НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 514.76

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА $V_p \subset E_{p+2}$.

В.А. Есин*

Белгородский государственный университет
308015, Белгород, ул. Победы, 85

Рассматриваются распределения, инвариантно связанные с нормальным векторным полем. Исследуется интегрируемость таких распределений.

В работе рассматриваются распределения на подмногообразии V_p евклидова пространства E_{p+2}, инвариантно связанные с полем орта данной нормали.

Присоединим к подмногообразию $V_p \subset E_{p+2}$ подвижной репер

$$R = (x, e_i, e_\alpha), \qquad (i, j.k = 1,..., p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2),$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ в точке $x \in V_p$, а векторы e_α образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta. \tag{1}$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений подмногообразия, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha), \tag{2}$$

где b_{ij}^α – второй основной тензор подмногообразия. Функции $\gamma_{ij} = e_i e_j$ – компоненты метрического тензора, γ^{ij} – контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k, \quad d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\omega_k^j - \gamma^{jk}\omega_k^i. \tag{3}$$

Дифференцирование тождеств $e_i e_\alpha = 0$ и $e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ приводит к соотношениям

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{4}$$

Пусть на подмногообразии $V_p \subset E_{p+2}$ задано поле нормальных векторов n. Орт e_{p+1} репера направим по n (и в дальнейшем предполагаем, что n коллинеарен e_{p+1}). Тогда форма ω_{p+1}^{p+2} будет главной [2]:

$$\omega_{p+1}^{p+2} = c_i \omega^i, \tag{5}$$

а величины b_{ij}^{p+1}, b_{ij}^{p+2} будут координатами двухвалентных тензоров.

---

* Esin@dsu.edu.ru

Ковектор c_i задает распределение, которое обозначим Δ^c_{p-1}. Вектор $c=c^i e_i$ является нормальным к площадке $\Delta^c_{p-1}(x)$. Направим орт e_p по вектору c, а орты $e_a \perp e_p$ $(a,b=1,...,p-1)$, тогда $c_k=\lambda\gamma_{kp}$ и $c_a=0$. Поэтому, вдоль площадки $\Delta^c_{p-1}(x)$ будет в.

$$de_{p+1}=\omega^i_{p+1}e_i+\omega^{p+2}_{p+1}e_{p+2}=\omega^i_{p+1}e_i+c_a\omega^a e_{p+2}=\omega^i_{p+1}e_i,$$

т.е. вдоль площадки $\Delta^c_{p-1}(x)$ орт e_{p+2} данной нормали переносится параллельно в связности нормального расслоения.

Рассмотрим площадку $\Delta^l_{p-1}(x)$, сопряженную вектору c относительно конуса $b^{p+1}_{ij}\omega^i\omega^j=0$. Для нее $b^{p+1}_{ij}c^i x^j=0$. Пусть $l=l^i e_i \perp \Delta^l_{p-1}(x)$, тогда $\gamma_{ij}l^i x^j=0$. Следовательно, $l^i=c_k b^{kj}_{p+1}$, где $b^{kj}_{p+1}b^{p+1}_{ji}=\delta^i_k$.

Пусть $\Delta^m_{p-1}(x)$ площадка, сопряженная вектору l относительно конуса $b^{p+2}_{ij}\omega^i\omega^j=0$. Тогда $b^{p+2}_{ij}l^i y^j=0$. Если $m\perp\Delta^m_{p-1}(x)$, то $\gamma_{ij}m^i y^j=0$. Следовательно, $b^{p+2}_{ij}l^i=\gamma_{ij}m^i$. Отсюда $m^k=\gamma^{tk}b^{p+2}_{it}c_j b^{ji}_{p+1}$ или

$$m_t=b^{p+2}_{it}c_j b^{ji}_{p+1}. \tag{6}$$

Рассмотрим гиперсферическое изображение $\bar{V}_p$ подмногообразия $V_p\subset E_{p+2}$ с помощью орта e_{p+1} данной нормали. Имеем

$$de_{p+1}=\omega^i_{p+1}e_i+\omega^{p+2}_{p+1}e_{p+2}=(-\gamma^{ij}b^{p+1}_{jk}e_i+c_k e_{p+2})\omega^k=a_k\omega^k,$$

где a_k – векторы, касательные к линиям ω^k гиперсферического изображения $\bar{V}_p$. В нормальной плоскости $\bar{N}_2(x)$ к гиперсферическому изображению $\bar{V}_p$ инваринтно определены два вектора

$$a_{p+1}=e_{p+1},\quad a_{p+2}=c_i b^{ij}_{p+1}e_j+e_{p+2}.$$

Нормаль $\bar{N}_2(x)$ индуцирует на V_p аффинную связность [3]. Отнесем $\bar{V}_p\subset E_{p+2}$ к реперу $\bar{R}=(x,e_i,a_\alpha)$. В этом репере

$$de_i=\theta^j_i e_j+\theta^\alpha_i a_\alpha=(\theta^\alpha_i+\theta^{p+1}_i c_i b^{ij}_{p+1})e_j+\theta^{p+1}_i e_{p+1}+\theta^{p+2}_i e_{p+2}. \tag{7}$$

С другой стороны, в репере R

$$de_i=\omega^j_i e_j+\omega^{p+1}_i e_{p+1}+\omega^{p+2}_i. \tag{8}$$

Из (7) и (8), в частности, следует, что

$$\theta^j_i=\omega^j_i-b^{p+2}_{it}b^{kj}_{p+1}c_k\omega^t. \tag{9}$$

Связность на V_p, индуцируемая двумерной нормалью $\bar{N}_2(x)$, будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда $D\theta^i_i=0$ [3], что в силу (9) приводит к равенству

$$D(\overset{p+2}{\underset{ti}{}} b^{ki}_{p+1} c_k \omega^t) = 0. \tag{10}$$

Но (10) с учетом (6) означает интегрируемость распределения Δ^m_{p-1}. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема. Аффинная связность, индуцируемая нормалью $\bar{N}_2(x)$ на $V_p \subset E_{p+2}$, будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда распределение Δ^m_{p-1} вполне интегрируемо.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. – М., Высшая школа, 1989, 222 с.

2. Есин В.А. К геометрии распределений на $V_p \subset E_{p+2}$. Тезисы сообщений 9 всесоюзной геометрической конференции. Кишинев, 1988, с. 112-113.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М., Наука, 1976, 432 с.

ON THE INTEGRABILITY OF DISTRIBUTIONS ON $V_p \subset E_{p+2}$.

V.A. Esin

Belgorod State University
Pobedy Str. 85, Belgorod, 308015, Russia

The distributions invariantly related to normal vector field are considered. We research the integrability of such distributions.