НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАВНОГО ТОРОИДАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ

И.П. Борисовский*

Белгородский государственный университет

308015, Белгород, ул. Победы, 85

Исследуются свойства пространств главных тороидальных расслоений, характеристический класс которых порожден обобщенной формой Риччи.

Пусть M – связное гладкое многообразие размерности $\dim M = 2n$; $\chi(M)$ – модуль гладких векторных полей на M; d – оператор внешнего дифференцирования; $\tilde{q}$ – риманова метрика на M; $\tilde{\nabla}$ – риманова связность метрики $\tilde{q}$.

Определение 1. [4] *Почти комплексной структурой* на M называется поле тензора J типа (1,1) такого, что $J^2 = -id$.

Определение 2. *Почти эрмитовой (короче, АН-) структурой* на M называется пара $\{J, \tilde{q} = \langle .,. \rangle\}$ тензоров на M, где J – почти комплексная структура, причем $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle; X, Y \in \chi(M)$.

Многообразие, на котором задана AH-структура, называется *почти эрмитовым многообразием* На каждом таком многообразии естественно определена 2-форма $\tilde{\Theta}(X,Y) = \langle X, JY \rangle; X, Y \in \chi(M)$, называемая *фундаментальной формой структуры.*

Определение 3. [3] Почти эрмитова структура $S = \{J, \tilde{q} = \langle .,. \rangle\}$ на многообразии M называется *эрмитовой*, если ее почти комплексная структура интегрируема; *келеровой* – если ее фундаментальная форма параллельна в римановой связности.

Задание почти эрмитовой структуры на М эквивалентно заданию G-структуры в главном расслоении всех комплексных реперов многообразия М со структурной группой $U(n)$ [3]. Эта $U(n)$-структура называется присоединенной G-структурой.

Здесь будем считать, что индексы $i, j, k, l, \ldots$ пробегают значения от 0 до 2n, индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-от 1 до 2n, индексы $a, b, c, d, \ldots = \overline{1, n}$, кроме того положим $\hat{a} = a + n$. Как обычно, символами [],() будем обозначать альтернацию и симметризацию объекта соответственно. Первая группа структурных уравнений АН-структуры имеет вид [3]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \qquad (1)$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c;$$

где ω^a, ω^b_a – компоненты форм смещения и римановой связности соответственно;

$$B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B_{abc} = \frac{-\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]};$$

* E-mail. @bsu edu.ru

$$B^{ab}{}_{c}=\frac{-\sqrt{-1}}{2}J^{a}_{\hat{b},c};\quad B_{ab}{}^{c}=\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}},\tag{2}$$

где $J^{\alpha}_{\beta,\gamma}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензора J относительно римановой связности. Известно, что набор функций $\{B^{abc}\},\{B_{abc}\},\{B^{ab}{}_{c}\},\{B_{ab}{}^{c}\}$ определяет на многообразии M тензоры, которые называются структурными тензорами первого и второго рода и виртуальными тензорами первого и второго рода соответственно. Причем справедливы соотношения:

1) $\overline{B}^{abc}=B_{abc}$; 2) $\overline{B}^{ab}_{c}=B_{ab}{}^{c}$; 3) $B^{(ab)}{}_{c}=B^{(ab)c}=0$,

где $t\to\overline{t}$ – оператор комплексного сопряжения.

Теорема 1. [3] В принятых выше обозначениях AH-структура S на многообразии M является:

эрмитовой тогда и только тогда, когда $B^{abc}=0$;

келеровой тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_{c}=0$ и $B^{abc}=0$.

Пусть M – эрмитово многообразие. Тогда согласно (1) и теореме 1 первая группа его структурных уравнений будет выглядеть так:

$$d\omega^{a}=\omega^{a}_{b}\wedge\omega^{b}+B^{ab}{}_{c}\omega^{c}\wedge\omega_{b};\tag{3}$$

$$d\omega_{a}=-\omega^{b}_{a}\wedge\omega_{b}+B_{ab}{}^{c}\omega_{c}\wedge\omega^{b}.$$

При этом

$$\omega^{a}_{\hat{b}}=B^{ab}{}_{c}\omega^{c};\quad \omega^{\hat{a}}_{b}=B_{ab}{}^{c}\omega_{c}.\tag{4}$$

Стандартная процедура дифференциального продолжения соотношений (3) приводит ко второй группе структурных уравнений эрмитовой структуры

$$d\omega^{a}_{b}=\omega^{a}_{c}\wedge\omega^{c}_{b}+\tilde{A}^{ad}_{bc}\omega^{c}\wedge\omega_{d}+\left(B_{b[c}{}^{a}{}_{d]}+B_{b[c}{}^{h}B_{d]h}{}^{a}\right)\omega^{c}\wedge\omega^{d}-\left(B^{a[c}{}_{b}{}^{d]}+B^{a[c}{}_{h}B^{d]h}{}_{b}\right)\omega_{c}\wedge\omega_{d},\tag{5}$$

причем

$$dB^{ab}{}_{c}-B^{hb}{}_{c}\omega^{a}_{h}-B^{ah}{}_{c}\omega^{b}_{h}+B^{ab}{}_{h}\omega^{h}_{c}=B^{ab}{}_{ch}\omega^{h}+B^{ab}{}_{c}{}^{h}\omega_{h};$$

$$dB_{ab}{}^{c}+B_{hb}{}^{c}\omega^{h}_{a}+B_{ah}{}^{c}\omega^{h}_{b}-B_{ab}{}^{h}\omega^{c}_{h}=B_{ab}{}^{ch}\omega_{h}+B_{ab}{}^{c}{}_{h}\omega^{h};$$

$$\tilde{A}^{ad}_{[bc]}=B^{ah}{}_{[b}B_{c]h}{}^{d}+B^{ad}{}_{[bc]};$$

$$\overline{B}^{ab}{}_{ch}=B_{ab}{}^{ch},\ \overline{B}^{ab}{}_{c}{}^{h}=B_{ab}{}^{c}{}_{h},\ \overline{\tilde{A}}{}^{ad}_{bc}=\tilde{A}^{bc}_{ad}.$$

Сравнивая (5) со второй группой структурных уравнений Картана:

$$d\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\gamma}\wedge\omega^{\gamma}_{\beta}+\frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\lambda}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\lambda}$$

