УДК 517.9

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТРУНЫ

Ю.Н. Шишмарева *

Белгородский государственный университет,
308015, г. Белгород, ул. Победы,85

Задача Римана-Гильберта в весовых классах Гельдера для системы Лаврентьева-Бицадзе изучена в [1]. В настоящей работе рассмотрен гиперболический случай этой системы, найдены условия разрешимости данной задачи.

Рассмотрим простейшую гиперболическую систему уравнений струны

$$\begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}. \tag{1}$$

Пусть область D ограничена гладкими дугами Γ_1 и Γ_2 с общими концами в точках τ_0, τ_1. Рассмотрим в этой области задачу Римана-Гильберта, определяемую краевым условием

$$(au+bv)_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} = f, \quad a^2+b^2 \neq 0, \tag{2}$$

где коэффициенты a, b непрерывны на каждой из дуг, то есть $a,b \in C(\Gamma_j)$, $j=1,2$. Предполагаем, что дуги Γ_1 и Γ_2 некасательны к характеристикам $x \pm y = const$ системы (1).

Задачу (1)-(2) отнесем к нормальному типу (I), если

$$(a-b)(t) \neq 0,\ t\in\Gamma_1,\ (a+b)(t)\neq 0,\ t\in\Gamma_2\ , \tag{I}$$

и к типу (II), если

$$(a+b)(t) \neq 0,\ t\in\Gamma_1,\ (a-b)(t)\neq 0,\ t\in\Gamma_2\ . \tag{II}$$

По определению, пару функций $u,v \in C(\overline{D}\setminus\{\tau_0,\tau_1\})$ назовем обобщенным решением системы (1), если они удовлетворяют условию

$$(u\pm v)(x,y) = const \text{ на прямых } x\mp y = const. \tag{3}$$

Будем искать обобщенное решение системы (1) в весовых классах непрерывных функций.

Пусть $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1)$ – произвольный набор вещественных чисел. Обозначим $C_\lambda(\overline{D}) = C_\lambda(\overline{D};\tau_0,\tau_1)$ класс непрерывных в $\overline{D}\setminus\{\tau_0,\tau_1\}$ функций $u(z)=u(x,y)$, $z=x+iy$ комплексной плоскости, для которых функция

$$u_0(z) = u(z)|z-\tau_0|^{-\lambda_0}|z-\tau_1|^{-\lambda_1}$$

ограничена в области D. Очевидно, это пространство банахово относительно нормы

$$|u|_{C_\lambda} = \sup_{z\in D}|u_0(z)|.$$

Аналогичный смысл имеет пространство $C_\lambda(\Gamma)$ по отношению к функциям, заданным на границе $\Gamma = \partial D$. Решение задачи (1)-(2) будем искать в классе $C_\lambda(\overline{D}) = C_\lambda(\overline{D};\tau_0,\tau_1)$.

* shishmareva@inbox.ru

Введем кригический весовой порядок $\lambda_* = (\lambda_{0*}, \lambda_{1*})$, компоненты которого определяются равенствами

$$\lambda_{0*} = -\frac{\ln|a(\tau_0)|}{\ln\left|\frac{tg\theta_2}{tg\theta_1}\right|}, \text{ если } |a(\tau_0)| \neq 0, \quad \lambda_{1*} = -\frac{\ln|a(\tau_1)|}{\ln\left|\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}\right|}, \text{ если } |a(\tau_1)| \neq 0, \tag{4}$$

где θ_k – угол наклона касательных в точках τ_k кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно к характеристике $x+y=0$. Если $a(\tau_0)=0$ ($a(\tau_1)=0$), то полагается $\lambda_{0*}=-\infty$ ($\lambda_{1*}=+\infty$).

Сформулируем теоремы о разрешимости поставленной задачи.

Теорема 1. *Задача (1)-(2) нормального типа (I) однозначно разрешима в классе $C_\lambda(\overline{D})$, если $\lambda_0 > \lambda_{0*}$ и $\lambda_1 < \lambda_{1*}$, где $\lambda_* = (\lambda_{0*}, \lambda_{1*})$ определяется (4).*

