

## НЕКОТОРЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ КВАЛИМЕТРИИ ЗАПАСОВ МИНЕРАЛЬНОГО СЫРЬЯ

*П.В. Васильев<sup>1</sup>*

1 - Белгородский государственный университет Российская Федерация, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
e-mail [Vassiliev@bsu.edu.ru](mailto:Vassiliev@bsu.edu.ru)

Рассмотрены вопросы применения методов стохастической геометрии в оценке качества запасов месторождений полезных ископаемых. Предложен подход на основе стереологического моделирования раскрытия полезной фазы с использованием теории Марковских цепей. Разработаны методы и алгоритмы определения ожидаемой плотности распределения случайного множества фрагментов по крупности и качественному составу при решении таких задач как прогнозирование технологических показателей переработки руд, определение конфигурации развала взрывааемых блоков горных пород, оптимизация ориентации системы разработки по критерию минимизации отходов.

### ВВЕДЕНИЕ

Оценка качества запасов руд, квалиметрия недр, является ключевым элементом технологического процесса добычи и переработки полезных ископаемых. Оперативная и достоверная квалиметрия запасов обеспечивает значительное повышение эффективности и прибыльности горнодобывающего предприятия [2, 3, 13].

Среди совокупности качественных характеристик полезного ископаемого выделяют показатели назначения (состав, содержание вредных или полезных примесей и др. потребительские свойства), технологичности (дробимость, измельчаемость, обогатимость, крепость, абразивность, флотуруемость, растворимость и др.) и сохранности (слеживаемость, окисляемость, самовозгораемость и др.). При этом важен не только уровень качественных характеристик, но и стабильность качества во времени. При колебаниях качества нарушается оптимальный режим переработки сырья, ухудшаются технико-экономические показатели, снижается извлечение полезного компонента в готовую продукцию, повышаются потери.

В связи с этим решение задачи опережающей квалиметрической оценки руд в массиве по результатам стохастического моделирования имеет важное практическое значение.

### 1. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПЕРЕРАБОТКИ РУДЫ

При решении задач стереологического анализа вещества рассматриваются два класса структур – монолитные и дисперсные. Руда, как монолитная структура, имеет определенную трещиноватость природного или искусственного (например, в результате воздействия взрывов) происхождения. В свою очередь дробленая, измельченная или дисперсная масса в тех или иных условиях образует агрегаты и пористые среды иногда с весьма плотной упаковкой (в результате слеживания и коагуляции тонких фракций). В этой связи вопрос оценки параметров монолитных и дисперсных структур может рассматриваться с общих позиций методов стереологии как раздела стохастической геометрии - науки о воссоздании объемной, пространственной геометрической структуры 3D тел по измерениям, проведенным в пространствах более низких размерностей (линии в 1D и плоскости в 2D).

В общем случае частицы руды характеризуются некоторым набором трех типов признаков: геометрических  $\eta$  (таких как среднекалиберный диаметр, объем, площадь поверхности, фактор формы, случайная хорда, площадь случайного сечения, диаметр

эквивалентного круга и т.д.), вещественных  $\beta$  (содержание химических элементов или сочетаний компонентов, состав минералов) и физических  $\xi$  (плотность, магнитная восприимчивость, электропроводность, микротвердость и т.д.). Как было предложено в работе [4] популяция частиц может быть описана дифференциальной функцией состояния  $\gamma(\eta, \beta, \xi)$  - плотностью распределения объема выборки частиц (реальных или имитационных фрагментов) по элементарным фракциям  $[\eta, \eta + d\eta], [\beta, \beta + d\beta], [\xi, \xi + d\xi]$

Технологическое разделение по качеству рудной массы осуществляется с помощью физических полей, воздействующих на физические свойства  $\xi$ , поэтому интегрирование функции  $\gamma(\eta, \beta, \xi)$  в заданных пределах остальных признаков даёт следующие формулы вычисления фракций объёма  $\gamma(\xi)$  и качественного состава  $\beta(\xi)$ :

$$\gamma(\xi) = \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \gamma(\eta, \beta, \xi) d\eta d\beta; \quad (1)$$

$$\beta(\xi) = \frac{1}{\gamma(\xi)} \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \beta \gamma(\eta, \beta, \xi) d\eta d\beta$$

При этом для  $\gamma$ - функции состояния задано следующее условие нормировки:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \gamma(\eta, \beta, \xi) d\eta d\beta d\xi = 1 \quad (2)$$

