УДК 517.983

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ю.В. Богачева[1], А.В. Глушак[2*]

[1] Воронежский государственный технический университет,
г. Воронеж, Московский проспект, 179

[2] Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14[1]

В настоящей работе установлена равномерная корректность задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с неограниченным оператором A.

Пусть $M_k^{\alpha,\beta}$ – дифференциальный оператор вида $M_k^{\alpha,\beta} = D^{\alpha}\left(t^k D^{\beta}\right)$, содержащий левосторонние дробные производные Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$ (см. [1, с. 84])

$$D^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds\,, \qquad t \in (0,+\infty),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши с линейным замкнутым оператором A

$$M_k^{\alpha,\beta}u(t) = t^{\gamma}Au(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0, \qquad \lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}\left(t^k D^{\beta}u(t)\right) = 0\,, \tag{2}$$

где

$$D^{\beta-1}u(t) = I^{1-\beta}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}u(s)ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\beta$.

Специфика постановки начальных условий (2) состоит в том, что суммарный порядок производных, по сравнению с уравнением (1), уменьшается сначала на 1 в одном условии, а потом уменьшается еще на α в другом.

Под решением задачи (1), (2) понимается сильно непрерывная при $t > 0$ функция $u(t)$, такая, что $I^{1-\beta}u(t)$ и $I^{1-\alpha}\left(t^k D^{\beta}u(t)\right)$ представляют собой сильно непрерывно дифференцируемые при $t > 0$ функции, функция $u(t)$ принимает значения из $D(A)$ и удовлетворяет (1), (2).

В работе [2] установлена равномерная корректность задачи (1), (2) с ограниченным оператором A и приводится критерий равномерной корректности для задачи с неограниченным оператором A в случае $k = \gamma = 0$.

В настоящей работе изучается разрешимость задачи (1), (2) с неограниченным оператором A в случае $k = \gamma = 1$. Таким образом, мы рассмотрим уравнение с дробными производными и переменными коэффициентами

*glushak@bsu.edu.ru

$$D^{\alpha}\left(tD^{\beta}u(t)\right)=tAu(t), \qquad t>0 \tag{3}$$

и начальными условиями вида

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t)=u_0, \quad \lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}\left(tD^{\beta}u(t)\right)=0. \tag{4}$$

Достаточно обширный обзор имеющихся к настоящему времени публикаций по уравнениям с дробными производными можно найти в [3].

1. Случай $\alpha+\beta<1$.

Предположим, что оператор A является производящим оператором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t)$. Пусть решение $u(t)$ задачи (3), (4) существует при любых $u_0 \in D(A)$, и при этом

$$\|u(t)\| \le M\, t^{\nu} e^{\omega t}, \tag{5}$$

где $M>0$, $\nu>-1$, $\omega \in R$.

В этом случае преобразование Лапласа $U(\lambda)$ решения $u(t)$ существует при $\operatorname{Re}\lambda^{\alpha+\beta}>\omega$, удовлетворяет равенству

$$\lambda^{\alpha+\beta}\, U'(\lambda)+\beta\, \lambda^{\alpha+\beta-1}\, U(\lambda)=AU'(\lambda),$$

и, следовательно, имеет вид:

$$U(\lambda)=R^{\beta/(\alpha+\beta)}\left(\lambda^{\alpha+\beta}\right)u_0, \tag{6}$$

где $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$, а дробная степень резольвенты определена равенством (см. [4])

$$R^{\delta}(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{\infty} t^{\delta-1}e^{-\lambda t}T(t)\,dt, \qquad \delta>0. \tag{7}$$

Таким образом, учитывая (6) и (7), получим

$$U(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))}\int_0^{\infty} t^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\exp\left(-t\lambda^{\alpha+\beta}\right)T(t)u_0\,dt. \tag{8}$$

Впрочем, в том, что определяемая равенством (8) функция $U(\lambda)$ является искомым решением, можно убедиться и непосредственной проверкой. В дальнейшем воспользуемся введенной в [5, с. 357] функцией

$$f_{t,\gamma}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp\left(\tau z-tz^{\gamma}\right)dz & \text{при} \quad \tau\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad \tau<0,\end{cases}$$

где $\sigma>0$, $t>0$, $0<\gamma<1$ и ветвь функции z^{γ} выбрана так, что $\operatorname{Re}z^{\gamma}>0$ при $\operatorname{Re}z>0$.