и учитывая (4), в силу линейной независимости базисных форм, получим

$$\tilde{R}^{a}{}_{bcd}=2\left(B_{b[c}{}^{a}{}_{d]}+B_{b[c}{}^{h}B_{d]h}{}^{a}\right);\tag{6}$$

$$\tilde{R}^{a}{}_{bc\hat{d}}=\tilde{A}^{ad}_{bc}-B^{ah}{}_{c}B_{hb}{}^{d}.$$

Дифференциальное продолжение соотношений (4) дает

$$\tilde{R}^{a}{}_{bcd}=0;\tag{7}$$

$$\tilde{R}^{a}{}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=-B_{cb}{}^{[cd]}.$$

Другие компоненты тензора кривизны получаются комплексным сопряжением уже полученных компонент с использованием свойств симметрии тензора кривизны и его вещественности.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что эрмитова структура является келеровой тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$. В частности, тензор кривизны келерова многообразия согласно (6), (7) может иметь лишь следующие ненулевые компоненты

$$\tilde{R}^a{}_{bc\hat{d}} = \tilde{A}^{ad}_{bc}, \qquad (8)$$

где функции $\left\{\tilde{A}^{ad}_{bc}\right\}$ симметричны по верхней и нижней парам индексов.

Определение 5. *Почти контактной метрической (короче, $AC-$) структурой* на гладком многообразии P называется совокупность $\{\Phi, q = \langle .,. \rangle, \xi, \eta\}$ тензорных полей на этом многообразии, где Φ – тензор типа (1,1), называемый *структурным эндоморфизмом*, q – риманова метрика, ξ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно, *структурным вектором и контактной формой.* При этом выполняются условия:

$$1)\quad \Phi(\xi)=0; \qquad 2)\quad \eta\circ\Phi=0; \qquad 3)\quad \eta(\xi)=1; \qquad 4)\quad \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$
$$5)\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y). \qquad (9)$$

Хорошо известно, что необходимыми условиями существования на многообразии AC-структуры являются его нечетномерность и ориентируемость. Многообразие P, на котором фиксирована AC-структура, называется *AC-многообразием*. Как и на AH-многообразиях, на AC-многообразии P определяется фундаментальная форма структуры $\Theta(X,Y) = \langle X, \Phi Y\rangle$; $X, Y \in \chi(P)$. В работе [3] рассмотрены основные классы AC-структур, а также свойства их характеризующие.

Определение 5. AC-структура $\{\Phi, q, \xi, \eta\}$ на многообразии P называется: – *нормальной*, если $2N_\Phi + d\eta\otimes\xi = 0$, где N_Φ – тензор Нейенхейса оператора Φ: $4N_\Phi(X,Y) = \Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]$;

– *контактной метрикой*, если $d\eta = \Theta$;

– *сасакиевой*, если она нормальна и контактна. Как известно, это равносильно тому, что $\nabla_X(\Phi)Y = \eta(Y)X - \langle X, Y\rangle\xi,\ X, Y \in \chi(P)$, где ∇ – риманова связность метрики q;

– *точнейше косимплектической*, если фундаментальная форма является формой Киллинга, а структурная форма замкнута;

– *почти косимплектической*, если фундаментальная и структурная формы замкнуты;

– *слабо косимплектической*, если фундаментальная и структурная формы являются формами Киллинга;

– *косимплектической*, если ее фундаментальная и структурная формы параллельны в римановой связности.

Пусть $\{\Phi, q, \xi, \eta\}$ – AC-структура на многообразии P^{2n+1}. В модуле $\chi(P)$-внутренним образом определены два проектора $m = \eta\otimes\xi$ и $l = id - m = -\Phi^2$ и, таким образом, $\chi(P) = L\oplus M$, где $M = \operatorname{Im} m$ – линейная оболочка структурного вектора, $L = \operatorname{Im} l = \ker\eta$ – так называемое контактное распределение. Очевидно, распределения M и L инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что $\Phi|_L^2 = -id, \langle \Phi|_L X, \Phi|_L Y\rangle = \langle X, Y\rangle, X, Y \in L$. Это означает, что на распределении L пара $\{\Phi|_L, q|_L\}$ определяет почти эрмитову структуру. Следовательно, L можно рассматривать как эрмитово векторное расслоение над P с метрикой

$$H(X,Y) = \langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X, \Phi Y\rangle, X, Y \in \chi(P).$$

Рассмотрим теперь комплексификацию расслоения L – расслоение $L^{\mathbb{C}} = L\otimes\mathbb{C}$ над P. В расслоении $L^{\mathbb{C}}$ естественно определены взаимно-дополнительные проекторы $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(id - \sqrt{-1}\,\Phi|_L)$, $\bar\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(id + \sqrt{-1}\,\Phi|_L)$, (здесь под оператором $\Phi|_L$, вообще говоря, понимается его комплексификация $\Phi^{\mathbb{C}} = (\Phi|_L)\otimes id_{\mathbb{C}}$,), а также оператор τ естественного сопряжения, причем, очевидно, что на L справедливо соотношение $\bar\sigma = \tau\circ\sigma$.

Задание проекторов σ и $\bar\sigma$ равносильно распадению модуля $L^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подмодулей D и $\bar D$ – образов этих проекторов. Легко видеть, что D и $\bar D$ являются собственными подмодулями оператора Φ (точнее, Φ^c) с собственными значениями $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, соответственно. В самом деле, $\Phi\circ\sigma = \sigma\circ\Phi = \sqrt{-1}\sigma$, то есть $\Phi(\sigma X) = \sqrt{-1}(\sigma X), X\in L$, и значит, $D = \operatorname{Im}\sigma$ – собственный подмодуль оператора Φ с собственным значением $\sqrt{-1}$. (Здесь и в дальнейшем символы, обозначающие комплексификацию, будем опускать.) Аналогично, $\Phi\circ\bar\sigma = \bar\sigma\circ\Phi = -\sqrt{-1}\sigma, X\in L$, то есть $\Phi(\bar\sigma X) = -\sqrt{-1}(\bar\sigma X), X\in L$, то есть $\bar D = \operatorname{Im}\bar\sigma$ – собственный подмодуль оператора Φ с собственным значением $-\sqrt{-1}$.

Зафиксируем точку $p\in P$ и выберем в L_p репер $\{p, e_1, \ldots, e_n\}$, унитарный относительно метрики H. С помощью этого репера построим еще два репера.

1) Ортонормированный репер $\{p, e_0, e_1, \ldots, e_n, \Phi e_1, \ldots, \Phi e_n\}$, где $e_0 = \xi_p$ касательного пространства $T_p(P)$. Такой репер называется вещественноадаптированным.

