НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 512.533

О ПОЛУГРУППАХ С МАКСИМАЛЬНЫМИ РАЗРЕШИМЫМИ ПОДГРУППАМИ

О.В. Воликова, А.Г.Сокольский*

Белгородский государственный университет,
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Изучаются свойства полугрупп с максимальными нильпотентными подгруппами, которые являются естественным обобщением нильпотентных в смысле Мальцева полугрупп

В последнее время наметился интерес к полугрупповым кольцам нильпотентных в смысле Мальцева (см. [3], [4]) полугрупп. Поскольку эти полугруппы образуют многообразие полугрупп, то множество полугрупп с максимальными нильпотентными подгруппами содержат все нильпотентные в смысле Мальцева полугруппы. Существует гипотеза, что свойства полугрупповых колец нильпотентных полугрупп связаны не непосредственно с нильпотентностью полугруппы, а во многом определяются нильпотентностью максимальных подгрупп полугруппы. С другой стороны, известный результат Залесского А.Е. [2] открывает некоторые перспективы в изучении радикала полугрупповых алгебр полугрупп с максимальными разрешимыми подгруппами. В данной работе предпринята попытка изучения полугруп с нильпотентными максимальными подгруппами, индексы которых ограничены в совокупности.

Сначала вводится понятие слабо p–сепаративной полугруппы. Далее определяется конгруэнция ζ_p и устанавливаются некоторые ее свойства. После этого устанавливается наличие некоторого аналога группового центрального ряда в полугруппах с максимальными нильпотентными подгруппами.

Все кольца, рассматриваемые в этой статье, предполагаются ассоциативными. Необходимые сведения о полугруппах можно найти в [1]. Приведем необходмимые определения.

(0.1) Пусть ρ – конгруэнция, определенная на полугруппе S Ядром конгруэнции ρ называется множество $Ker\rho$, элементов полугруппы S, лежащих в одном ρ-классе с некоторым идемпотентом, т.е. $Ker\,\rho = \bigcup_{e\in E} e\rho$, где E – множество идемпотентов полугруппы S.

(0.2) Полугруппа S называется сепаративной, если для элементов $a, b \in S$ из равенств $a^2 = ab = ba = b^2$ следует $a = b$. Полугруппа S называется слабо сепаративной, если для элементов $a, b \in S$ и любого элемента $s \in S$ из равенства $asa = asb = bsa = bsb$ следует $a = b$

(0.3) Пусть $x, y, u_1, \dots, u_n$ – произвольные переменные. Полагаем $X_0 = x, Y_0 = y$ и далее по индукции $X_{n+1} = X_n u_{n+1} Y_n$, $Y_{n+1} = Y_n u_{n+1} X_n$. Если для полугруппы S существует натуральное число n такое, что выполняется тождество $X_n = Y_n$, то такая полугруппа называется нильпотентной с смысле А.А. Мальцева [7].

(0.4) Конгруэнция σ, определенная на полугруппе S, называется минимальной групповой конгруэнцией, если имеет место

$$\sigma = \{(a, b) \in S\times S \mid \exists\ e=e^2,\ ae=be\}.$$

* sokolsky@bsu.edu.ru

Полугруппу S назовем слабо p-сепаративной, если для любого набора элементов $s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$ из S равенство $xs_1 x \dots x s_{p-1} x = ys_1 y \dots y s_{p-1} y$ влечет равенство $x = y$.

Для любого натурального числа p определим на полугруппе S отношение ζ_p следующим образом: для элементов $x, y \in S$ имеет место соотношение $(x,y) \in \zeta_p$ тогда и только тогда, когда для некоторого натурального числа n и любого набора элементов $s_1, s_2, \dots, s_{p^n-1}$ из S выполняется равенство

$$xs_1x \ \dots \ xs_{p^n-1}x = y\, s_1y \dots y\, s_{p^n-1}y.$$

Лемма 1. Отношение ζ_p является конгруэнцией на любой полугруппе S.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения ζ_p очевидны. Покажем, что оно транзитивно. Пусть $(x, y) \in \zeta_p$ и $(y, z) \in \zeta_p$. Это означает, что существуют натуральные числа n и m такие, что для любых наборов $s_1, s_2, \dots, s_{p^n-1}$ и $t_1, t_2, \dots, t_{p^m-1}$ из S справедливы равенства