Поскольку (см. [5, с. 358]) имеет место представление

$$\exp\left(-t\lambda^{\gamma}\right)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} f_{t,\gamma}(\tau)\,d\tau,$$

при $t>0$, $\lambda>0$, $0<\gamma<1$, то равенство (8) запишем в виде

$$U(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))}\int_0^{\infty} t^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} f_{t,\alpha+\beta}(\tau)\,d\tau\right)T(t)u_0\,dt. \tag{9}$$

Если в интеграле, определяющем функцию $f_{t,\alpha+\beta}(\tau)$, перейти от интегрирования по прямой $z=\sigma>0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z=re^{-i\Theta}$ и $z=re^{i\Theta}$, где

$0 < r < \infty$, $(\alpha+\beta)\Theta < \pi/2 < \Theta$, то при $\tau > 0$ для функции $f_{t,\alpha+\beta}(\tau)$ получится представление

$$f_{t,\alpha+\beta}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(\tau s\cos\Theta - ts^{\alpha+\beta}\cos(\alpha+\beta)\Theta\right) \times$$
$$\times \sin\left(\tau s\sin\Theta - ts^{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)\Theta + \Theta\right)ds. \tag{10}$$

Учитывая (9) и (10), оценим $U^{(n)}(\lambda)$. Имеем

$$\left\|U^{(n)}(\lambda)\right\| \le M_1\|u_0\| \int_0^\infty t^{-\alpha/(\alpha+\beta)}dt \times$$
$$\times \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau\operatorname{Re}\lambda}d\tau \int_0^\infty \exp\left(\tau s\cos\Theta - ts^{\alpha+\beta}\cos(\alpha+\beta)\Theta\right)ds =$$
$$= M_1\|u_0\| \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau\operatorname{Re}\lambda}d\tau \int_0^\infty \exp(\tau s\cos\Theta)ds \int_0^\infty t^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\exp\left(-ts^{\alpha+\beta}\cos(\alpha+\beta)\Theta\right)dt =$$
$$= M_2\|u_0\| \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau\operatorname{Re}\lambda}d\tau \int_0^\infty s^{-\beta}\exp(\tau s\cos\Theta)ds = M_3\|u_0\| \int_0^\infty \tau^{n-1+\beta}e^{-\tau\operatorname{Re}\lambda}d\tau =$$
$$= \frac{M_4\|u_0\|\Gamma(n+\beta)}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+\beta}}. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение функцию $U_\beta(\lambda) = \lambda^{\beta-1}U(\lambda)$. Оценка функции $U_\beta(\lambda)$ содержится в следующей лемме.

Лемма. Пусть $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $0 < \beta < 1$ и функция $U^{(n)}(\lambda)$ для любого $n \ge 0$ удовлетворяет неравенству (11). Тогда функция $U_\beta(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|U_\beta^{(n)}(\lambda)\right\| \le \frac{M_0\|u_0\|n!}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}}. \tag{12}$$