2) Репер комплексификации касательного пространства $T_p(P)$ $\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat 1}, \ldots, \varepsilon_{\hat n}\}$, где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat a} = \sqrt{2}\bar\sigma(e_a)$. Такой репер называется репером, адаптированным структуре, или A-репером.

Легко видеть, что матрицы компонент тензоров $\Phi_p\, q_p$ в A-репере имеют вид:

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где, I_n – единичная матрица порядка n.

Хорошо известно, что совокупность таких реперов определяет на P G-структуру со структурой группой $\{1\}\otimes U(n)$, представленной матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \bar A \end{pmatrix},$$

где $A\in U(n)$. Такую G-структуру будем также называть присоединенной. На пространстве присоединенной G-структуры первая группа структурных уравнений AC-многообразия имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} &1)\ d\omega^a = \omega^a_b\wedge\omega^b + C^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b + C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + C^{ab}\omega_b\wedge\omega + C^a_b\omega^b\wedge\omega;\\ &2)\ d\omega_a = -\omega^b_a\wedge\omega_b + C_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b + C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c + C_{ab}\omega^b\wedge\omega + C^b_a\omega_b\wedge\omega;\\ &3)\ d\omega = D_{ab}\omega^a\wedge\omega^b + D^{ab}\omega_a\wedge\omega_b + D^b_a\omega^a\wedge\omega_b + D_a\omega^a\wedge\omega + D^a\omega_a\wedge\omega, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\omega = \omega^0, \omega_i = q_{ij}\omega^j, \Phi^i_{j,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензора Φ,

$C^{ab}{}_{c} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},c}$;

$C^{ab} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},0} - \sqrt{-1}\Phi^{a}_{0,\hat{b}}$;

$C_{ab}{}^{c} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}$;

$C_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} + \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b}$;

$D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{[a,b]}$;

$D^{b}_{a} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{a,\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi^{0}_{\hat{b},a}$;

$D^{a} = \sqrt{-1}\Phi^{0}_{\hat{a},0}$.

$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{[\hat{b},\hat{c}]}$;

$C^{a}_{b} = -\sqrt{-1}\Phi^{a}_{0,b}$;

$C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}$;

$C^{b}_{a} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}$;

$D^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^{0}_{[\hat{a},\hat{b}]}$;

$D_{a} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{a,0}$.

Заметим, что $\overline{C}^{ab}{}_{c} = C_{ab}{}^{c}; \overline{C}_{abc} = C^{abc}; \overline{C}^{ab} = C_{ab}; \overline{C}^{b}_{a} = C^{a}_{b}; \overline{D}^{ab} = D_{ab}; \overline{D}_{a} = D^{a}$.

Теорема 2. AC – структура на многообразии P является:

– нормальной тогда и только тогда, когда $C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = D_{a} = 0$;

– квазисасакиевой тогда и только тогда, когда $C_{abc} = C_{ab}{}^{c} = C_{ab} = D_{ab} = D_{a} = 0$;

– сасакиевой тогда и только тогда, когда $C_{abc} = C_{ab}{}^{c} = C_{ab} = D_{ab} = D_{a} = 0$; $C^{b}_{a} = \sqrt{-1}\delta^{b}_{a}$.

Пусть G – одномерная компактная абелева группа Ли, g – ее алгебра Ли. Как известно, в этом случае G изоморфна одномерному тору T^{1}, а g – вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Определение 7. Главное расслоение (P, M, π, G) называется *главным T^{1}-расслоением над многообразием M.*

Пусть на пространстве расслоения P фиксирована некоторая связность, представленная формой связности ω. Обозначим V и H – вертикальное и горизонтальное распределения этой связности соответсвенно. Если (P, M, π, G) – главное T^{1}-расслоение над AH-многообразием M с почти эрмитовой структурой $S = \{J, \tilde{g}\}$, то фиксация связности ω на пространстве расслоения P внутренним образом порождает на нем AC-структуру $\{\Phi, g = \langle , \rangle, \xi, \eta\}$. Именно в качестве η возьмем исходную 1-форму ω – форму связности, метрику и структурный эндоморфизм для G-инвариантных векторных полей с последующим распространением по линейности на произвольные векторные поля определим так:

$g = \pi * \tilde{g} + \eta \otimes \eta$,

$\Phi = i_{H} \circ J \circ \pi_{*}$,

где i_{H} – горизонтальный лифт, ξ – единичный вектор вертикального распределения V. Так как S^{1} – абелева группа, то $d\omega = \Omega$ – форма кривизны связности ω на пространстве расслоения одномерных торов.

Теорема 3. [8] Существует канонический эпиморфизм множества классов эквивалентности главных T^{1} – расслоений над многообразием M на группу $H^{2}(M, \mathbb{Z})$ двумерных целочисленных когомологий этого многообразия, причем нулевому элементу этой группы соответствует класс тривиального расслоения (в случае когда M односвязно соответствие взаимнооднозначно). Более того, при заданной целочисленной 2-форме Θ на многообразии M существует главное T^{1} – расслоение над M со связностью η такое, что $\pi^{*}\Theta = d\eta$.

Связность η при этом называется канонической. Вычислив компоненты ковариантного тензора Φ и подставив в (11) получим первую группу структурных уравнений AC-структуры, индуцированной на пространстве главного T^1-расслоения над AH-многобразием с фиксированной связностью, записанные на пространстве присоединенной G-структуры:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \Omega_{\hat{a}b}\omega^b \wedge \omega;$$
$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \Omega_{a\hat{b}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega; \qquad (12)$$
$$d\omega = \Omega_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + 2\Omega_{a\hat{b}}\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} + \Omega_{\hat{a}\hat{b}}\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}},$$

где $\Omega_{\alpha\beta}$ – компоненты формы кривизны; $B^{abc}, B_{abc}, B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c$ – компоненты структурных и виртуальных тензоров AH – структуры на базе (точнее, их антиувлечения).

Пусть Ω^* – замкнутая целочисленная 2-форма на многобразии M, P – пространство главного T^1-расслоения над M с характеристическим классом $[\Omega^*]$ и канонической связностью ω. Назовем связность ω *нормальной* связностью, если форма Ω^* инвариантна относительно почти комплексной структуры J, то есть

$$\Omega^*(J\tilde{X}, J\tilde{Y}) = \Omega^*(\tilde{X},\tilde{Y}), \tilde{X},\tilde{Y} \in \chi(M). \qquad (13)$$

Легко видеть, что связность ω нормальна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры компоненты ее формы кривизны удовлетворяют соотношению $\Omega_{ab} = 0$. С учетом этого и теорем 1,2, а также структурных уравнений (12) получаем следующий результат.