Доказательство. Рассмотрим гомеоморфизм $\alpha_1 : \Gamma_2 \to \Gamma_1$, действующий вдоль характеристик $x+y=const$. Аналогично определим гомеоморфизм $\alpha_2 : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ по отношению к $x-y=const$. Отображения α_1, α_2 непрерывно дифференцируемы и производная α' всюду отлична от нуля. Композиция определенных гомеоморфизмов – сдвиг $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$ дуги Γ_2 на себя. На внутренней части $\Gamma_2 \setminus \{\tau_0, \tau_1\}$ сдвиг α не имеет неподвижных точек, поэтому либо $\alpha(t) \in [\tau_0, t]$, либо $\alpha(t) \in [t, \tau_1]$, $\forall t \in \Gamma_2 \setminus \{\tau_0, \tau_1\}$. В первом случае сдвиг назовем левым, во втором случае – правым. Нумерацию концов τ_0, τ_1 выбираем в зависимости от вида сдвига. Заметим, что оператор $\varphi \to \varphi \circ \alpha_1$ отображает $C_\lambda(\Gamma_2)$ на $C_\lambda(\Gamma_1)$ (аналогично для α_2). Также оператор сдвига $T_\alpha \varphi = \varphi \circ \alpha$ отображает $C_\lambda(\Gamma_2)$ на себя. Этот факт следует из того, что дуги Γ_1 и Γ_2 некасательны к характеристикам.

Преобразуем граничное условие (2) к виду

$$2f = 2(au+bv) = (a+b)(u+v) + (a-b)(u-v) \tag{2'}$$

и запишем это условие на каждой из дуг Γ_k, в итоге получим систему двух уравнений

$$2f(\alpha_1(t)) = (a+b)(\alpha_1(t))(u+v)(\alpha(t)) + (a-b)(\alpha_1(t))(u-v)(t) \tag{5}$$
$$2f(t) = (a+b)(t)(u+v)(t) + (a-b)(t)(u-v)(t),$$

где учли, что
$$(u-v)(t) = (u-v)(\alpha_1(t)),\ t \in \Gamma_2$$
$$(u+v)(\alpha_1(t)) = (u+v)(\alpha(t)),\ t \in \Gamma_2.$$

Этот факт непосредственно следует из (3). Вводя обозначения:

$$f_1 = 2f(\alpha_1(t)), \quad a_1 = (a+b)(\alpha_1(t)), \quad b_1 = (a-b)(\alpha_1(t)) \tag{6}$$
$$f_0 = 2f(t), \quad a_0 = (a+b)(t), \quad b_0 = (a-b)(t),$$

систему (5) перепишем в виде

$$a_1(u+v)(\alpha(t)) + b_1(u-v)(t) = f_1 \tag{7}$$
$$a_0(u+v)(t) + b_0(u-v)(t) = f_0$$

Напомним, что задача принадлежит к типу (I). Поэтому система (7) эквивалентна уравнению

$$a_0b_1(u+v)(t) - a_1b_0(u+v)(\alpha(t)) = f_0b_1 - f_1b_0.$$

Таким образом, по отношению к функции $\varphi(t) = (u+v)(t)$, $t \in \Gamma_2$ задача (1)-(2) редуцируется к эквивалентному функциональному уравнению

$$\varphi - a\varphi \circ \alpha = g, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{a_1b_0}{a_0b_1}, \quad g = \frac{f_0b_1 - f_1b_0}{a_0b_1}$$

в пространстве $C_\lambda(\Gamma_2)$. Уравнение (8) однозначно разрешимо, если оператор $B=1-aT_\alpha$ обратим. Обратимость этого оператора следует из сформулированной ниже леммы, доказательство которой приведено в [3].

Лемма 1. *Пусть* $a\in C[\tau_0,\tau_1]$, α *– диффеоморфизм* Γ_2 *на себя, такой что* $\alpha(t)\neq t, \forall t\in\Gamma_2, \alpha(\tau_0)=0, \alpha(\tau_1)=1$, $\alpha'(\tau_0)<1<\alpha'(\tau_1)$ *(или* $\alpha'(\tau_1)<1<\alpha'(\tau_0)$*) Тогда оператор* $B=1-aT_\alpha$ *обратим в пространстве* $C_\lambda(\Gamma_2,\tau_0,\tau_1)$, *если*

$$\max\left[|\alpha'(\tau_0)|^{\lambda_0}|a(\tau_0)|, |\alpha'(\tau_1)|^{\lambda_1}|a(\tau_1)|\right]<1. \qquad (9)$$

Продолжим доказательство теоремы. Для типа (I) сдвиг $\alpha=\alpha_2\circ\alpha_1$ будет левым, то есть $\alpha(t)<t, \forall t\in\Gamma_2$, $0<\alpha'(\tau_0)<1<\alpha'(\tau_1)$. Таким образом, для разрешимости поставленной задачи необходимо выполнение условия

$$|\alpha'(k)|^{\lambda_k}|a(k)|<1, k=\tau_0,\tau_1.$$

Если $|a(k)|\neq 0$, то, заменяя знак меньше на равно и логарифмируя полученное равенство, вычисляем критический весовой порядок $\lambda_*=(\lambda_{0*},\lambda_{1*})$. Так как сдвиг левый, из (9) получаем условия:

$$|\alpha'(k)|^{\lambda_k}<|\alpha'(k)|^{\lambda_{k*}}, k=\tau_0,\tau_1.$$

Тогда, при $k=\tau_0$ неравенство эквивалентно $\lambda_0>\lambda_{0*}$, при $k=\tau_1$ – $\lambda_1<\lambda_{1*}$. Если $|a(k)|=0$, то, учитывая, что $\ln|\alpha'(\tau_0)|<0$, $\ln|\alpha'(\tau_1)|>0$, $\ln|a(k)|=-\infty$, получим $\lambda_*=(-\infty,+\infty)$.