Доказательство. Используя формулу Лейбница, неравенство (11) и свойства бета-функции, получим

$$\left\|U_\beta^{(n)}(\lambda)\right\| = \left\|\sum_{j=0}^n C_n^j\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{n-j}\lambda^{\beta-1}\frac{d^j}{d\lambda^j}U(\lambda)\right\| =$$
$$= \left\|\sum_{j=0}^n C_n^j(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n+j)\lambda^{\beta-1-n+j}U^{(j)}(\lambda)\right\| \le \frac{M_5\|u_0\|}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}}\sum_{j=0}^n C_n^j\frac{\Gamma(\beta+j)\Gamma(n-j-\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)} =$$
$$= \frac{M_5\|u_0\|\Gamma(n+1)}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}\Gamma(1-\beta)}\sum_{j=0}^n C_n^j B(\beta+j, n-j-\beta+1) =$$
$$= \frac{M_5\|u_0\|n!}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}\Gamma(1-\beta)}\int_0^1\sum_{j=0}^n C_n^j x^{\beta+j-1}(1-x)^{n-j-\beta}dx =$$
$$= \frac{M_5\|u_0\|n!}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}\Gamma(1-\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{n-\beta}\sum_{j=0}^n C_n^j x^j(1-x)^{-j}dx =$$

$$=\frac{M_5\|u_0\|n!}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}\Gamma(1-\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{n-\beta}\left(\frac{x}{1-x}+1\right)^n dx=\frac{M_0\|u_0\|n!}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}},$$

и тем самым лемма доказана.

Предположим далее, что банахово пространство E обладает свойством Радона-Никодима (см. [6]). Например, рефлексивные банаховы пространства обладают этим свойством, а пространства $L_1(0,1)$ и C_0 не обладают. Тот факт, что банахово пространство E обладает свойством Радона-Никодима, будем в дальнейшем записывать в виде $E=E_{RN}$.

Оценка (12) в банаховом пространстве $E=E_{RN}$ и результаты работы [7] позволяют по функции $U_\beta(\lambda)$ найти оригинал и, тем самым, по дробной степени резольвенты $R(\lambda^{\alpha+\beta})$ построить решение задачи (3), (4) в виде

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}D^{1-\beta}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\lambda^{\beta-1}R^{\beta/(\alpha+\beta)}\left(\lambda^{\alpha+\beta}\right)u_0d\lambda,\qquad \sigma>0,\tag{13}$$

где $R^\delta(\mu)$ определяется равенством (7).

Отметим, что в частном случае $\alpha+\beta=1/2$ из (8) и равенства

$$\int_0^\infty t^{-3/2}\exp\left(-\lambda t-\tau^2/(4t)\right)dt=\frac{2\sqrt{\pi}}{\tau}e^{-\sqrt{\lambda}\tau},\qquad \operatorname{Re}\lambda>0,\quad \tau>0$$

уже в произвольном банаховом пространстве E и для любой C_0-полугруппы получим представление решения

$$u(t)=\frac{1}{2\Gamma(2\beta)\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t}}\int_0^\infty \tau^{1-2\alpha}\exp\left(-\tau^2/(4t)\right)T(\tau)u_0d\tau.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha+\beta<1$, $E=E_{RN}$, оператор A является производящим оператором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t)$, $u_0\in D(A)$. Тогда задача (3), (4) в классе функций, удовлетворяющих неравенству (5), имеет единственное решение, которое определяется равенством (13).

Доказательство. Проверим, что определяемая равенством (13) функция $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (4). Пусть вначале $u_0\in D(A^m)$ и m – достаточно большое натуральное число. Запишем формулу Тейлора для C_0-полугруппы (см. [8], п. 2.1.19)

$$T(\tau)u_0=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\tau^j}{j!}A^ju_0+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^\tau(\tau-s)^{m-1}T(s)A^mu_0ds.\tag{14}$$