$$xs_1x \ \dots \ xs_{p^n-1}x = y\, s_1y \dots y\, s_{p^n-1}y, \tag{1}$$

$$yt_1y \dots yt_{p^m-1}y = z\, t_1z \dots z\, t_{p^m-1}z \tag{2}$$

Если $m=n$, то сразу получаем соотношение $(x, y) \in \zeta_p$. Предположим, что $m \neq n$. Равенство (1) выполняется для любого набора из p^n-1 элементов полугруппы S, поэтому можно умножить равенство (1) на произвольный элемент из S, а затем на равенство (1), но с другим набором из p^n-1 элементов. Эту операцию будем повторять до тех пор, пока не получится равенство

$$xs_1x \ \dots \ xs_{p^{n+m}-1}x = ys_1y \dots y\, s_{p^{n+m}-1}y$$

Аналогично поступим с равенством (2) и получим равенство

$$ys_1y \dots ys_{p^{n+m}-1}y = zs_1z \dots zs_{p^{n+m}-1}z$$

Откуда следует, что $(x, y) \in \zeta_p$. Покажем теперь, что отношение ζ_p стабильно справа, т.е. для любого элемента $s \in S$ из соотношения $(x, y) \in \zeta_p$ следует, что $(xs, ys) \in \zeta_p$. Пусть $(x, y) \in \zeta_p$, тогда для некоторого натурального числа m и любого набора элементов , $t_1\ t_2, \dots, t_{p^m-1}$ из S выполняется равенство вида (1). Следовательно, для любого набора элементов $t_1, t_2, \dots, t_{p^m-1}, s$ из S имеют место равенства

$$(xs)t_1(xs) \dots (xs)\, t_{p^m-1}(xs) = x(st_1)x \dots x(st_{p^m-1})xs=$$
$$= y(st_1)y \dots y(s\, t_{p^m-1})y = (ys)t_1(ys) \dots (ys)\, t_{p^m-1}(ys),$$

т.е. $(xs, ys) \in \zeta_p$. Аналогично доказывается, что отношение ζ_p стабильно слева.

Лемма 2. Для конгруэнции ζ_p справедливы следующие утверждения:

(а) конгруэнция ζ_p разделяет идемпотенты;

(б) для любой слабо p–сепаративной конгруэнции ρ имеет место строгое включение $\rho \subset \zeta_p$;

(в) если конгруэнция ζ_p определена на полугруппе S с полугруппой идемпотентов E, то имеет место равенство $Ker\zeta_p = \bigcup_{e \in E} P_e \cap C(e\, Se)$.

Доказательство. (а) Предположим идемпотенты $e, f \in S$ лежат в одном ζ_p–классе. Тогда существует натуральное число n такое, что для любого набора элементов, $s_1, s_2, ..., s_{p^n-1}$ из S выполняется равенство

$$es_1e \dots es_{p^n-1}e = fs_1f \dots fs_{p^n-1}f.$$

Полагая сначала $s_1 = s_2 = \dots = s_{p^n-1} = e$, а затем $s_1 = s_2 = \dots = s_{p^n-1} = f$, получим равенства $e = ef$ и $ef = f$, т.е. $e = f$.

(б) Предположим, что для элементов a, b из S имеет место соотношение $(a, b) \in \zeta_p$. Это означает, что для некоторого натурального числа n и любого набора элементов $s_1, s_2, \dots, s_{p^n-1}$ из S имеет место соотношение

$$as_1a \dots a\, s_{p^n-1}\, a = bs_1b \dots bs_{p^n-1}b \qquad (3)$$

Положим в этом равенстве $s_i = s_{jp^{k-1}+i}$ для $i=1, 2, \dots, p-1, j=1, 2, \dots, p-1$.

Теперь введем обозначения

$$as_1a \ \dots\ as_{p^{n-1}-1}a = x,$$

$$bs_1b \ ..\ bs_{p^{n-1}-1}b = y,$$

$$s_{ip^n-1} = t_i, \qquad i=1, 2, \dots, p-1.$$

Тогда равенство (3) примет вид

$$x\, t_1x \dots x\, t_{p-1}x = yt_1y \dots yt_{p-1}y$$

это равенство справедливо для любого набора элементов t_1, t_2, ... t_{p-1} из S. Очевидно выполняется равенство $x\, t_1x \dots x\, t_{p-1}x\,\rho = yt_1y \dots yt_{p-1}y\rho$, отсюда в силу слабой p–сепаративности S следует равенство $x = y$, т.е. $as_1a \dots as_{p^{n-1}-1}a = bs_1b \dots bs_{p^{n-1}-1}b$

Повторяя этот процесс, через конечное число шагов получим равенство $a\rho = b\rho$. Откуда следует требуемое включение $\rho \subset \zeta_p$.

