УДК 517.9

НЕОДНОРОДНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Н.А. Малахова*

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая,14

Изложена процедура сведения неоднородного эллиптического уравнения n-го порядка к эллиптической системе неоднородных уравнений 1-го порядка. Как следствие дано выражение для фундаментального решения исходного уравнения.

Рассмотрим неоднородное эллиптическое уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} - a_n \frac{\partial^n u}{\partial y^{n-1}\partial x} - \ldots - a_1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = f \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами $a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{C}$. Под его решением в области D понимается комплексная функция $u \in C^n(D)$, обращающая (1) в тождество. Напомним, что по определению эллиптичности многочлен

$$P(z) = z^n - (a_1 + \ldots + a_n z^{n-1}) \qquad (2)$$

не имеет вещественных корней.

Как известно [1], частное решение $u \in C^n(D)$ уравнения (1) можно получить с помощью фундаментального решения $E(z)$ по формуле

$$u(z) = \int_C f(t)E(t-z)dt_1dt_2 .$$

В настоящей работе предлагается другой подход к получению решения этого вида, основанный на редукции уравнения (1) к системе уравнений 1-го порядка. Относительно функции f будем предполагать, что она удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ и имеет компактный носитель, т. е. $f \in C^{0,\mu}(C)$.

С функцией u свяжем n-вектор $U = u^{(n-1)}$, составленный из ее частных производных *(n-1)*-го порядка:

$$U = \left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-2}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}} \right).$$

Очевидно, он удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{\partial U_{j+1}}{\partial x}, \qquad 1 \le j \le n-1.$$

Совместно с уравнением (1) отсюда для U получаем эллиптическую систему уравнений первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} = F, \qquad (3)$$

где положено

* NMalakhova@bsu.edu.ru

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что собственные значения матрицы A совпадают с корнями многочлена (2), и, следовательно, не являются вещественными. Поэтому для всякого комплексного числа $z = x + yi \neq 0$ матрица

$$z_A = x \cdot 1 + y \cdot A$$

обратима.

Известно [2], что матрица-функция $\frac{1}{2\pi i} z_A^{-1}$ является фундаментальным решением системы (3), поэтому функция

$$U = TF\ , \quad (TF)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (t-z)_A^{-1} F(t) dt_1 dt_2$$

является решением этой системы. Известно также, что оператор T переводит функции $g \in C^{0\,\mu}(C)$ с компактным носителем, в функции $G \in C^{1,\mu}(C)$.

Выпишем в явном виде матрицу в подынтегральном выражении оператора T:

$$(t-z)_A = (t_1 - x) + (t_2 - y)A = \begin{pmatrix} t_1 - x & t_2 - y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 - x & t_2 - y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(t_2 - y) & a_2(t_2 - y) & a_3(t_2 - y) & \dots & (t_1 - x) + a_n(t_2 - y) \end{pmatrix}.$$

Определитель ее вычисляется по формуле

$$(t_1 - x)^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i (t_1 - x)^{i-1} (t_2 - y)^{n-(i-1)}.$$

Так как $F_j = \delta_{jn} f$, $1 \le j \le n$, то в рассматриваемой матрице $(t-z)_A^{-1}$ нас интересует только последний столбец. Легко показать, что он имеет вид

$$\left(\frac{(-1)^{n+j}(t_1 - x)^{j-1}(t_2 - y)^{n-j}}{(t_1 - x)^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k (t_1 - x)^{k-1}(t_2 - y)^{n-(k-1)}} \right)_{j=1}^{n}.$$

Подставляя, получаем

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-j} \partial y^{j-1}} = (Sf)_j,$$

$$(Sf)_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(-1)^{n+j}(t_1 - x)^{j-1}(t_2 - y)^{n-j}}{(t_1 - x)^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k (t_1 - x)^{k-1}(t_2 - y)^{n-(k-1)}} f(t) dt_1 dt_2 \tag{4}$$

Формула (4) дает выражение частных производных $(n-1)$-го порядка искомой функции u через известную функцию f.

Теперь, зная выражения для производных $\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-j} \partial y^{j-1}}$, $j = 1, \dots, n$, остается только найти функцию $u(z)$, представляющую собой решение уравнения (1), т.е. выписать в явном виде оператор I_n, такой что

$$u = I_n U.$$

Имеет место лемма.