Тогда из (14), (7) и (13) будем иметь

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))}D^{1-\beta}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\lambda^{\beta-1}d\lambda\int_0^\infty\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\tau^{j-\alpha/(\alpha+\beta)}\exp\left(-\tau\lambda^{\alpha+\beta}\right)}{j!}A^ju_0d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))}D^{1-\beta}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\lambda^{\beta-1}d\lambda\int_0^\infty\tau^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\exp\left(-\tau\lambda^{\alpha+\beta}\right)d\tau\times$$

$$\times\int_0^\tau(\tau-s)^{m-1}T(s)A^mu_0ds=\frac{1}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\Gamma(j+\beta/(\alpha+\beta))t^{j(\alpha+\beta)+\beta-1}}{j!\Gamma(j(\alpha+\beta)+\beta)}A^ju_0+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}t^{\beta-1}\lambda^{\beta-1}E_{1,\beta}(\lambda t)d\lambda\ \times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\exp\left(-\tau\lambda^{\alpha+\beta}\right)d\tau\int\limits_{0}^{\tau}(\tau-s)^{m-1}T(s)A^m u_0 ds, \qquad (15)$$

где $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Из представления (15) вытекает справедливость начальных условий (4) для $u_0 \in D(A^m)$, а в силу плотности $D(A^m)$ в $D(A)$ – и для $u_0 \in D(A)$.

Справедливость равенства (3) устанавливается применением преобразования Лапласа. Поскольку фактически вначале мы и определили преобразование Лапласа $U(\lambda)$ решения $u(t)$, нам осталось доказать единственность решения задачи (3), (4) в классе функций, удовлетворяющих оценке (5).

Предположим противное. Пусть $u_0(t)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевым условиям (4). Тогда его преобразование Лапласа $U_0(\lambda)$ имеет вид

$$U_0(\lambda)=R^{\alpha/(\alpha+\beta)}\left(\lambda^{\alpha+\beta}\right)C_0, \qquad C_0 \in D(A),$$

и, следовательно,

$$u_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}R^{\beta/(\alpha+\beta)}\left(\lambda^{\alpha+\beta}\right)C_0 d\lambda, \qquad \sigma>0.$$

Так же как и при проверке начальных условий (4) устанавливается равенство $\lim\limits_{t\to 0}D^{\beta-1}u_0(t)=C_0$ и, в силу предположения, $C_0=0$. Стало быть $u_0(t)\equiv 0$, и единственность решения тем самым установлена. Теорема доказана.

2. Случай $\alpha+\beta=1$.

В произвольном банаховом пространстве E и для любой C_0-полугруппы из (8) следует представление для решения задачи (3), (4)

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}T(t)u_0. \qquad (16)$$

Теорема 2. Пусть $\alpha+\beta=1$, оператор A является производящим оператором C_0-полугруппы $T(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда задача (3), (4) имеет единственное решение, которое определяется равенством (16).

Доказательство. Естественно для доказательства можно было бы использовать схему доказательства теоремы 1, но в данном случае, учитывая равенства

$$D^{\alpha}D^{\beta}u=\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}D^{1-\alpha}u=\frac{d}{dt}\left(u(t)-\frac{I^{\alpha}u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}\right)=u'(t)+\frac{\alpha u_0}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha+1}},$$

$$D^{\alpha-1}D^{\beta}u=I^{1-\alpha}D^{1-\alpha}u=u(t)-\frac{I^{\alpha}u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}},$$

$$D^{\alpha}\left(tD^{\beta}u\right)=tD^{\alpha}D^{\beta}u+\alpha D^{\alpha-1}D^{\beta}u=tu'(t)+\alpha u(t),$$

задачу (3), (4) можно записать в виде

$$u'(t)+\frac{\alpha}{t}u(t)=Au(t), \qquad t>0 \qquad (17)$$

$$\lim_{t\to 0}D^{-\alpha}u(t)=u_0, \qquad (18)$$

при этом второе условие в (4) выполняется автоматически. Единственным решением задачи (3), (4) является функция (16). Теорема доказана.

3. Случай $1 < \alpha + \beta < 2$.