(в) Предположим, что элемент g содержится в $P_e \cap C(eSe)$. Тогда для некоторого натурального числа k имеет место $g^{p^k} = e$. Поэтому для любого набора элементов $h_1, h_2, \dots, h_{p^k-1}$ из S выполняется равенство

$$gh_1g \dots gh_{p^k-1}g = eh_1e \dots eh_{p^k-1}e \tag{4}$$

Следовательно, имеет место соотношение $(g, e) \in \zeta_p$, т.е. $g \in Ker\zeta_p$. Таким образом, получено включение " $\subseteq$". Пусть теперь $g \in Ker\ \zeta_p$. Тогда справедливо равенство (6) для некоторого натурального числа k и любого набора элементов $h_1, h_2, \dots, h_{p^k-1}$ из S. В равенстве (4) положим $h_2 = \dots = h_{p^k-1} = e$, что влечет $gh_lg^{p^k-1} = eh_l\, gh_1g^{p^k-1} = eh_1$. Отсюда следует равенство $geh_le = eh_leg$ для любого элемента $h_l \in S$ (здесь учтено, что при $h_l = h_2 = \dots = h_{p^k-1} = e$ получается равенство $g^{p^k} = e$). Это означает, что $g \in C(eSe)$. Если в группе H_e найдется максимальная p–подгруппа P_e, не содержащая элемент g, то рассмотрим подгруппу $< g, P_e >$, порожденную элементом g и подгруппой P_e. Поскольку g является центральным p–элементом группы H_e, то для любого элемента $a \in P_e$, например порядка p^m, выполняются равенства $(ga)^{p^{m+k}} = g^{p^{m+k}} a^{p^{m+k}} = e$. Следовательно, подгруппа $< g, P_e >$ является p–подгруппой, содержащей максимальную p–подгруппу P_e. Отсюда вытекает, что g содержится в каждой максимальной p–подгруппе группы H_e. Тем самым доказано обратное включение $Ker\xi_p \subseteq \bigcup_{e \in E} P_e \cap C(e\ Se)$, которое завершает доказательство леммы.

Следствие. Если конгруэнция ζ_p определена на группе G , то для любой максимальной p–подгруппы G_p группы G имеет место равенство

$$Ker\zeta_p = G_p \cap C(G).$$

Лемма 3. Для произвольной полугруппы S выполняются следующие утверждения:

(а) полугруппа S является слабо p-сепаративной тогда и только тогда, когда $\zeta_p = 0s$ (где $0s$ – тождественная конгруэнция на полугруппе S);

(б) если S слабо p–сепаративная полугруппа с единицей, то она слабо сепаративна;

(в) если полугруппа S слабо p–сепаративна, то подполугруппа eSe слабо p–сепаративна для любого идемпотента $e \in S$;

(г) если полугруппа S является инверсной, то слабая p-сепаративность эквивалентна условию $Ker\zeta_p = E$.

Доказательство. (а) Пусть S – слабо p–сепаративная полугруппа. Предположим, что для элементов a, b из S имеет место соотношение $(a, b) \in \zeta_p$. Это означает, что для некоторого натурального числа n и любого набора элементов $s_1, s_2, \dots, s_{p^n-1}$ из S имеет место соотношение

$$as_1a \dots a\, s_{p^n-1}\, a = bs_1b \dots bs_{p^n-1}b \tag{5}$$

Положим в этом равенстве $s_i = s_{jp^{k} \,i+i}$ для $i=1, 2, \dots, p-1, j=1, 2, \dots, p-1$.

Теперь введем обозначения

$$as_1a \ \dots \ as_{p^n-1}a = x,$$
$$bs_1b \ .. \ bs_{p^n-1}b = y, \ s_{ip^n-1} = t_i, \qquad i=1, 2, \dots , p-1.$$

Тогда из (3) получим равенство

$$x\,t_1x \dots x\,t_{p-1}x = yt_1y \dots yt_{p-1}y$$

справедливое для любого набора элементов $t_1, t_2, \dots t_{p-1}$ из S Из последнего равенства ввиду слабой p-сепаративности полугруппы S вытекает равенство $x=y$, т. е. , возвращаясь к прежним обозначениям, получим равенство

$$a\,s_1a \dots a\,s_{p^n-1}a = b\,s_1b \dots b\,s_{p^n-1}\,b$$

По сравнению с равенством (5) здесь число вхождений буквы a в левую часть равенства уменьшилось в p раз. Повторяя этот процесс, через конечное число шагов получим равенство $a = b$. Это означает, что $\zeta_p=0_S$. Обратное утверждение очевидно.

