

УДК 532.546:541.182.45

## ДЕФОРМАЦИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

А.М. Логинов\*, К.Б. Канн

Белгородский Государственный Университет  
308105, Белгород, ул. Победы 85

Показано, что при одноосной деформации газовый пузырек в жидкости получает форму сферокатеноида – осесимметричной фигуры (катеноида) со сферическими торцами. Площадь и объем сферокатеноида и двухосного эллипсоида с тем же эксцентриситетом отличаются незначительно

Газовые пузырьки в жидкости – это объект, который стал предметом научных исследований 1,5-2 века назад. Газовые пузырьки и двухсторонние жидкие пленки описываются как в научно-популярной литературе [1,2], так и в серьезных научных работах. Газовыми пузырьками и двухсторонними жидкими пленками интересовались такие знаменитые ученые, как Ньютон, Кельвин, Лаплас, Ребиндер и др.

Отдельные газовые пузырьки в жидкости имеют сферическую форму и перемещаются

свободно. С увеличением газосодержания газожидкостной эмульсии пузырьки приходят в соприкосновение, теряют индивидуальную подвижность и образуют некоторую связную жидкопленочную структуру, которая называется *пенной*. Пузырьки в пене уже не имеют сферическую форму – они деформированы. Деформация газового пузырька происходит под действием капиллярных и внешних сил.

В данной работе исследуется процесс деформации одиночного газового пузырька в жидкости под действием внешних сил. Получены аналитические выражения, описывающие форму газового пузырька, деформированного осевыми растягивающими и сжимающими усилиями.

Если подвергать сферический газовый пузырек осевому растяжению или сжатию, то в результате деформации он приобретает вытянутую (при растяжении) (рис.1,а) или сплюснутую (при сжатии) (рис.1,б) форму.

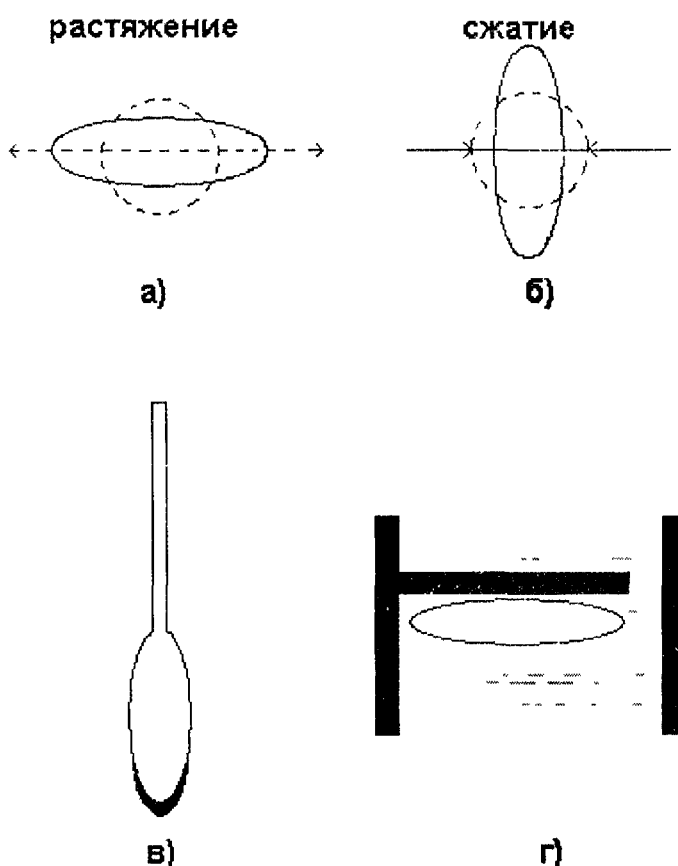


Рис. 1.

\* Logvinov @ bsu.edu ru

Растяжение пузырька можно наблюдать, выдувая мыльный пузырек через тонкий капилляр (рис.1,в).

Когда жидкость стекает к низу пузырька, он под тяжестью скопившейся капли растягивается, приобретая форму, как на рис.1а [3]. Сжатие пузырька можно наблюдать, например, с помощью устройства, показанного на рис.1,г.

В этом случае пузырек под действием гидростатического давления приобретает сплюснутую (сжатую) форму.

В декартовых координатах произвольная поверхность описывается аналитической зависимостью  $z = f(x, y)$ . Но форму поверхности можно задать также значением средней кривизны поверхности  $H(x, y, z)$ , которая в произвольной точке задается зависимостью

$$H = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (1)$$

где  $R$  – радиус средней кривизны, а  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны в точке.