Предположим, что оператор A таков, что при $k \ge 0$ равномерно корректна следующая задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$w''(t) + \frac{k}{t} w'(t) = Aw(t), \quad t > 0, \tag{19}$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = 0. \tag{20}$$

Множество таких операторов A обозначим через G_k, а разрешающий оператор задачи Коши (19), (20) обозначим через $Y_k(t)$. Операторная функция $Y_k(t)$ введена автором в [9] и названа операторной функцией Бесселя (ОФБ). В этой же работе приводятся условия равномерной корректности задачи (19), (20) и свойства ОФБ $Y_k(t)$. При $k = 0$ мы получаем косинус-оператор функцию.

Таким образом, если $A \in G_k$, то решение задачи (19), (20) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных, при этом $w(t) = Y_k(t)\, w_0$, $w_0 \in D(A)$ и

$$\|Y_k(t)\| \le Me^{\omega t}, \quad M \ge 1, \quad \omega \ge 0. \tag{21}$$

В дальнейшем будем считать, что $E = E_{RN}$, и будем предполагать, что ОФБ $Y_k(t)$ равномерно ограничена, т.е. в неравенстве (21) $\omega = 0$.

Оператор $A \in G_k$ является (см. [9]) производящим оператором C_0-полугруппы $T(t)$, которая выражается через ОФБ $Y_k(t)$ по формуле

$$T(t) = \frac{t^{-(k+1)/2}}{2^k \Gamma((k+1)/2)} \int_0^\infty s^k \exp\left(-s^2/(4t)\right) Y_k(s) u_0 ds, \tag{22}$$

поэтому из (7) и (22) мы получаем следующее представление для дробной степени резольвенты:

$$R^\sigma(\lambda) = \frac{2^{(3-k)/2-\delta} \lambda^{(k+1)/4-\delta/2}}{\Gamma(\delta)\Gamma(k+1/2)} \int_0^\infty t^{(k-1)/2+\delta} K_{(k+1)/2-\delta}\left(\sqrt{\lambda} t\right) Y_k(t) dt, \tag{23}$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда.

С помощью равенства (23), как и в пункте 1, будем иметь

$$U(\lambda) = \frac{2^{(3-k)/2-\beta/(\alpha+\beta)} \lambda^{((k+1)/4-\beta/(2\alpha+2\beta))(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))\Gamma(k+1/2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{(k-1)/2+\beta/(\alpha+\beta)} K_{(k+1)/2-\beta/(\alpha+\beta)}\left(\lambda^{(\alpha+\beta)/2} t\right) Y_k(t) dt. \tag{24}$$

Учитывая интегральное представление функции Макдональда

$$K_{\nu-1/2}(pt) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{p}{2t}\right)^{\nu-1/2} \int_t^\infty \left(x^2 - t^2\right)^{\nu-1} e^{-px} dx, \quad \nu > 0, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

с помощью функции (см. п. 1) $f_{x,\gamma}(\tau)$ из (24) получим

$$V(\lambda) \equiv \lambda^{\beta-(k+1)(\alpha+\beta)/2} U(\lambda) = \frac{2^{(3-k)/2-\beta/(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\beta/(\alpha+\beta))\Gamma(k+1/2)} \int_0^\infty t^{(k-1)/2+\beta/(\alpha+\beta)} Y_k(t) u_0 dt \quad \times$$

$$\times \quad \frac{\sqrt{\pi}(2t)^{\beta/(\alpha+\beta)-(k+1)/2}}{\Gamma(k/2-\beta/(\alpha+\beta)+1)} \int_t^\infty \left(x^2 - t^2\right)^{k/2-\beta/(\alpha+\beta)} dx \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f_{x,(\alpha+\beta)/2}(\tau) d\tau. \tag{25}$$