Введём функцию извлечения или сепарации узких фракций в зависимости от физических свойств частиц в технологическом оборудовании как  $\varepsilon_k(\xi)$ . Тогда в каждом диапазоне масштабов разработки месторождения можно определить ожидаемые показатели рудоподготовки (выход  $\bar{\gamma}_k$ , качество  $\bar{\beta}_k$ , извлечение  $\bar{\varepsilon}_k$ ), соответствующие формулам работы [11] для процесса обогащения:

$$\bar{\gamma}_k = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi) \gamma(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$\bar{\beta}_k = \bar{\gamma}_k^{-1} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta(\xi) \varepsilon_k(\xi) \gamma(\xi) d\xi$$

$$\bar{\varepsilon}_k = \bar{\gamma}_k \bar{\beta}_k / \bar{\beta}_{ucx},$$

где

$$\bar{\beta}_{ucx} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta(\xi) \gamma(\xi) d\xi \quad (4)$$

Представленные формулы позволяют определить основные показатели всего технологического процесса рудоподготовки - от вскрытия месторождения до получения готового концентрата. Таким образом, основная задача квалиметрии запасов состоит в том, чтобы определить потенциальную функцию  $\gamma(\eta, \beta, \xi)$  «объёмно-качественно-физического» состояния руды по данным о вещественном составе, структурно-текстурным характеристикам и физико-химическим свойствам массива месторождения. Подобного класса задачи могут быть эффективно решены лишь методами стохастического моделирования, поскольку в технологический процесс добычи и переработки вовлечены значительные объёмы исходного минерального сырья, неоднородные по своей природе.

Кинетика разрушения кусков руды моделируется с помощью комбинирования механизмов раскалывания, откалывания и абразивного истирания. При этом, однако, кусок рассматривается как гомогенная масса, характеризующая усредненными физико-химическими показателями. Для изучения эффекта раскрытия полиминеральной кристаллической горной породы под действием разрушающих нагрузок, необходимо

принять во внимание некоторые дополнительные влияющие факторы. При разрушении полиминеральной системы сеть трещин может быть сформирована различными путями:

- случайным образом, когда точки центров разрушения выбираются в пространстве в соответствии с пуассоновским процессом заданной интенсивности (подобные условия возникают преимущественно в промышленных мельницах и дробилках с хаотичными импульсными нагрузками на частицы в рабочей зоне);
- по межфазным границам раздела, когда природная прочность срастания минеральных фаз достаточно мала или искусственно уменьшенная за счет специальных физических воздействий;
- вдоль зон и линий сосредоточения искусственно созданных дефектов кристаллической структуры с использованием особых методов дезинтеграции;
- по интеркристаллитным границам, то есть по контактам зерен минералов;
- по плоскостям спайности кристаллов;
- по регулярной решетке или мозаике разбиения.

В технологических процессах взрывания, дробления, самоизмельчения или шарового измельчения руд проявляются преимущественно случайное и межфазное разрушение.

В связи с этим рассмотрим особенности стереологического описания монолитной микроструктуры и расчет ожидаемого фракционного состава руды для наиболее характерных условий случайного разрушения. При этом используется аналогия между процессом случайного вскрытия рудных тел (далее – дробление и измельчение) и пирамидально-рекурсивными алгоритмами представления и обработки видеоданных. Подобные алгоритмы, иногда называемые алгоритмами слияния-расщепления, в настоящее время используются для анализа сигналов, изображений, построения цифровых моделей объемных тел [1].

Ниже описывается модель фрагментации микроструктуры двухфазной руды, изображение которой представлено на рис. 1.