Кривизна любой газожидкостной границы определяется из уравнения Лапласа

$$H\sigma = \Delta p, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение жидкости, а  $\Delta p$  – разность давлений по разные стороны газожидкостной границы. Газовый пузырек в жидкости образован замкнутой газожидкостной поверхностью. Давление внутри пузырька постоянно и превышает внешнее давление. Если это давление (в жидкости, окружающей пузырек) тоже постоянно, то  $\Delta p = const$  и  $H = const$  – газовый пузырек получает строго сферическую форму, которая обеспечивает минимум свободной поверхностной (потенциальной) энергии. Для сферического пузырька уравнения (1) и (2) дают соотношение

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} = Const$$

где  $R = R_1 = R_2$  – радиус пузырьков.

При любой деформации пузырька кривизна газожидкостной границы меняется, но условие Лапласа сохраняется по всей поверхности. Для небольших газовых пузырьков гидростатическое давление невелико, и перепад давления на газожидкостной границе можно считать постоянным ( $\Delta p = Const$ ). Из условия (2) следует, что и для деформированного газового пузырька  $H\sigma = Const$ , а следовательно, и

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = Const \quad (\sigma = Const - \text{характеристика пенообразующего раствора}).$$

Поверхность постоянной кривизны образуется при вращении цепной линии вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии. Цепная линия – это линия, форму которой принимает тяжелая цепь, если ее свободно подвесить за два конца [4] (см. рис.2). Аналитически цепная линия описывается зависимостью:

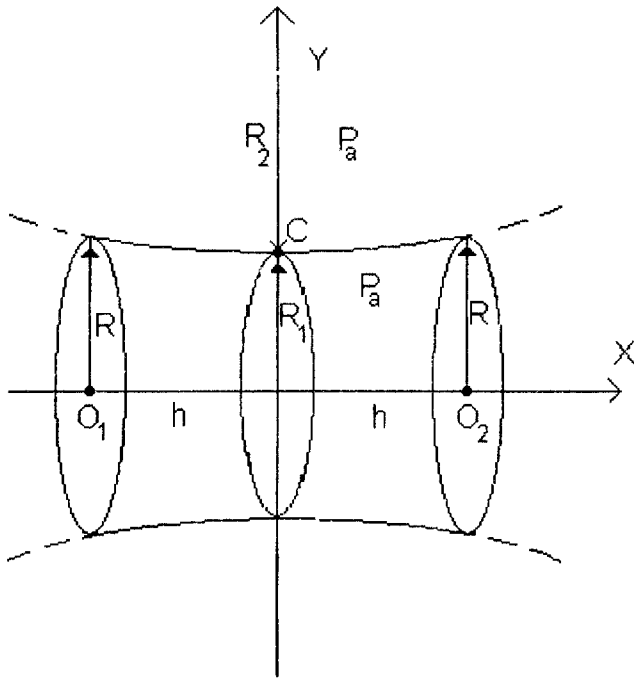


Рис. 2.

$$y = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c}\right), \quad (3)$$

где параметр  $c$  определяет расстояние вершины цепной линии от оси  $X$ . При вращении кривой (3) вокруг оси  $X$  получается осесимметричная фигура, которая называется *катеноидом*.

Форму катеноида имеет двухсторонняя жидкая пленка, натянутая на каркас из двух проволочных колечек  $O_1$  и  $O_2$  радиусами  $R$ , отстоящих на расстоянии  $2h$  друг от друга (рис 2). В этом случае константа  $c$  определяется из соотношения

$$c \operatorname{ch}\left(\frac{h}{c}\right) = R$$

Можно показать (см. [3]), что это соотношение имеет решение лишь при условии  $\frac{R}{h} > 1,51$ , то есть мыльная пленка между колечками может образоваться лишь в том случае, если расстояние между ними не превышает  $\frac{2}{1,51} R = 1,33R$ .

Катеноид – это незамкнутая фигура постоянной кривизны. Так как давление по обе стороны двухсторонней пленки одно и то же (равное атмосферному давлению  $p_a$ ), то  $\Delta p = p - p_a = 0$  и, согласно уравнению Лапласа (2), кривизна во всех точках поверхности  $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ , откуда  $R_1 = -R_2$ .