Заменив в равенстве (10) $\alpha+\beta$ на $(\alpha+\beta)/2$ при $0\le k<2/(\alpha+\beta)-1$, из (25) выводим оценку

$$\left\|V^n(\lambda)\right\|\le M_1\|u_0\|\int_0^\infty t^{(\beta-\alpha)/(\alpha+\beta)}dt\int_t^\infty\left(x^2-t^2\right)^{k/2-\beta/(\alpha+\beta)}dx\quad\times$$

$$\times\int_0^\infty \tau^n\exp(-\tau\operatorname{Re}\lambda)d\tau\int_0^\infty\exp\left(\tau s\cos\Theta-xs^{(\alpha+\beta)/2}\cos(\alpha+\beta)\Theta/2\right)ds=$$

$$=M_2\|u_0\|\int_0^\infty t^{(\beta-\alpha)/(\alpha+\beta)}dt\quad\times$$

$$\times\quad\int_0^\infty \tau^n\exp(-\tau\operatorname{Re}\lambda)d\tau\int_0^\infty\exp(\tau s\cos\Theta)\left(\frac{t}{s^{(\alpha+\beta)/2}}\right)^{(k+1)/2-\beta/(\alpha+\beta)}\quad\times$$

$$\times\quad K_{(k+1)/2-\beta/(\alpha+\beta)}\left(ts^{(\alpha+\beta)/2}\cos(\alpha+\beta)\Theta/2\right)ds=M_3u_0\int_0^\infty\tau^n e^{-\tau\operatorname{Re}\lambda}d\tau\quad\times$$

$$\times\quad\int_0^\infty s^{\beta/2-(k+1)(\alpha+\beta)/4+\alpha/2-(k+1)(\alpha+\beta)/4-(\alpha+\beta)/2}\exp(\tau s\cos\Theta)ds=$$

$$=M_4\|u_0\|\int_0^\infty\tau^{n-1+(k+1)(\alpha+\beta)/2}\exp(-\tau\operatorname{Re}\lambda)d\tau=\frac{M_4\Gamma(n+(k+1)(\alpha+\beta)/2)\|u_0\|}{(\operatorname{Re}\lambda)^{(k+1)(\alpha+\beta)/2+n}}.\tag{26}$$

Пусть $\mu=(k+1)(\alpha+\beta)/2<1$ и $V(\lambda)=\lambda^{\beta-\mu}U(\lambda)$, $V_\mu(\lambda)=\lambda^{\mu-1}V(\lambda)$, тогда в силу леммы п. 1 функция $V_\mu^{(n)}(\lambda)=U_\beta^{(n)}(\lambda)$ удовлетворяет неравенству (12). Повторяя рассуждения п. 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $1<\alpha+\beta<2$, $0\le k<2/(\alpha+\beta)-1$, $E=E_{RN}$, $A\in G_k$, $Y_k(t)$ равномерно ограничена, $u_0\in D(A)$. Тогда задача (3), (4) в классе функций, удовлетворяющих неравенству (5), имеет единственное решение, которое задается формулой (13), при этом дробная степень резольвенты определяется равенством (23).

4. Замечание о равномерной корректности задачи с дробной производной.

В работе [10] приводится критерий равномерной корректности задачи типа Коши вида

$$D^\alpha v(t)=Av(t),\quad t>0,\quad 0<\alpha<1,\tag{27}$$

$$\lim_{t\to0}D^{\alpha-1}v(t)=v_0\in D(A),\tag{28}$$

который состоит в том, что при $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ λ^α принадлежит резольвентному множеству оператора A, и для всех целых $n\ge0$ справедливо неравенство

$$\left\|\frac{d^nR(\lambda^\alpha)}{d\lambda^n}\right\|\le\frac{M\Gamma(n+\alpha)}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{n+\alpha}}.\tag{29}$$

При этом для любого $x\in E$

$$R(\lambda^\alpha)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)xdt,\tag{30}$$

где $T_\alpha(t)$ – разрешающий оператор задачи (27), (28), удовлетворяет оценке

$$\|T_\alpha(t)\| \le M_0 t^{\alpha-1} e^{\omega t}, \quad M_0 \ge 1, \quad \omega \in R. \tag{31}$$