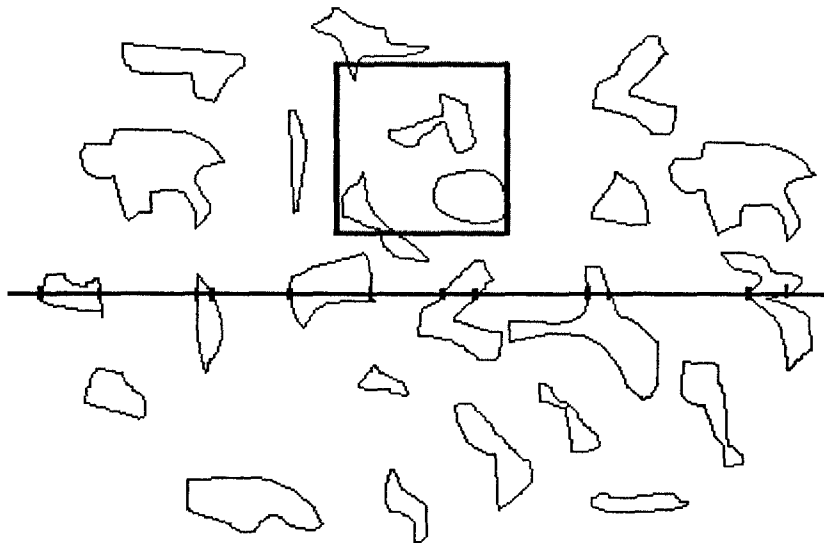


Рис. 1. Изображение микроструктуры двухфазной руды: а) секущая линия сканирования микронзонда и б) случайная квадратная область фрагментации

В процессе обработки двухградационное изображение структуры разбивается на  $N$  фрагментов, Яркость каждого фрагмента может иметь значение 0 (трактуются как "белое" или "фон") и 1 (трактуются как "черное" или "полезная минеральная фаза"). Такая картина наблюдается после сегментации введенного в компьютер изображения микроструктуры исходной руды и окраски областей полезной фазы в черный цвет; при этом пустая порода

окрашивается в белый цвет. Пирамидально рекурсивная структура на таком изображении строится следующим образом. На нулевом уровне структуры все изображение считается одним фрагментом с яркостью  $S_0$ , равной средней яркости элементов. На первом уровне каждая сторона фрагмента нулевого уровня разбивается на  $k$  равных частей, таким образом получаем  $k^2$  фрагментов 1-го разбиения. Каждому фрагменту сопоставляется средняя яркость  $S^1(i, j); i, j = 0, k - 1$ . Повторяя эту процедуру рекурсивно  $T$  раз получим фрагменты  $T$ -го разбиения, совпадающие с точками раstra исходного изображения с яркостью  $S^T(i, j); i, j = 0, k^T - 1$

Нетрудно видеть, что

$$S^{t-1}(i, j) = \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} S^t(ki + \ell, kj + n) \quad (4)$$

Как следует из (4) яркость каждого фрагмента, есть среднее значение яркостей подчиненных квантов любого нижележащего уровня. Кроме того, в нашем случае яркость фрагмента есть одновременно и доля полезной минеральной фазы в ячейке (или блоке) породы соответствующего размера. Инвертирование исходного изображения, то есть преобразование "черных" точек раstra в "белые" и наоборот, позволяет выбирать необходимую для анализа минеральную фазу. Разбиение изображения с помощью пирамидально-рекурсивного алгоритма имитирует процесс сокращения крупности ячеек (кусков, частиц блоков или участков месторождения) и позволяет вычислить спектр распределения кусков заданной крупности по качеству.

В силу теорем интегральной геометрии [5], распределение яркостей фрагментов одного уровня разбиения на представительной площадке структуры есть несмещенная оценка распределения качества фрагментов соответствующего класса крупности. Для построения гистограммы раскрытия фаз удобно принять, что отношение среднего размера фрагментов предыдущего класса к среднему размеру фрагментов последующего класса равно  $1/k$ . Устранив из структуры избыточные фрагменты, яркость которых однозначно определяется яркостью их "предков" - фрагментов предыдущего разбиения. Имя являются черные или белые фрагменты, полученные дроблением также черных или белых областей. Подобная усеченная структура обычно представляется виде регулярного несбалансированного дерева. Все терминальные" вершины этого дерева белые или черные, а нетерминальные - серые.

Построение усеченной структуры эквивалентно тому, что при измельчении руды на каждой стадии дробятся только те куски (серые фрагменты) из данного класса крупности, которые состоят из двух или более фаз, монофазные же фрагменты, т.е. чистая пустая порода или чистый магнетит, далее не дробятся. Это позволяет оценить число вершин различных "цветов" в квадродереве - предсказать объемную долю руды, которую целесообразно измельчать дальше в каждом классе крупности.