Чтобы получить газовый "пузырек", затащим колечки двухсторонними жидкими пленками. Как и поверхность катеноида, они будут иметь нулевую кривизну, то есть будут плоскими (рис 3,а)

Начнем повышать давление в таком «пузырьке». При некотором избыточном давлении боковая поверхность фигуры станет цилиндрической (рис.3,б). Т.к. кривизна на всей поверхности одна и та же, то радиус сферических торцов  $R_c$  в этом случае, согласно (1), вдвое больше радиуса  $R_{ц}$  поперечного сечения центральной части фигуры. При дальнейшем повышении давления пузырек превратится в "бочку" (рис.3,в), торцы которой по-прежнему будут представлять собой сферические сегменты. Заметим, что в точках, примыкающих к колечкам (на переходе поверхности катеноида к сферической торцевой поверхности), производная по осевому сечению пузырька терпит разрыв.

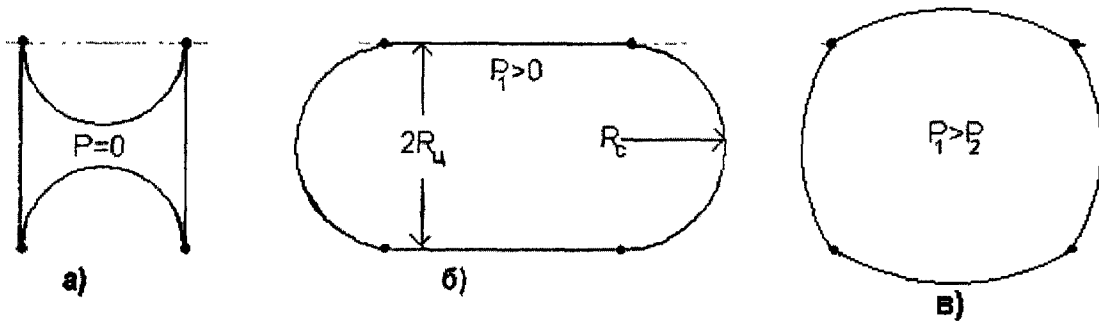


Рис. 3.

Реальные газовые пузырьки не натянуты на колечки. Боковая поверхность катеноида плавно переходит в сферическую поверхность на торцах (рис. 4). Такую фигуру будем называть *сферокатеноидом*. Условие постоянства средней кривизны по всей поверхности сферокатеноида можно записать в виде

$$H'_k = H'_c, \quad (4)$$

где  $H'_k$  – средняя кривизна в точках поверхности катеноида, а  $H'_c$  – кривизна сферической поверхности торцов пузырька. При осевом растяжении (сжатии) газовый пузырек получает осесимметричную форму, что позволяет заменить соотношение (4) равенством кривизны цепной линии и торцевой окружности на рис. 4 в точке их сопряжения (точка А), из которого следует условие

$$R_{ц} = r. \quad (5)$$

Здесь  $R_{ц}$  – радиус кривизны цепной линии в точке А, а  $r$  – радиус сферического торца фигуры. Центральная часть фигуры на рис. 4 представляет собой катеноид, образованный вращением цепной линии, аналитически представляемой зависимостью

$$y = f_1(x) = -c \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c}\right) + (c + b), \quad (6)$$

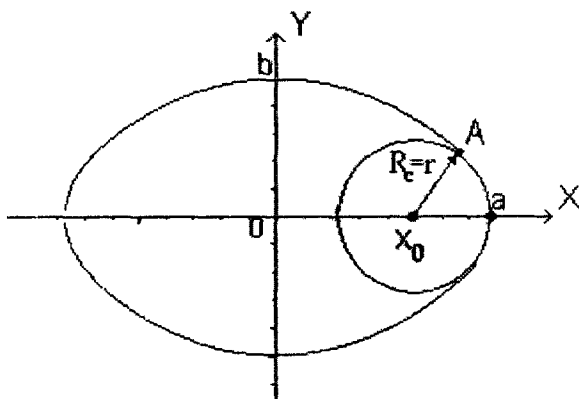


Рис. 4.