Теорема 4. Индуцированная на пространстве главного T^1-расслоения P над AH-многобразием M с почти эрмитовой структурой S и связностью ω почти контактная метрическая структура является:

– нормальной тогда и только тогда, когда S-эрмитова структура и ω – нормальная связность;

– квазисасакиевой тогда и только тогда, когда S-келерова и каноническая связность ω – нормальна.

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля индуцированной на пространстве главного T^1-расслоения AC-структуры в A-репере имеют вид [1]

1) $R_{\alpha 00\beta} = -\Omega^\gamma_\alpha \Omega_{\gamma\beta}$;

2) $R_{\alpha\beta\gamma 0} = \Omega_{\alpha\beta,\gamma}$;

3) $R_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda} - \Omega_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\lambda} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\lambda} + 2\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\lambda}$.

Известно, что с каждым почти эрмитовым многообразием внутренним образом связано некоторое главное T^1-расслоение, которое мы в дальнейшем будем называть каноническим.

Именно, пусть на многобразии M фиксирована некоторая почти эрмитова структура. Ее задание, как уже отмечалось, равносильно заданию $U(n)$ – структуры на M, то есть подрасслоения $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$ главного расслоения реперов на M. И поскольку $SU(n) \subset U(n)$ – замкнутый нормальный делитель, то существует главное расслоение $(\tilde{P}/SU(n), M, \pi, U(n)/SU(n))$. Заметим, что фактор-группа $U(n)/SU(n)$ канонически изоморфна S^1. Пусть ρ-форма, представляющая характеристический класс построенного главного T^1-расслоения. Она называется обобщенной формой Риччи. В работе [2] В.Ф. Кириченко вычислил обобщенную форму Риччи на пространстве присоединенной G-структуры:

$$\rho = \sqrt{-1}\Big[\left(\tilde{R}^a{}_{ahr} - 2\tilde{B}_{ab[h}B^{ab}{}_{r]}\right)\omega^h \wedge \omega^r + \left(\tilde{R}^a{}_a{}^{hr} + 2\tilde{B}^{ab[h}B_{ab}{}^{r]}\right)\omega_h \wedge \omega_r +$$

$$+2\left(\tilde{R}^{a}{}_{ah}{}^{r}-B^{ab}{}_{h}B_{ab}{}^{r}+\tilde{B}_{abh}\tilde{B}^{abr}\right)\omega^{h}\wedge\omega_{r}\Big], \qquad (15)$$

где $\tilde{B}_{ahr}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{h,r}$.

Таким образом, компоненты формы ρ вычисляются с помощью компонент тензора Римана-Кристоффеля многообразия M. В теории почти эрмитовых структур существует принцип классификации таких структур по свойствам симметрии тензора Римана-Кристоффеля, предложенный А. Греем [6]. Наиболее изучены в наше время классы почти эрмитовых многообразий, удовлетворяющих следующим тождествам кривизны:

1) $R_1:\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})=\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})$;

2) $R_2:\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})=\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})$;

3) $R_3:\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})=\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})$,

где $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}\in\chi(M)$. Запишем условия принадлежности AH-многообразия к тому или иному из перечисленных выше классов в терминах присоединенной G-структуры.

Предложение 1. Почти эрмитово многообразие M удовлетворяет одному из следующих тождеств кривизны:

1) R_3 тогда и только тогда, когда $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=0$;

2) R_2 тогда и только тогда, когда $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=\tilde{R}_{abcd}=0$;

3) R_1 тогда и только тогда, когда $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=\tilde{R}_{abcd}=\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}cd}=0$.

Доказательство. 1) Пусть выполняется тождество R_3. Положим $\tilde{X}=\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}},\tilde{Y}=\tilde{\varepsilon}_{b}$, $\tilde{Z}=\tilde{\varepsilon}_{c},\tilde{W}=\tilde{\varepsilon}_{d}$. Имеем $\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}},\tilde{\varepsilon}_{b},\tilde{\varepsilon}_{c},\tilde{\varepsilon}_{d})=\tilde{R}(J\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}},J\tilde{\varepsilon}_{b},J\tilde{\varepsilon}_{c},J\tilde{\varepsilon}_{d})$.Или $\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}},\tilde{\varepsilon}_{b},\tilde{\varepsilon}_{c},\tilde{\varepsilon}_{d})=0$. То есть $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=0$.Обратно. Пусть $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=0$. Тогда $\forall\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}\in\chi(M)$ имеем $\tilde{R}\left(\tilde{X}+\sqrt{-1}J\tilde{X},\tilde{Y}-\sqrt{-1}J\tilde{Y},\tilde{Z}-\sqrt{-1}J\tilde{Z},\tilde{W}-\sqrt{-1}J\tilde{W}\right)=0$. Расписывая по линейности, выделяя мнимые и действительные части, получим два эквивалентных равенства. Поэтому достаточно рассмотреть только одно

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})-\tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W})-$$
$$-\tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})-\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W})=0.$$

Переобозначив $\tilde{X}\leftrightarrow\tilde{Z},\tilde{Y}\leftrightarrow\tilde{W}$ и сложив полученное равенство с исходным, получим

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W})-\tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W})=0.$$

В этом равенстве произведем замену $\tilde{X}\leftrightarrow\tilde{Z},\tilde{Y}\leftrightarrow\tilde{W}$ и сложим исходное равенство с полученным. Имеем $\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W})=0$. То есть M удовлетворяет тождеству кривизны R_3.

2) Пусть теперь M удовлетворяет тождеству R_2. Подставляя в это тождество сначала $\tilde{X}=\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}},\tilde{Y}=\tilde{\varepsilon}_{b}$, $\tilde{Z}=\tilde{\varepsilon}_{c},\tilde{W}=\tilde{\varepsilon}_{d}$, затем $\tilde{X}=\tilde{\varepsilon}_{a},\tilde{Y}=\tilde{\varepsilon}_{b}$, $\tilde{Z}=\tilde{\varepsilon}_{c},\tilde{W}=\tilde{\varepsilon}_{d}$, получаем $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=0$ и $\tilde{R}_{abcd}=0$ соответственно.

Обратно. Пусть $\tilde{R}_{abcd}=0$. То есть, $\tilde{R}\left(\tilde{X}+\sqrt{-1}J\tilde{X},\tilde{Y}-\sqrt{-1}J\tilde{Y},\tilde{Z}-\sqrt{-1}J\tilde{Z},\tilde{W}-\sqrt{-1}J\tilde{W}\right)=0$, $\forall\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}\in\chi(M)$.