Среднее число вершин различных типов определяется в зависимости от номера уровня  $t$  формулами [1]:

$$\begin{aligned} w(t) &= \sigma(t) = k^t (k - 1/2) \\ g(t) &= k^t; t = 1, 2, \dots, T \end{aligned} \quad (5)$$

$w(t), \sigma(t), g(t)$  - соответственно число белых, черных и серых вершин на  $t$ -м уровне для простого сростка при  $\bar{\alpha}_{\text{ср}} = 50\%$ . Число серых фрагментов пропорционально площадной доле сростков, появившихся в процессе сокращения крупности кусков руды после операции разделения качественного материала и пустой породы. До определенного уровня дробления  $t_0$  практически все вершины дерева остаются "серыми", а затем появляются полностью раскрытые минеральные фазы. При этом параметр  $t_0$  является инвариантом для данного класса изображений и служит мерой сложности структуры наряду с таким показателем как удельная поверхность сростания фаз.

Поскольку каждый такт разбиения охватывает всё изображение в целом, то среднее содержание полезной фазы минералов в серии изображений равно его объёмной доле в массиве и может быть оценено из выражения

$$\bar{C}_m = \int_0^1 g \gamma^a(g | D) dg \quad (6)$$

Для простого случая идеальной сепарации частиц размера  $D$  и уровне разделения  $g_s$ , прогнозный выход концентрата равен

$$\bar{F}_k = \int_{g_s}^1 \gamma^a(g | D) dg \quad (7)$$

а доля полезной фазы с качеством выше бортового уровня  $g_s$  равна –

$$\bar{C}_k = \int_{g_s}^1 g \gamma^a(g | D) dg \quad (8)$$

В том случае, когда априори задана гранулометрическая характеристика продуктов измельчения  $\gamma^a(D)$ , известны функция извлечения  $\bar{\varepsilon}_k(g, D)$  и функция преобразования  $\chi(D)$  крупности питания измельчения в продукт измельчения, то уравнения прогнозирования основных показателей обогащения примут вид:

$$\bar{F}_k = \int_0^1 \int_0^1 \bar{\varepsilon}_k^a(D, g) \gamma^a(D) \chi(D) \gamma^a(g | D) dD dg \quad (9)$$

$$\bar{C}_k = \bar{F}_k^{-1} \int_0^1 \int_0^1 g \cdot \bar{\varepsilon}_k^a(D, g) \gamma^a(D) \chi(D) \gamma^a(g | D) dD dg \quad (10)$$

В качестве примера определим объёмно-качественных параметры обогащения двухфазной железной руды, состоящей из магнетита и пустой породы. С учетом плотностей магнетита  $\rho_m$ , пустой породы  $\rho_q$ , концентрата  $\bar{\rho}_k$  и исходной руды  $\bar{\rho}$ , массовый выход концентрата определим выражением:

$$\bar{\gamma}_k = \bar{F}_k \bar{\rho}_k / \bar{\rho} = \frac{[\bar{C}_k \rho_m + (1 - \bar{C}_k) \rho_q]}{[\bar{C}_m \rho_m + (1 - \bar{C}_m) \rho_q]} \bar{F}_k \quad (11)$$

металлургическое качество:

$$\bar{\beta}_k = 72.36 \cdot \bar{C}_k \rho_m / [\bar{C}_k \rho_m + (1 - \bar{C}_k) \rho_q] \quad (12)$$

и извлечение железа

$$\bar{\varepsilon}_k = \bar{\gamma}_k \cdot \bar{\beta}_k / \bar{\beta}_{\text{исх}} \quad (13)$$

Для сопоставления с данными фракционирования смеси частиц по физическим свойствам, таким как плотность  $\rho$  и магнитная восприимчивость  $\chi$ , необходимо воспользоваться справочными константами минералов. Кроме того, для перевода шкалы состава в шкалу магнитной восприимчивости следует учесть, что для частиц в сильном магнитном поле справедливо соотношение [11]:

$$\chi = \sum_{i=1}^N C_i \chi_i \approx B_0 \cdot \alpha_m \quad (14)$$

где  $C_i \chi_i$  - соответственно содержания и удельные магнитные восприимчивости всех минералов куска руды;  $N$  - число минералов;  $B_0$  - относительная удельная магнитная восприимчивость на 1% металла;  $\alpha_m$  - содержание магнетитового железа в куске.

### Марковская модель процесса сокращения крупности и раскрытия минеральных фаз

Для описания порционного измельчения двухфазной руды в работе [10] предлагается использовать следующее массово-балансовое уравнение:

$$dM_k / dt = (B_k - 1)S_k M_k + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{k-1} L_{k \leftarrow i} S_i M_i \quad (15)$$

где  $M_k$  - массовая доля частиц  $k$ -го класса качества (по содержанию полезного минерала в частицах) каждого размерного класса;  $B_k$  - матрица распределения разрушения (доля первоначально разрушаемого продукта  $k$ -го класса качества для каждого класса крупности);  $S_k$  - матрица функции отбора или скорости разрушения;  $L_k$  - матрица распределения раскрытия частиц  $k$ -го класса качества (доля первоначально разрушаемой массы  $k$ -го класса качества, раскрывающейся в последующих классах крупности);  $k$  - полное число классов качества.