где  $b$  – малая полуось сферокатеноида. Если большая полуось фигуры –  $a$ , то эксцентриситет сферокатеноида определится

$$\text{отношением } \chi = \frac{a}{b}.$$

## ДЕФОРМАЦИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

Сечение горцевого сегмента плоскостью рис. 4 задается уравнением окружности

$$(x - x_0)^2 + y^2 = r^2,$$

где  $x_0$  - абсцисса центра окружности. Отсюда

$$y = f_2(x) = \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}.$$

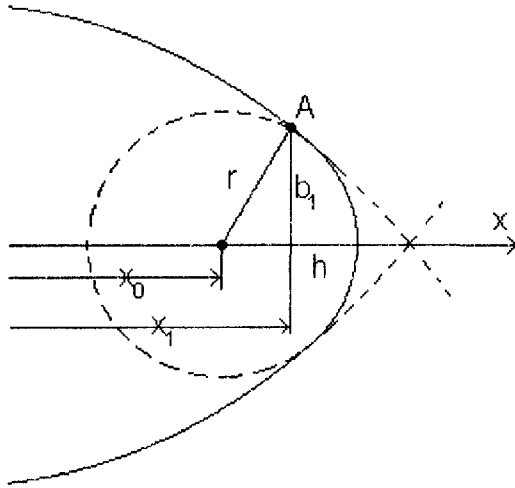


Рис. 5.

Поскольку нас интересует лишь форма пузырька, то для упрощения расчетов положим  $b = 1$ . Тогда  $\chi = a$ . Для выгнутого сферока-  
теноида в выражении (6) положим  $c = 2$ . Тогда цепная линия, образующая центральную часть сферока-  
теноида, определится уравнением

$$y = 2ch\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \quad (7)$$

На рис. 5 показано сопряжение цепной линии и торцевой окружности фигуры рис. 4. Условием сопряжения в точке  $A$  является соотношение

$$y(x_1) = b_1 \quad (8)$$

Здесь  $b_1$  - это радиус основания сферического сегмента, который находится из соотношения

$$(b_1)^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2, \quad (9)$$

где  $h$  - высота сферического сегмента.

Радиус кривизны плоской кривой  $f(x)$  в декартовых координатах определяется зависимостью [5]:

$$R = \frac{f''(x)}{\left((f'(x))^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (10)$$

Согласно этому соотношению радиус кривизны цепной линии (7)

$$r = \frac{\frac{1}{c} ch\left(\frac{x}{c}\right)}{\left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{c}\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

Из рис. 5 абсцисса точки А определяется равенством

$$x_1 = \chi - h \quad (12)$$

Уравнения (8), (9), (11) и (12) соберем в систему:

$$\begin{cases} b_1 = -cch\left(\frac{x}{c}\right) + (c + b) \\ b_1^2 = 2rh - h^2 \\ r = \frac{\frac{1}{c}ch\left(\frac{x}{c}\right)}{\left(sh^2\left(\frac{x}{c}\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \\ x_1 = \chi - h \end{cases} \quad (13)$$

Эта система имеет решение в области  $x \in (1; 2,9)$ . При  $\chi = 1$  сферокатеноид обращается в сферу радиусом  $r = 1$ . С увеличением  $\chi$  эксцентриситет фигуры растет, достигая величины  $\chi = 2,9$ , когда  $r$  обращается в нуль.

Для численного решения системы уравнений (13) зададим значение эксцентриситета фигуры  $\chi = a = 1,5$ . Решение системы (13), выполненное на ПК в математическом пакете MAPLE, дает следующие значения:

$$h = 0,2227, \quad x_1 = 1,2773, \quad b_1 = 0,5360 \quad \text{и} \quad r = 0,5447.$$

На рис. 6 контурной линией показано сечение полученного сферокатеноида.

Определим площадь поверхности и объем этого сферокатеноида. В нашем случае площадь поверхности сферокатеноида

$$S_{ск} = S_{\kappa} + 2S_c, \quad (14)$$

где  $S_{\kappa}$  – площадь центральной части фигуры (катеноида), а  $S_c$  – площадь сферического торцевого сегмента.

Поверхность фигуры вращения известной формулой (6) определяется

$$S = 2\pi \int_{-x}^x f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (15)$$

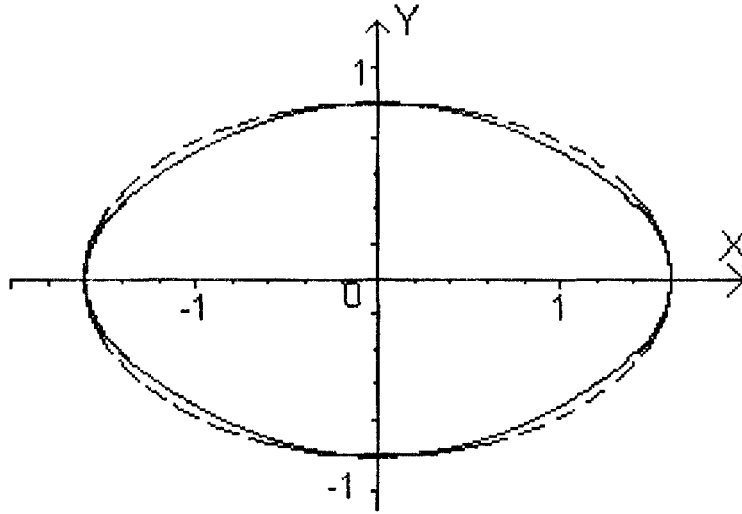


Рис. 6.