Или $\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})-$
$-\tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W})-\tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})-\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W})-\tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W})=0$.

Отсюда, с учетом равенства $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=0$ и предыдущего пункта, будем иметь

$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) = \tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W})$.

Докажем последнее утверждение.

3) Подставляя один за другим в тождество R_1 следующие наборы векторных полей

$\tilde{X} = \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}, \tilde{Y} = \tilde{\varepsilon}_b, \tilde{Z} = \tilde{\varepsilon}_c, \tilde{W} = \tilde{\varepsilon}_d$;

$\tilde{X} = \tilde{\varepsilon}_a, \tilde{Y} = \tilde{\varepsilon}_b, \tilde{Z} = \tilde{\varepsilon}_c, \tilde{W} = \tilde{\varepsilon}_d$;

$\tilde{X} = \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}, \tilde{Y} = \tilde{\varepsilon}_{\hat{b}}, \tilde{Z} = \tilde{\varepsilon}_c, \tilde{W} = \tilde{\varepsilon}_d$,

получим равенства $\tilde{R}_{\hat{a}bcd} = 0, \tilde{R}_{abcd} = 0, \tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$ соответственно. Обратно. Пусть $\tilde{R}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$. Тогда $\forall \tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W} \in \chi(M)$ имеет место равенство

$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) - \tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(J\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W}) + \tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},\tilde{W}) +$
$+\tilde{R}(\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},J\tilde{W}) - \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W}) + \tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},J\tilde{Z},J\tilde{W}) = 0$. Из которого, с учетом равенства $\tilde{R}_{\hat{a}bcd} = 0$ и $\tilde{R}_{abcd} = 0$ и результатов предыдущих двух пунктов, легко следует $\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) = \tilde{R}(J\tilde{X},J\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W})$, то есть тождество R_1. □

Аналогично определяются тождества кривизны R_1, R_2, R_3 и для AC-многообразий с той лишь разницей, что векторные поля берутся из контактного распределения L. И так как $\Phi|_L^2 = -id$, то предложение 1 справедливо и для AC-многообразий (в том смысле, что слово «эрмитово» нужно заменить на «контактное метрическое»).

Теорема 5. Пусть M – эрмитово многообразие класса R_2. Тогда индуцируемая на пространстве канонического главного T^1-расслоения P почти контактная метрическая структура является нормальной структурой класса R_2.

Доказательство. Найдем компоненты формы кривизны $\Omega = \pi * p$ по формуле (15)

$\Omega_{hr} = \sqrt{-1}\left(\tilde{R}^a{}_{ahr} - 2\tilde{B}_{ab[h}B^{ab}{}_{r]}\right)$,

$\Omega_{h\hat{r}} = \sqrt{-1}\left(\tilde{R}^a{}_{ah}{}^r - B^{ab}{}_h B_{ab}{}^r + \tilde{B}_{abh}\tilde{B}^{abr}\right)$.

Поскольку многообразие M – эрмитово, то $\tilde{B}_{abh} = 0$. Из того, что оно принадлежит классу R_2 следует, согласно предложению 1, $\tilde{R}^a{}_{ahr} = 0$. Таким образом, имеем

$1)\Omega_{hr} = 0$, **(16)**

$2)\ \Omega_{h\hat{r}} = \sqrt{-1}\left(\tilde{R}^a{}_{ah}{}^r - B^{ab}{}_h B_{ab}{}^r\right)$.

Из (16_1) следует, что каноническая связность нормальна. И значит, согласно теореме 4, индуцированная на P почти контактная метрическая структура является нормальной структурой. Далее, подставляя (16) в (14_3), получаем

$1)R_{\hat{a}bcd} = \tilde{R}_{\hat{a}bcd} \circ \pi, \quad 2)R_{abcd} = \tilde{R}_{abcd} \circ \pi.$

То есть многообразие P принадлежит классу R_2 в силу того, что этому классу принадлежит многообразие M. □

Помимо перечисленных выше тождеств кривизны существуют и другие. Так, например, представляют большой интерес квазисасакиевые многообразия, тензор кривизны которых удовлетворяет соотношению

$R(X,\xi)Y = R(\Phi X,\xi)\Phi Y, \forall X,Y \in L.$ (17)

(Мы это тождество будем обозначать R_{Qs}.) Можно показать, что на пространстве присоединенной G-структуры выполнение этого тождества равносильно обращению в нуль компонент $R_{0\alpha\beta\gamma}$ и R_{0ab0} тензора Римана-Кристоффеля. Действительно, пусть справедливо соотношение (17). Тогда, подставив в него $X=\varepsilon_a, Y=\varepsilon_b$, получим $R(\varepsilon_a,\xi)\varepsilon_b=0$. Аналогично, подставляя в него $X=\varepsilon_{\hat a}, Y=\varepsilon_{\hat b}$, получаем $R(\varepsilon_{\hat a},\xi)\varepsilon_{\hat b}=0$. Очевидно, полученные два равенства равносильны соотношениям

$$1) R_{0ab0}=0, \quad 2) R_{0\alpha\beta\gamma}=0. \tag{18}$$

Обратное очевидно.

Интерес к изучению квазисасакиевых многообразий, удовлетворяющих тождеству R_{Qs}, обусловлен тем, что такие многообразия локально эквивалентны произведению келерова многообразия на квазисасакиево многообразие, В-гомотетичное многообразию Сасаки [5]. Здесь под В-гомотетией понимают пребразование метрики $q\to q_0$ такое, что $q_0(X,Y)=-q(\mathrm{B}(X),\mathrm{B}(Y))+\eta(X)\eta(Y)$ и $\mathrm{B}(X)=\nabla_X\xi$ – невырожденный линейный оператор.