Если в оценке (31) $\omega \le 0$, то аналогично доказательству неравенства (11) можно получить оценку вида (29) для произвольных $R(\mu^\delta)$, при $\delta < \alpha$, и тем самым установить равномерную корректность и задачи (27), (28) при замене α на $\delta < \alpha$, но с тем же оператором A. Действительно, учитывая (30), (31), при $\gamma = \delta / \alpha$, будем иметь

$$R(\mu^\delta)x = \int_0^\infty \exp(-\mu^\gamma t) T_\alpha(t)x\,dt = \int_0^\infty T_\alpha(t)x\,dt \int_0^\infty e^{-\tau\mu} f_{t,\gamma}(\tau)d\tau,$$

$$\left\| \frac{d^n R(\mu^\delta)x}{d\mu^n} \right\| \le M_1 \|x\| \int_0^\infty t^{\alpha-1}dt \int_0^\infty \tau^n \exp(-\tau \operatorname{Re}\mu)d\tau \int_0^\infty \exp(\tau s \cos\Theta - ts^\gamma \cos\gamma\Theta)ds =$$

$$= M_2 \|x\| \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau \operatorname{Re}\mu} d\tau \int_0^\infty s^{-\delta} e^{\tau s \cos\Theta} ds = M_3 \|x\| \int_0^\infty \tau^{n-1+\delta} e^{-\tau \operatorname{Re}\mu} d\tau = \frac{M_4 \Gamma(n+\delta)\|x\|}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+\delta}},$$

что и доказывает равномерную корректность задачи (27), (28) при замене α на $\delta < \alpha$.

Разрешающий оператор этой задачи имеет вид:

$$T_\delta(t)v_0 = D^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\delta-1} e^{\lambda t} R(\lambda^\delta) v_0 d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty T_\alpha(\tau)v_0 d\tau\, D^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\delta-1} \exp(\lambda t - \lambda^\gamma \tau) v_0 d\lambda = \int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(t) T_\alpha(\tau) v_0 d\tau. \tag{32}$$

В частном случае $\gamma = \delta/\alpha = 1/2$ имеем $f_{\tau,1/2}(t) = \frac{\tau}{2t\sqrt{\pi t}} \exp(-\tau^2/(4t))$, и равенство (32) принимает вид $T_{\alpha/2}(t)v_0 = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \tau \exp(-\tau^2/(4t)) T_\alpha(\tau) v_0 d\tau$.

Сформулированное замечание дополняет теорему 4 из [10].

Работа второго автора поддержана РФФИ, проект № 06-08-96312.

Литература

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987.

2. Глушак, А.В. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А.В. Глушак // Математические заметки, 2005. – Т. 77. – Вып. 1. – С. 28-41.

3. Псху, А.В. К теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А.В. Псху. – Нальчик, 2005.

4. Fattorini, H.O. A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions. Pacific J. Math. 1983. V. 109, № 2. P. 335-347.

5. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967.

6. Diestel J, Uhl J.J. Vector Measures. A. Math. Soc., Providence, Rhode Island. 1977.

7. Arendt W. Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems. Israel J. Math, 1987. – V. 59. – P. 327-352.

8. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Математ. анализ. ВИНИМ, 1990. – Т. 28. – С. 87-102.

9. Глушак, А.В. Операторная функция Бесселя / А.В. Глушак. // ДАН. 1997. – Т. 352, № 5. – С. 587-589.

10. Глушак А.В. Spectral and evolution problems / А.В. Глушак, Ю.В. Поваляева. – Simferopol, 2004. – V. 14. – С. 163-172.

ABOUT SOLVABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

Yu.V. Bogacheva[1], A.V. Glushak[2],

[1] Voronezh State Technical University, Moscowskiy avenue, 179, Voronezh, Russia

[2] Belgorod State University, Studencheskaja St. 14, Belgorod, 308007, Russia

In this article established a uniform correctness problem such as Cauchy for abstract differential equation with fractional derivative for unlimited operator *A*.