Согласно (15) площадь центральной части фигуры определится интегралом

$$S_k = 2\pi \int_{-x_1}^{x_1} f_1(x) \sqrt{1 + f_1'^2} dx = 2\pi \int_{-x_1}^{x_1} \left(-2ch\left(\frac{x}{2}\right) + 3\right) \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx,$$

численное решение которого дает значение  $S_k = 14,4950$ .

Площадь сферического торцевого сегмента вычисляется по формуле [7]

$$S_c = 2\pi rh. \quad (16)$$

Подставляя значения из ряда (\*), получим  $S_c = 2,6150$ .

Согласно (14) площадь поверхности сферокатеноида равна  $S_{ck} = 16,2100$ .

Сравним поверхность сферокатеноида с поверхностью двухосного (вытянутого) эллипсоида с тем же эксцентриситетом ( $\chi = 1,5$ ).

Поверхность вытянутого двухосного эллипсоида определяется зависимостью [8]

$$S_{\text{эл}} = 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin \chi}{\chi}, \quad (17)$$

которая при подстановке наших значений дает  $S_{\text{эл}} = 16,3240$ , что на 0,67% превышает площадь сферокатеноида.

Вычислим объем сферокатеноида:

$$V_{ck} = V_k + 2V_c, \quad (18)$$

где  $V_k$  — объем центральной части фигуры (катеноида), а  $V_c$  — объем сферического сегмента.

Объем фигуры вращения вычисляется по формуле [6]

$$V = \pi \int_{-x_1}^{x_1} f^2(x) dx. \quad (19)$$

Подставляя в эту формулу зависимость (6), получаем выражение

$$V_{\kappa} = \pi \int_{-x_1}^{x_1} f_1^2(x) dx = \pi \int_{-x_1}^{x_1} \left( 3 - 2ch\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx, \quad (20)$$

численное решение которого дает значение  $V_{\kappa} = 4,5200$ .

Объем сферического торцевого сегмента вычислим по формуле [7]

$$V_c = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right), \quad (21)$$

где  $h$  – высота сферического сегмента, а  $r$  – радиус сферы. Подстановка значений дает величину объема сферического сегмента  $V_c = 2,2960$ . Согласно (18) общий объем сферокатеноида получается равным  $V_{ck} = 6,8160$ .

Сравним полученное значение объема сферокатеноида с объемом вытянутого двухосного эллипсоида. Объем эллипсоида найдем по формуле

$$V_{эл} = \pi a^2 b, \quad (22)$$

что после подстановки чисел из ряда (\*\*) дает значение  $V_{эл} = 7,0700$ . Это на 2,2% больше объема сферокатеноида.

При сжатии сферокатеноида вдоль оси  $X$  его форма изменится (см. рис.1,а). Эксцентриситет  $\chi = \frac{a}{b}$  теперь меньше единицы. Для построения сжатого сферокатеноида примем  $\chi = 0,7$  и  $b = 1$ . Тогда, как и прежде,  $a = \chi = 0,7$ .

Система (13) остается верной и для этого случая, но цепная линия должна определяться параметром  $c < 1$ . Для расчета возьмем  $c = 0,3$ . Тогда уравнение цепной линии будет таким

$$y = 0,3ch\left(\frac{x}{0,3}\right) + 1,3 \quad (23)$$

При подстановке в систему (13) исходных данных для сжатого сферокатеноида эта система имеет решение в области  $x \in (0; 0,75)$ . Численное решение системы с помощью математического пакета MAPLE дает следующие результаты:

$$h = 0,29, \quad x_1 = 0,41, \quad b_1 = 0,64, \quad r = 0,74.$$



## ДЕФОРМАЦИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

На рис. 7 приведено осевое сечение сферокаленоида, построенного по этим параметрам.