Рассмотрим теперь каноническое главное T^1-расслоение над келеровым многообразием *M*. Поскольку келерово многообразие представляет собой частный случай эрмитова многообразия, то согласно (16_1) имеем $\Omega_{hr}=0$. По теореме 4, на *P* индуцируется квазисасакиева структура. В частности, из формулы (14_1) и (16_1) следует, что на квазисасакиевом многообразии *P* $R_{a00b}=0$. Выясним, когда пространство расслоения удовлетворяет тождеству кривизны R_{Qs}. Согласно теоремам 1, (8) и (15), обобщенная форма Риччи будет иметь вид $\rho=2\sqrt{-1}\tilde{A}^{hb}_{ha}\omega^a\wedge\omega_b$, где – $\tilde{A}^{hb}_{ha}=\tilde{r}_{\hat b a}$ – компоненты тензора Риччи. То есть, в келеровом случае обобщенная форма Риччи совпадает с классической формой Риччи $\rho(\tilde X,\tilde Y)=\tilde r(\tilde X,J\tilde Y),\forall\tilde X,\tilde Y\in\chi(M)$. Заметим, что тензор Риччи ковариантно постоянен в римановой связности одновременно с формой Риччи. В самом деле, пусть $\tilde\nabla\tilde r=0$. Согласно определению келерова многообразия $\tilde\nabla J=0$. Имеем

$$\tilde\nabla_{\tilde X}(\rho)(\tilde Y,\tilde Z)=\tilde\nabla_{\tilde X}(\rho(\tilde Y,\tilde Z))-\rho(\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Y,\tilde Z)-\rho(\tilde Y,\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Z)=\tilde\nabla_{\tilde X}(\tilde r(\tilde Y,J\tilde Z))-\tilde r(\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Y,J\tilde Z)-\tilde r(\tilde Y,J\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Z)=$$
$$=\tilde\nabla_{\tilde X}(\tilde r)(\tilde Y,J\tilde Z)+\tilde r(\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Y,J\tilde Z)+\tilde r(\tilde Y,J\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Z)-\tilde r(\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Y,J\tilde Z)-\tilde r(\tilde Y,J\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Z)=\tilde r(\tilde Y,\tilde\nabla_{\tilde X}(J\tilde Z))-$$
$$-\tilde r(\tilde Y,J\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Z)=\tilde r(\tilde Y,\tilde\nabla_{\tilde X}(J\tilde Z)-J\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Z)=\tilde r(\tilde Y,\tilde\nabla_{\tilde X}(J)\tilde Z)=0. \quad \forall\tilde X,\tilde Y,\tilde Z\in\chi(M).$$

Обратное очевидно (выкладки провести в обратном порядке). Но равенство $\tilde\nabla\rho=0$ равносильно тому, что $\nabla_X(\Omega)(Y,Z)=0,\quad\forall X,Y,Z\in\mathrm{H}_\pi$ (здесь $\Omega=\pi*\rho$). Последнее же соотношение означает, согласно (14_2), что $R_{\alpha\beta\gamma0}=0$. Таким образом, мы показали, что на пространстве канонического главного T^1-расслоения индуцируется квазисасакиевой структура, удовлетворяющая тождеству кривизны R_{Qs} тогда и только тогда, когда на базе расслоения ковариантно постоянен тензор Риччи. Итак, справедлива теорема 6.

Теорема 6. Пусть M – келерово многообразие с ненулевым ковариантно постоянным тензором Риччи. Тогда индуцированная на пространстве *P* канонического главного T^1-расслоения почти контактная метрическая структура является квазисасакиевой, а само многообразие *P* локально эквивалентно произведению келерова многообразия и квазисасакиева многообразия, В-гомотетичного многообразию Сасаки.

Особый интерес представляет случай, когда в условии предыдущей теоремы тензор Риччи невырожден. В этом случае на пространстве расслоения индуцируется квазисасакиева структура, В-гомотетичная сасакиевой, причем метрику, относительно которой структура является сасакиевой, мы можем найти в явном виде. В самом деле, имеем

$B(\varepsilon_\alpha) = \nabla_{\varepsilon_\alpha}\xi = \Omega_\alpha{}^\beta\varepsilon_\beta.$ И так как $\Omega_{\;a\hat b} = -\sqrt{-1}\tilde r_{a\hat b}$, то $q_0(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat b}) = -q(-\sqrt{-1}\tilde r_a{}^c\varepsilon_c, \Phi(\varepsilon_{\hat b})) = \tilde r_{a\hat b}$, а также $q_0(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = q_0(\varepsilon_{\hat a}, \varepsilon_{\hat b}) = q_0(\varepsilon_\alpha, \xi) = 0$ и $q_0(\xi,\xi) = 1$. Таким образом,

$$q_0 = \pi * \tilde r + \eta \otimes \eta. \tag{19}$$

Следовательно, доказана теорема 7.

Теорема 7. На пространстве канонического главного T^1-расслоения над эрмитовым симметрическим пространством с невырожденным тензором Риччи индуцируется сасакиева структура относительно метрики (19).

Рассмотрим теперь многообразие N размерности 2n+1, на котором фиксирована AC-структура $\{\Phi, q, \xi, \eta\}$. Многообразие $M = N\times\mathbb{R}$ можно рассматривать как тотальное пространство тривиального расслоения $(M, N, p, \mathbb{R})$, где $p: N\times\mathbb{R} \to N$ – естественная проекция. Обозначим $\tilde v$-единичный направляющий вектор прямой $\mathbb{R}$, θ – 1-форма, представляющая плоскую связность. Тогда существует гомоморфизм $i_H: \chi(N)\to\chi(M)$ такой, что $p_*\circ i_H = id$ (горизонтальное поднятие). Определим на M эндоморфизм J и метрику $\tilde q$ формулами:

$$J = i_H\circ\Phi\circ\pi_* - \theta\otimes\tilde\xi + p^*\eta\otimes\tilde v;$$

$$\tilde q(\tilde X, \tilde Y) = q(X,Y) + \theta(\tilde X)\theta(\tilde Y),$$

здесь $\tilde X = i_H X$, (и следовательно $X = p_*\tilde X$). Пара $(J,\tilde q)$ является почти эрмитовой структурой на M, называемой линейным расширением исходной AC-структры. Будем считать далее, что индексы $\lambda = 2n+1; \hat\lambda = 2n+2$. Построим на M векторные поля

$\tilde\varepsilon_\lambda = \dfrac{\tilde\xi - \sqrt{-1}\tilde v}{\sqrt2}; \tilde\varepsilon_{\hat\lambda} = \dfrac{\tilde\xi + \sqrt{-1}\tilde v}{\sqrt2}$ и обозначим $\tilde\nabla$ – риманову связность метрики $\tilde q$. Имеем $\tilde\nabla_{\tilde v}\tilde v = 0;\ \tilde\nabla_{\tilde v}\tilde X = \tilde\nabla_{\tilde X}\tilde v = 0;\ \tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Y = i_H\nabla_X Y$. Следовательно,

$$\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\lambda}\tilde\varepsilon_\lambda = \tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\lambda}\tilde\varepsilon^\lambda = \tilde\nabla_{\tilde\varepsilon^\lambda}\tilde\varepsilon_\lambda = \tilde\nabla_{\tilde\varepsilon^\lambda}\tilde\varepsilon^\lambda = \frac12\tilde\nabla_{\tilde\xi}\tilde\xi = \frac12 i_H\nabla_\xi\xi,$$

$$\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\lambda}\tilde\varepsilon_\alpha = \tilde\nabla_{\tilde\varepsilon^\lambda}\tilde\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\sqrt2}\tilde\nabla_{\tilde\xi}\tilde\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\sqrt2}i_H\nabla_\xi\varepsilon_\alpha,$$

$$\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}\tilde\varepsilon_\beta = i_H\nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_\beta.$$