(б) Пусть S – полугруппа с единицей e и для элементов $a, b \in S$ и любого элемента $s \in S$ имеет место равенство $asa=asb=bsa=bsb$. Предположим, что для всех натуральных чисел, не превышающих число m, выполняется равенство вида $as_1a \,..\, a\,s_ma = bs_1b \,.\, bs_mb$. Умножим это равенство справа на $s_{m+1}a$, где s_{m+1} – произвольный элемент из S Получим равенство

$$as_1a \dots a\,s_mas_{m+1}a = bs_1b \dots bs_mb\,s_{m+1}a$$

Учитывая, что $bs_{m+1}b = bs_{m+1}a$, будем иметь равенство

$$as_1a \,.\, a\,s_mas_{m+1}a = bs_1b \dots bs_mb\,s_{m+1}b$$

Таким образом, справедливо равенство

$$a\,s_1a \,.\,.\, a\,s_{p-1}a = b\,s_1b \,..\, b\,s_{p-1}b$$

Условие слабой p–сепаративности полугруппы S влечет равенство $a = b$, которое означает сепаративность полугруппы S.

(в) Предположим, что для элементов exe, $eye \in eSe$ и любого набора $et_1e, \dots , et_{p-1}e$ имеет место равенство

$$exe\,(et_1e)exe \dots exe\,(et_{p-1}e)exe = ye(et_1e)eye \dots eye(et_{p-1}e)eye.$$

Отсюда следует равенство

$$exe\,t_1exe \quad exe\,t_{p-1}exe = yet_1eye \ \ .\ eyet_{p-1}eye.$$

Из слабой p–сепаративности полугруппы S получается нужное равенство $exe= eye$.

(г) Если $\mathrm{Ker}\zeta_p=E$, то из соотношения $(a, b)\in\zeta_p$ следует, что $(ba^{-1}, aa^{-1})\in\zeta_p$, поэтому $ba^{-1} = aa^{-1}$, а это означает, что $a\le b$. Меняя местами a и b, можно показать , что $b\le a$. Откуда следует, что $a = b$. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 4. Для любой полугруппы S все максимальные подгруппы, которой нильпотентны и их ступени нильпотентности ограничены в совокупности, последовательность полугрупп

$$S,\ S_1 = S/\zeta_p,\ S_2 = S_1/\zeta_p, \dots, S_{n+1} = S_n/\zeta_p, \dots$$

либо обрывается на слабо p-сепаративной полугруппе, либо содержит комбинаторную полугруппу.

Доказательство Если полугруппа S слабо p–сепаративна, то утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим конгруэнцию ζ_p на полугруппе S, не являющейся слабо p–сепаративной. В этом случае, согласно лемме 1.3 (а) $\zeta_p\ne 0_S$, можно определить гомоморфизм $\psi: S\to S/\zeta_p$, полагая $\psi(s) = s\zeta_p$ для любого элемента s из S. Для произвольной максимальной подгруппы G полугруппы S через φ обозначим ограничение гомоморфизма ψ на G. Вычислим ядро гомоморфизма φ

$$Ker\,\varphi = \{\, g\in G \mid \varphi(g) = e\zeta_p\} = \{\, g\in G \mid (g,e)\in\zeta_p \,\} = G\cap e\zeta_p,$$

где e – единица группы G. Введем обозначение $K(G) = G\cap e\zeta_p$. Тогда справедливо соотношение $G_1=\varphi(G)\cong G/K(G)$. Нетрудно убедиться, что между максимальными подгруппами полугрупп S и S/ζ_p существует взаимно однозначное соответствие. А именно, максимальной подгруппе G из S соотвествует подгруппа $\varphi(G)$ из S и наоборот. Рассмотрим следующую последовательность полугрупп

$$S,\ S_1 = S/\zeta_p,\ S_2 = S_1/\zeta_p, \dots, S_{n+1} = S_n/\zeta_p.$$

Здесь конгруэнция ζ_p определяется каждый раз на соответствующей полугруппе. Если в этой последовательности содержится слабо p–сепаративная полугруппа, то последовательность стабилизируется на этой полугруппе. В противном случае рассмотрим максимальные подгруппы этой последовательности полугрупп. С этой целью для подгруппы G полугруппы S определим по индукции группы $G_1 = \varphi(G)$, $G_2 = \varphi(G_1), \dots, G_{n+1} = \varphi(G_n), \dots$, где φ – ограничение гомоморфизма $\psi: S\to S/\zeta_p$ на подгруппе G, φ_i – ограничение гомоморфизма $\psi_i: S_i\to S_i/\zeta_p$ на подгруппе G_i для $i>0$. Нетрудно показать, что если G – максимальная подгруппа полугруппы S, то группы

$$G, G_1 = \varphi(G),\ G_2 = \varphi(G_1), \dots, G_{n+1} = \varphi(G_n), \dots$$