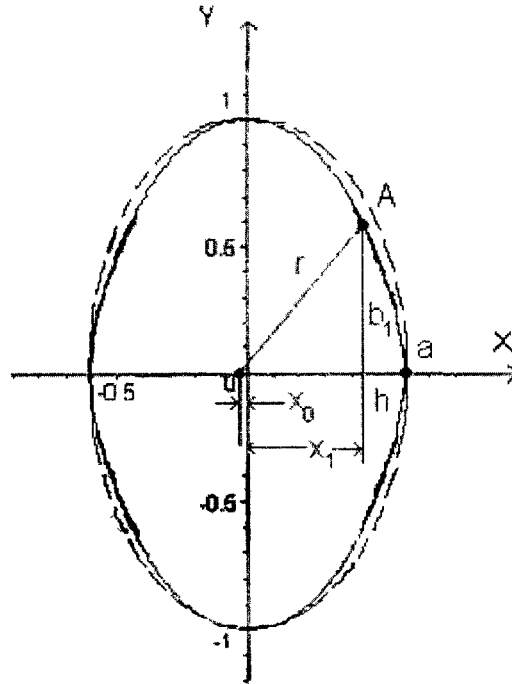


Рис. 7.

Найдем поверхность сжатого сферокаленоида. Подставляя в (6) и далее в (15) исходные данные, получим выражение

$$S_K = 2\pi \int_x^{x_1} f_1(x) \sqrt{1 + f_1'^2(x)} dx = 2\pi \int_{-x}^{x_1} \left( -0,3ch\left(\frac{x}{0,3}\right) + 1,3 \right) \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{0,3}\right)} dx,$$

численное решение которого дает значение площади средней части фигуры  $S_k = 6,0445$ .

Подставляя значения из ряда (\*\*), в (16), получим площадь поверхности сферического сегмента сферокаленоида  $S_s = 2,3550$ . Полная площадь поверхности сферокаленоида получается подстановкой этих значений в (14):  $S_{ck} = 10,7545$ .

Сравним полученную площадь с площадью поверхности сжатого двухосного эллипсоида, представленного на рис. 7 пунктирной линией. Осевое сечение двухосного эллипсоида с эксцентриситетом  $\chi = a = 0,7$  и  $b = 1$  описывается уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{0,49} + y^2 = 1, \text{ откуда } y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{0,49}}. \quad (24)$$

Подставив (24) в формулу (15), находим площадь поверхности эллипсоида –  $S_{\text{эл}} = 11,1584$ , что на 3,62% больше площади поверхности сферокаленоида.

Выражение для объема средней части сферокатеноида найдем по формуле (19), подставив в нее уравнение цепной линии (23):

$$V_k = \pi \int_{x_1}^{x_1} f_1^2(x) dx = \pi \int_{-x_1}^{x_1} \left( 1,3 - 0,3ch\left(\frac{x}{0,3}\right) \right)^2 dx$$

Численное решение этого выражения дает значение  $V_k = 1,3500$ .

Объем сферического торцевого сегмента найдем по формуле (21), подставив в нее значения из ряда (\*\*). Расчет дает объем сферического сегмента  $V_c = 0,1200$ .

Подставляя эти значения в (18), получаем полный объем сжатого сферокатеноида  $V_{ск} = 1,4700$ .

Найдем объем сжатого двухосного эллипсоида с тем же эксцентриситетом  $\chi = 0,7$ . После подстановки данных из ряда (\*\*) в (22) получаем значение  $V_{эл} = 1,5400$ , что на 1,47% больше объема сферокатеноида.

Таким образом, сравнение поверхности и объема деформированных газовых пузырьков с параметрами сходственных двухосных эллипсоидов показывает, что для многих расчетов истинную форму деформированного газового пузырька (сферокатеноида) с достаточной точностью можно аппроксимировать двухосным эллипсоидом с тем же эксцентриситетом.

### Список литературы

1. Меркин А.П., Таубе П.Р. Непрочное чудо. – М.: Химия, 1983.
2. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Т. 2 – М.: Наука, 1979.
3. Гегузин Я.Е. Пузыри. – М.: Наука (Главная редакция физико-математической литературы), 1985.
4. Фиников С.П. Дифференциальная геометрия. – М.: Изд. МГУ, 1961.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1986.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988.
7. Фильчаков П.Ф. Справочник по элементарной математике. – Киев: Наукова думка, 1973.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1966.

### DEFORMATION OF GAS BUBBLE

A.M Logvinov, K.B. Kann

Belgorod State University,  
Pobedy 85, Belgorod 308015, Russia

It is shown, that at single-axis deformations gas bubble in a liquid receives the form spherocatenoid - axisymmetrical figures (catenoid) with spherical end faces. The area and volume spherocatenoid and biaxial ellipsoid with same eccentricity differ insignificantly.