Здесь все функции заданы таким образом, что изначально объединенными оказываются вероятности разрушения и раскрытия, что ведет к необходимости объединять все классы сростков в один класс без учета качества продукта. Кроме того, в описанной модели допускается конечная вероятность перехода частиц за один такт разрушения из исходного состояния в любое конечное состояние качества и крупности. То есть возможен переход частиц сразу через несколько классов крупности. Поглощающими состояниями являются классы качества 1 и  $k$ . Подобное допущение не противоречит физическим законам разрушения частиц, однако оно неприемлемо, если мы хотим определить значения матрицы вероятностей перехода частиц из более крупной фракции размеров в соседнюю менее крупную. Этим объясняется то обстоятельство, что цитируемой работе в итоге рассматривается лишь три класса качества - раскрытый минерал А, сростки АВ и раскрытый минерал В.

Исходя из этого нами предложена более универсальная модель сокращения крупности и раскрытия вкрапленной руды, отличающаяся, кроме того, возможностью учета микротвердости основных минералов и влияния прочности границ срастания фаз. Процесс представлен в виде неоднородной марковской цепи с двумя (в случае двухфазной руды) или более (полиминеральный материал) поглощающими состояниями, в которых чистые мономинеральные частицы в последующих тактах порционного измельчения далее не изменяют своего качества.

Пусть исходная руда состоит из полезной фазы  $m$  и пустой породы  $q$ . Если объем отдельной частицы руды обозначить через  $v$ , а долю объема в ней полезной фазы через  $v_m$ , то можно принять, что минеральное качество такой частицы равно  $g = v_m / v$ . В общем случае это могут быть как реальные частицы питания мельницы, так и псевдочастицы структуры разрушения (кубы, сферы, полиэдры Вороного и т.п.). Рассмотрим  $j$ -й узкий класс крупности питания. Разбив диапазон возможных значений качества на  $k$  градаций, определим оценку плотности распределения частиц по качеству  $\gamma(g | v_j)$  таким образом, что

$$\sum_{k=1}^M \gamma(g | v_j) \Delta g_k = \sum_{k=1}^M [\gamma_{k,j}] = 1 \quad (16)$$

где  $k$  - класс качества питания;  $\Delta g$  - шаг разбиения диапазона качества ( $0 \leq g \leq 1$ );  $\gamma(k | j)$  условное распределение объема питания по качеству, матрица  $1 \times M$  (вектор-строка).

Для продукта измельчения двухфазной руды необходимо определить фракционный состав  $\gamma(g, v)$  - оценка плотности распределена объема твердой фазы материала по  $N$  классам крупности и  $M$  классам качества частиц при условии нормировки

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \gamma(v_i, g_k) \Delta v_i \Delta g_k = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M [\gamma_{ik}] = 1 \quad (17)$$

где  $i$ - текущий класс крупности;  $k$  - текущий класс качества;

$[\gamma_{ik}]$  - фракционный состав, матрица размера  $M \times N$ .

Фракционный состав или совместная плотность распределения крупности и качества продукта может быть представлена в виде произведения маргинальной крупностной характеристики  $\{\gamma_i\}$  на условную плотность распределения качества при заданной крупности  $[\gamma_{k,i}]$ . В принятых обозначениях для продукта измельчения данная формулировка имеет следующий вид:

$$[\gamma_{ik}] = [\gamma_{k,i}] \{\gamma_i\} \quad (18)$$

где  $\{\gamma_i\}$  - распределение объёма продукта по крупности, матрица  $N \times 1$  (вектор-столбец).

Таким образом, задача предсказания фракционного состава может быть сведена к следующей: по известным характеристикам  $\{\gamma_i\}$  и  $[\gamma_{k,i}]$  минерального сырья до сокращения крупности необходимо смоделировать характеристики  $\{\gamma_i\}$  и  $[\gamma_{k,i}]$  после сокращения крупности сырья, а затем по формуле (18) определить фракционный состав  $[\gamma_{ik}]$ .