Предложение 2. Компоненты ковариантных дифференциалов тензоров J и Φ относительно соответствующих римановых связностей соотносятся следующим образом:

1) $J^\alpha_{\beta,\gamma} = \Phi^\alpha_{\beta,\gamma}$ (точнее, $J^\alpha_{\beta,\gamma} = \Phi^\alpha_{\beta,\gamma}\circ p$); 4) $J^a_{\hat\lambda,\lambda} = J^a_{\hat\lambda,\hat\lambda} = \Phi^a_{\lambda,\lambda}$;

2) $J^\lambda_{\hat b,\gamma} = \sqrt2\Phi^\lambda_{\hat b,\gamma}$; $J^{\hat\lambda}_{b,\gamma} = \sqrt2\Phi^{\lambda}_{b,\gamma}$; 5) $J^{\hat a}_{\lambda,\lambda} = J^{\hat a}_{\lambda,\hat\lambda} = \Phi^{\hat a}_{\lambda,\lambda}$.

3) $J^\alpha_{\beta,\gamma} = J^\alpha_{\beta,\hat\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt2}\Phi^\alpha_{\beta,\lambda}$;

Остальные компоненты либо равны нулю, либо получаются из имеющихся с учетом того, что $J^i_{j,k} = -J^{\hat j}_{\hat i,k}$.

Доказательство: докажем первых два равенства (остальные доказываются аналогично).

1) $J^\alpha_{\beta,\gamma} = \left[\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\gamma}(J)(\tilde\varepsilon_\beta)\right]^\alpha = \left[\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\gamma}(J\tilde\varepsilon_\beta) - J(\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\gamma}\tilde\varepsilon_\beta)\right]^\alpha = \left[\tilde\nabla_{i_H\varepsilon_\gamma}i_H(\Phi\varepsilon_\beta) - i_H\Phi(\nabla_{\varepsilon_\gamma}\varepsilon_\beta) - p^*\eta(\tilde\nabla_{\tilde\varepsilon_\gamma}\tilde\varepsilon_\beta)\tilde v\right]^\alpha =$

$$=\left[i_H\nabla_{\varepsilon_\gamma}(\Phi)\varepsilon_\beta-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta(\nabla_{\varepsilon_\gamma}\varepsilon_\beta)(\varepsilon_\lambda-\varepsilon_{\hat\lambda})\right]^\alpha=\Phi^\alpha_{\beta,\gamma}\circ p;$$

2)

$$J^\lambda_{\beta,\gamma}=\left[i_H\nabla_{\varepsilon_\gamma}(\Phi)\varepsilon_\beta-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta(\nabla_{\varepsilon_\gamma}\varepsilon_\beta)(\varepsilon_\lambda-\varepsilon_{\hat\lambda})\right]^\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^\lambda_{\beta,\gamma}-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta(\nabla_{\varepsilon_\gamma}\varepsilon_\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^\lambda_{\beta,\gamma}+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta_{\beta,\gamma}$$

С учетом того, что $\eta_{\beta,\gamma}=\begin{cases}\sqrt{-1}\,\Phi^\lambda_{\beta,\gamma},\, если\ \beta=b;\\ -\sqrt{-1}\ \Phi^\lambda_{\beta,\gamma},\, если\ \beta=\hat b.\end{cases}$

получаем $J^\lambda_{\beta,\gamma}=\begin{cases}0,\, если\ \beta=b,\\ \sqrt{2}\Phi^\lambda_{\beta,\gamma},\, если\ \beta=\hat b.\end{cases}$ □

Из этого предложения, а также из (2) и (11) получаем

$$\begin{aligned}
&B^{abc}=C^{abc}; && B^{ab}{}_\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(D^{ab}-C^{[ab]}\right);\\
&B^{ab}{}_c=C^{ab}{}_c; && B^{a\lambda}{}_b=\frac{1}{\sqrt{2}}C^a_b;\\
&B^{ab\lambda}=\frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}; && B^{a\lambda}{}_\lambda=\frac{1}{2}D^a; \qquad (20)\\
&B^{\lambda ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}; && B^{\lambda a}{}_b=-\frac{1}{\sqrt{2}}C^a_b.\\
&B^{\lambda\lambda a}=-\frac{1}{4}D^a;
\end{aligned}$$

и ф.к.с. Рассмотрим теперь главное T^1-расслоение над многообразием $N\times\square$. Первая группа структурных уравнений, индуцированной *AH*-структуры будет иметь, согласно (20) и (12), вид:

$$d\omega^p=\omega^p_q\wedge\omega^q+\tilde C^{pq}{}_s\omega^s\wedge\omega_q+\tilde C^{pqs}\omega_q\wedge\omega_s+\tilde C^{pq}\omega_q\wedge\omega+C^p{}_q\omega^q\wedge\omega$$

и ф.к.с.

$$d\omega=\tilde D_{pq}\omega^p\wedge\omega^q+D^{pq}\omega_p\wedge\omega_q+D_p{}^q\omega^p\wedge\omega_q+D_p\omega^p\wedge\omega+D^p\omega_p\wedge\omega,$$

где $p,q,s=1,2,\ldots,n,2n+1.$

$$\begin{aligned}
&\tilde C^{abc}=C^{abc}; && \tilde C^{a\lambda}{}_\lambda=\frac{1}{2}D^a;\\
&\tilde C^{ab\lambda}=\frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}; && \tilde C^{ap}=0;\\
&\tilde C^{\lambda ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}; && \tilde C^a_p=\Omega_{\hat a p};\\
&\tilde C^{\lambda\lambda a}=-\frac{1}{4}D^a; && D_{ap}=\Omega_{ap}; \qquad (21)\\
&\tilde C^{ab}{}_c=C^{ab}{}_c; && D^b_p=2\Omega_{p\hat b};\\
&\tilde C^{ab}{}_\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(D^{ab}-C^{[ab]}\right); && D_p=0.
\end{aligned}$$

$\tilde{C}^{a\lambda}{}_{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}C^{a}_{b};$

Теорема 8. Пусть P – тотальное пространство главного T^1-расслоения над линейным расширением $N\times\mathbb{R}$ почти контактного многообразия N. Тогда индуцированная почти контактная структура на P является:

–нормальной, тогда и только тогда, когда N-нормальное многообразие и связность ω – нормальная;

–квазисасакиевой, тогда и только тогда, когда N-косимплектическое многообразие и связность ω – нормальная;

–почти косимплектической тогда и только тогда, когда N – почти косимплектическое многообразие и связность ω – плоская;

–слабо косимплектической, тогда и только тогда, когда она является точнейше косимплектической, тогда и только тогда, когда N – точнейше косимплектическое многообразие и связность ω – плоская.

