presentations, evaluation of derivates in the class of whole functions, transform of Fur'e.