являются максимальными подгруппами соответствующих полугрупп из предыдущей последовательности полугрупп. Для группы G_1 получен изоморфизм $G_1=\varphi(G)\cong G/K(G)$, аналогично можно получить изоморфизмы $\varphi(G_1)= G_2\cong G/K(G_1)$. Тогда для группы G_2 имеет место изоморфизм

$$G_2 = G_1/\zeta_p \cong G_1/K(G_1) \cong ((G/K(G))/(A_2/K(G)) \cong G/A_2,$$

где A_2 – прообраз подгруппы $K(G_1)$ группы G_1 при изоморфизме $G_1 \cong G/K(G)$, т.е. $A_2/K(G) \cong K(G_1)$. Далее по индукции определим подгруппу A_i группы G при помощи соотношения $A_i/A_{i-1} \cong K(G_{i-1})$. Теперь индукцией по i покажем справедливость изоморфизма $G_i \cong G/A_i$, для всех $i > 0$. Полагая $A_1 = K(G)$, замечаем, что для i=1, 2 утверждение справедливо. Предположим, что для i>3 имеет место изоморфизм $G_{i-1} \cong G/A_{i-1}$. Тогда выполняются следующие изоморфизмы

$$G_i \cong G_{i-1}/\zeta_p \cong G_{i-1}/K(G_{i-1}) \cong (G/A_{i-1})/(A_i/A_{i-1}) \cong G/A_i.$$

Теперь убедимся в справедливости включения $A_i/A_{i-1} \subseteq C(G/A_{i-1})$ для всех i>0 . Полагая $A_0 = e$, покажем, что $A_1 = K(G) \subseteq C(G)$, действительно, согласно лемме 1.2 (в), $K(G) \subseteq P_e \cap C(eSe) \subseteq P_e \cap C(G)$. Таким образом для i = 1 утверждение справедливо. Аналогично доказывется включение $K(G_{i-1}) \subseteq C(G_{i-1})$. По определению A_i имеем изоморфизм $A_i/A_{i-1} \cong K(G_{i-1})$. Из предыдущего включения и изоморфизма $G_{i-1} \cong G/A_{i-1}$ с помощью несложных рассуждений получается требуемое включение $A_i/A_{i-1} \subseteq C(G/A_{i-1})$.

Предположим, что m – максимальная ступень нильпотентности всех максимальных подгрупп полугруппы S. Тогда для любой максимальной подгруппы G полугруппы S цепочка подгрупп с коммутативными факторами

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_i \ldots$$

оборвется не более чем на m–том шаге на самой группе G. Это следует из разрешимости группы G. Поэтому из изоморфизма $G_i \cong G/A_i$, $i > 0$ следует, что G_m – единичная группа, т.е. S_m – полугруппа без нетривиальных подгрупп. Заметим, что полугруппа S_m не может быть группой, поскольку конгруэнция ζ_p по лемме 1.2 (а), разделяет идемпотенты и поэтому полугруппа S_m содержит множество идемпотентов той же мощности, что и полугруппа S.

Последняя теорема может быть использована при иследовании полупростоты полугрупповых алгебр нильпотентных полугрупп.

Список литературы

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, Т 2. – М.: Наука, 1972.

2. Залесский А. Е. Радикал групповой алгебры разрешимой группы локально нильпотентен. Изв. АН ССР сер. мат., т. 38, № 5, 1974. С. 983 – 994.

3. Мальцев А. А. Избранные труды. – Т. 1. Классическая алгебра. – М.: Наука, 1976. – 487 с.

4. Lallement G. On nilpotency on semigroups. // Pacific J. Math. – 1972.– V. 42. – P. 693 – 700.

ON RADICALS OF SEMIGROUP ALGEBRAS

Volikkova O.V., Sokolsky A.G.

Belgorod State University,

308015, Belgorod, Pobeda St., 85, Russian Federation

The study of the structure of semigroup algebras radicals of semigroups with nilpotent maximal subgroups over a field of prime characteristic is reduced to the study of semigroup algebra redicals of weakly p-separative semigroups. In particular, the coincidence of the Jacobson radical and the Baer radical of a nilpotent group algebra over a field of prime characteristic is established.