Осталось определить значение α' в точках τ_0, τ_1 области. Так как величина производной не зависит от выбора системы координат, то рассмотрим характеристическую систему координат с началом в точке τ_0, формулы перехода к которой имеют вид: $\bar{x}=x+y$, $\bar{y}=x-y$. Тогда область D будет расположена в первой координатной четверти, кривые Γ_k задаются уравнениями $\bar{y}=g_k(\bar{x})$. Сдвиг α_2 переводит точку с координатами $(\bar{x},g_1(\bar{x}))$ дуги Γ_1 в точку $(\bar{x},g_2(\bar{x}))$ дуги Γ_2. Тогда

$$|\alpha_2'(\tau_0)|\sqrt{1+(g_1'(\tau_0))^2}=\sqrt{1+(g_2'(\tau_0))^2}.$$

Геометрически, $g_k'(\tau_0)$ – тангенс углов θ_1 и θ_2 наклона касательных кривых Γ_1 и Γ_2 в точке τ_0 к оси $\bar{x}$. Используя следствие из основного тригонометрического тождества, получаем

$$|\alpha_2'(\tau_0)|=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}.$$

Сдвиг α_1 переводит точку $(g_2^{-1}(\bar{y}),\bar{y})$ дуги Γ_2 в точку $(g_1^{-1}(\bar{y}),\bar{y})$ дуги Γ_1. Как и в предыдущем случае получаем

$$|\alpha_1'(\tau_0)|=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}.$$

Окончательно,

$$|\alpha'(\tau_0)|=|\alpha_2'(\tau_0)|\cdot|\alpha_1'(\tau_0)|=\frac{tg\theta_2}{tg\theta_1}.$$

В (4) эту величину берем по модулю, так как выбираем любой из углов, которые образуют касательные к кривым Γ_1, Γ_2 с характеристикой $x+y=0$.

Аналогично заключаем, что $|\alpha'(\tau_1)| = \dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Задача (1)-(2) нормального типа (II) однозначно разрешима в классе $C_\lambda(\overline{D})$, если $\lambda_0 < \lambda_{0*}$ и $\lambda_1 > \lambda_{1*}$, где $\lambda_* = (\lambda_{0*}, \lambda_{1*})$ определяется (4).*

Доказательство. Рассуждая как при доказательстве теоремы 1 заключаем, что поставленная задача редуцируется к эквивалентному функциональному уравнению

$$\varphi \circ \alpha - a^* \varphi = g^*, \qquad (10)$$

где

$$a^* = \frac{a_0 b_1}{a_1 b_0} = \frac{1}{a}, \qquad g^* = \frac{f_1 b_0 - f_0 b_1}{a_1 b_0},$$

которое разрешимо, если обратим оператор $B^* = T_\alpha - a^*$. По той же лемме этот оператор обратим, если $a^* \neq 0$, то $B^* = -a^*(1 - aT_\alpha)$. В рассматриваемом случае задачи типа (II) сдвиг будет правым, т.е. $\alpha(t) > t, \forall t \in \Gamma_2$, $\alpha'(\tau_1) < 1 < \alpha'(\tau_0)$. С учетом этого факта на основании леммы 1 (как и выше) получаем необходимое условие разрешимости задачи.

Литература

1. Солдатов, А.П. Задача Римана-Гильберта для системы Лаврентьева-Бицадзе / А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения, 1998. – Т.34, №12.
2. Солдатов, А.П. Оценка спектрального радиуса функциональных операторов / А.П. Солдатов // Неклассич. ур-ния мат. физики – Новосибирск, 2005.
3. Солдатов, А.П. Алгебра сингулярных операторов / А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения, 2001. – Т.37, №10.

RIEMANN-HILBERT PROBLEM FOR SYSTEM OF STRING EQUATIONS

Y.Shishmareva

Belgorod State University, Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia

Riemann-Hilbert problem for the Lavrent'ev-Bitsadze system is studied in [1]. In the paper the hyperbolic case of this system is considered. The solvability conditions of the Riemann-Hilbert problem are given.