Лемма1. Пусть в односвязной области D заданы функции $h_i \in C^k(D)$, $k \geq 1, n \geq 2$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_2} = \frac{\partial h_{i+1}}{\partial x_1}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Тогда существует единственная функция $u \in C^{n+k-1}(D)$, такая, что

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1^{n-i} \partial x_2^{i-1}} = h_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

и в некоторой фиксированной точке $a \in D$

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k+1-i} \partial x_2^{i-1}}(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, k+1, \quad 0 \leq k \leq n-2.$$

Доказательство. Проведем методом математической индукции:

1. Для n=2 доказательство очевидно

$$u(x) = \int_a^x h_1(y)dy_1 + h_2(y)dy_2 = I(h_1, h_2)(x) \in C^{k+1}.$$

2. Предположим, что утверждение леммы справедливо для (n-1).
3. Докажем его справедливость для n.

Обозначим $g_i = I(h_i, h_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$. Очевидно, $g_i \in C^{k+1}(D)$ и

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_2} = h_{i+1}, \quad \frac{\partial g_{i+1}}{\partial x_1} = h_{i+1}, \tag{5}$$

т. е. $\frac{\partial g_i}{\partial x_2} = \frac{\partial g_{i+1}}{\partial x_1}$, $\quad i = 1, \ldots, n-2.$

Тогда, согласно нашему предположению, существует единственная функция $u \in C^{n+k-1}(D)$, такая что

$$\frac{\partial^{n-2} u}{\partial x_1^{i-1} \partial x_2^{n-1-i}} = g_i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Учитывая равенства (5), получим

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1^{i-1} \partial x_2^{n-i}} = h_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для всех n.

Имеем:

$$I_n(h_1, \ldots, h_n) = I_{n-1}(g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

В случае, когда область D является звездной относительно некоторой точки $a \in D$, т.е. вместе с каждой своей точкой $x \in D$ содержит и отрезок $[a, x]$, мы можем выписать его в явном виде.

Введем параметризацию

$$h(t) = u(a + t(x-a)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ясно, что $h(t)|_{t=0} = u(a)$ и $h(t)|_{t=1} = u(x)$.

Как известно, для функции $h \in C^m[0,1]$ имеет место равенство:

$$h(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{m!}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \frac{h^{(m)}(t)}{m!} dt.$$

Учитывая, что

$$\frac{h^{(k)}(t)}{k!}=\sum_{i+j=k}\frac{(x_1-a_1)^i(x_2-a_2)^j}{i!\,j!}\frac{\partial^k u}{\partial x_1^i\partial x_2^j}(a+t(x-a)),$$

получаем

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i+j=k}\frac{(x_1-a_1)^i\cdot(x_2-a_2)^j}{i!\,j!}\frac{\partial^k u}{\partial x_1^i\partial x_2^j}(a)+$$

$$+m\cdot\sum_{i+j=m}\frac{(x_1-a_1)^i\cdot(x_2-a_2)^j}{i!\,j!}\cdot\int_0^1(1-t)^{m-1}\frac{\partial^m u}{\partial x_1^i\partial x_2^j}(a+t(x-a))dt$$

Так как на основании леммы

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i-1}\partial x_2^{k-i+1}}(a)=0,\qquad i=1,\ldots,(k+1),\qquad 0\le k\le n-2,$$

то, полагая $m=n-1$, имеем

$$u(x)=(n-1)\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_1-a_1)^{n-i}(x_2-a_2)^{i-1}}{(n-i)!(i-1)!}\cdot\int_0^1(1-t)^{n-1}h_i(a+t(x-a))dt,$$

т.е. получили функцию u в виде

$$u=I_n(h_1,\ldots,h_n).$$

Таким образом, частным решением уравнения (1) служит комбинация формулы (4) и леммы 1, т.е. в принятых обозначениях

$$u=I_nSf.$$

Литература

1. Берс, Л. Уравнения с частными производными /Л. Берс, Ф.Джон, М. Шехтер. – М. : Мир, 1966.

2. Ващенко, О.В. Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера / О.В. Ващенко // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: материалы III Школ молодых ученых. Нальчик-Эльбрус, 2005. – С. 11-14.

THE NON-HOMOGENEOUS ELLIPTIC EQUATION OF HIGHER ORDER

N.A. Malakhova*

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

The non-homogeneous elliptic equation of higher order is considered reduction of this equation to elliptic system of first order is given. As a consequence an exist expression of fundamental solution of considered equation is destructed.