Найдем теперь связь между компонентами тензоров кривизны многообразий N и $N\times\mathbb{R}$ на пространствах соответствующих G-структур. Обозначим эти тензоры соответственно R и $\tilde{R}$. Имеем

$$\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\beta)\tilde{\varepsilon}_\gamma=\tilde{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_\beta}\tilde{\varepsilon}_\gamma-\tilde{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_\beta}\tilde{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_\gamma-\tilde{\nabla}_{[\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\beta]}\tilde{\varepsilon}_\gamma=$$

$$=i_H\nabla_{\varepsilon_\alpha}(\pi_*\tilde{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_\beta}\tilde{\varepsilon}_\gamma)-i_H\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\beta}(\pi_*\tilde{\nabla}_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_\gamma)-i_H\nabla_{\pi_*[\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\beta]}\tilde{\varepsilon}_\gamma==i_H R(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)\varepsilon_\gamma.$$

Аналогично получаем

$$\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\beta)\tilde{\varepsilon}_\lambda=\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\beta)\tilde{\varepsilon}_{\hat{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{2}}i_H R(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)\xi;$$

$$\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\lambda)\tilde{\varepsilon}_\lambda=\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\lambda)\tilde{\varepsilon}_{\hat{\lambda}}=\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_{\hat{\lambda}})\tilde{\varepsilon}_\lambda=\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_{\hat{\lambda}})\tilde{\varepsilon}_{\hat{\lambda}}=\frac{1}{2}i_H R(\varepsilon_\alpha,\xi)\xi.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&1)\,\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\beta\gamma\delta};\\&2)\,\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda}=\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}}R_{\alpha\beta\gamma\lambda};\\&3)\,\tilde{R}_{\alpha\lambda\gamma\lambda}=\tilde{R}_{\alpha\lambda\gamma\lambda}=\tilde{R}_{\alpha\lambda\gamma\lambda}=\frac{1}{2}R_{\alpha\lambda\gamma\lambda};\\&4)\,\tilde{R}_{\alpha\beta\lambda\lambda}=\tilde{R}_{\alpha\lambda\lambda\lambda}=\tilde{R}_{\alpha\lambda\lambda\lambda}=\tilde{R}_{\lambda\lambda\lambda\lambda}=0.\end{aligned}\tag{22}$$

Установим теперь, при каких условиях на пространстве канонического главного T^1 – расслоения над линейным расширением $N\times\mathbb{R}$ индуцируется нормальная структура класса R_2. Согласно теореме 5 такая структура индуцируется, если $N\times\mathbb{R}$ эрмитово многообразие класса R_2. То есть по предложению 1 для компонент тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G-структуры имеем:

1) $\tilde{R}_{\hat{a}bcd}=\tilde{R}_{abcd}=0;$

2) $\tilde{R}_{\lambda bcd}=\tilde{R}_{\hat{\lambda}bcd}=0;$

3) $\tilde{R}_{\hat{a}\lambda c\lambda}=\tilde{R}_{a\lambda c\lambda}=0.$

Пользуясь формулами (22), заключаем, что эти условия означают следующее: во-первых, $R_{\hat{a}bcd}=R_{abcd}=0$ и, значит, тензор кривизны многообразия N удовлетворяет тождеству R_2;

во-вторых, $R_{\lambda abc}=0$ и, значит, $\forall X,Y,Z\in L: R(X-\imath\Phi X, Y-\imath\Phi Y, Z-\imath\Phi Z,\xi)=0$, то есть

$$R(\Phi X,\Phi Y,\Phi Z,\xi)=R(\Phi X,Y,Z,\xi)+R(X,\Phi Y,Z,\xi)+R(X,Y,\Phi Z,\xi); \tag{23}$$

в-третьих, $R_{\lambda a\lambda c}=R_{\lambda a\lambda c}=0$ и, следовательно,

$$\forall X,Y\in L: R(X,\xi,Y,\xi)=0 \tag{24}$$

Итак, доказана теорема 9.

Теорема 9. Если N-нормальное многообразие класса R_2, тензор кривизны которого удовлетворяет тождествам (23), (24), то индуцированная на пространстве канонического главного T^1-расслоения над линейным расширением этого многообразия структура является нормальной структурой класса R_2.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования РФ и администрации Белгородской области на проведение молодыми учеными научных исследований.

Список литературы

1. Борисовский И.П. О геометрии главных T^1-расслоений над многообразием Ходжа // Математические заметки, т. 64, выпуск 6, 1998, с. 824-829.

2. Кириченко В.Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений // Фундаментальная и прикладная математика. т. 6, № 4, 2000, с. 1095-1120.

3. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии ВИНИТИ АН СССР, т. 18, 1986, с. 25-71.

4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981.

5. Рустанов А.Р. Геометрия QS-многообразий // Успехи математических наук, 1994, т. 49, № 1-2, с. 221-222.

6. Gray A. Curvature indentities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tohoku Math. J., 1976, V. 28. p. 601-612.

7. Gray A., Hervella L. The 16 classes of AH-manifolds and their linear invariants // Ann. mat. pura ed appl., 1980, 123 p. 35-58.

8. Kobayashi S. Principal Fibre Bundles with the 1-Dimensional Toroidal Group // Tohoku Math. J. (2) 8 (1956), 29-45.

ALMOST CONTACT STRUCTURES ON THE SPACE OF PRINCIPAL T^1 – BUNGLE

I.P. Borisovsky
Belgorod State University,
Pobedy Str. 85, Belgorod, 308015, Russia

The properties of the spaces of principal T^1-bungle with characteristic class generated with generalized Ricci form are studied.