Процесс сокращения крупности и раскрытия полезного компонента двухфазной руды моделируется Марковской цепью с двумя поглощающими состояниями. Вероятности перехода в цепи задаются для двух рядом стоящих уровней, соответствующих двум размерным фракциям частиц, как это показано на нижеприведенном рисунке.

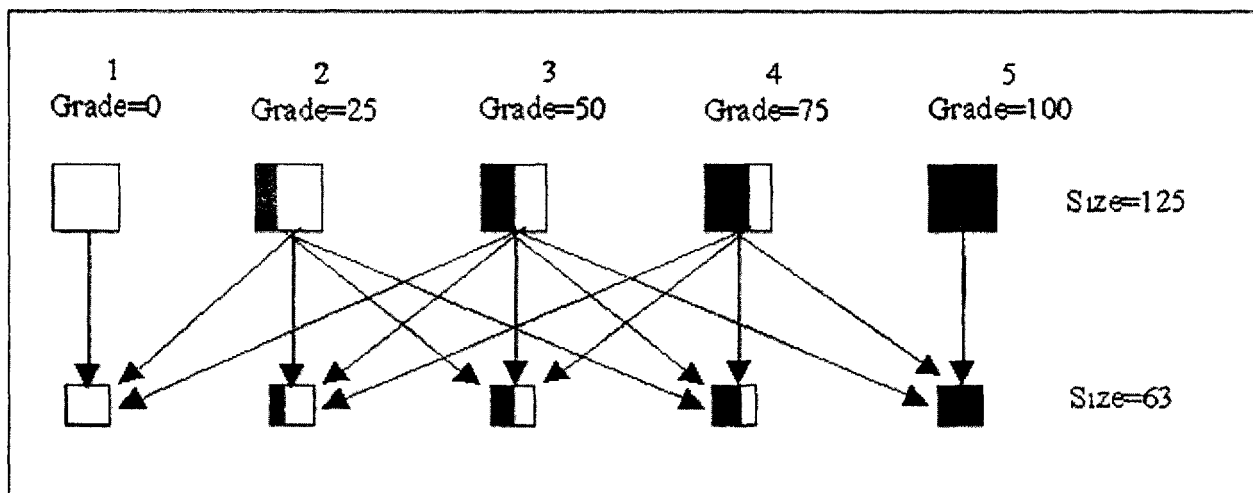


Рис. 2. Схема пересортировки качества блоков для двух состояний Марковской цепи

В этом случае функция пересортировки качества простых сростков  $R$  - определяется лишь вероятностью перехода частиц  $k$ -го класса качества  $j$ -го класса крупности в  $k' - i$  класс качества  $j+1$ -го класса крупности (для шкалы размеров с постоянным модулем). Соответствующая матрица  $[r_{kk'}]$  переходных вероятностей является квадратной, размера  $M \times M$ . Очевидно, что если исходные частицы целиком состоят из чистой минеральной фазы  $m$  или  $q$ , то дочерние частицы могут быть только той же фазы и будут иметь нулевую вероятность "попадания" в любой другой класс качества.

Введем в модель функцию отбора вкрапленных сростков для пересортировки  $L$ , представленную диагональной матрицей  $M \times M$  и независящую от качества сростков. Этому требованию удовлетворяет, в частности, соотношение

$$\lambda_{kk} = 2S_v / (S_v^m + S_v^q) \quad (19)$$

где -  $S_v, S_v^m, S_v^q$  удельные поверхности частиц и вкраплений  $j$ -го класса крупности частиц.

Учитывая, что  $S_v = 4/\bar{\ell}$ , возможна иная запись:

$$\lambda_{kk} = (\bar{\ell}_m + \bar{\ell}_q) / 2\bar{\ell} = \frac{2\bar{P}}{A} \left/ \left( \frac{\bar{P}_m}{A_m} + \frac{\bar{P}_q}{A_q} \right) \right. \quad (20)$$

где  $\bar{\ell}, \bar{\ell}_m$  и  $\bar{\ell}_q$  - средние хорды частиц и вкраплений фаз  $j$ -го класса крупности частиц;  $P, P_m$  и  $P_q$  - удельные величины периметров соответственно для частиц и вкраплений фаз (в случае многосвязных включений - удельные длины границ фаз);  $A, A_m$  и  $A_q$  - площади сечений частиц и фаз. Для этих соотношений выполняется условие  $0 \leq \lambda_{kk} \leq 1$ .

С другой стороны, в процессе разрушения гетерогенных по прочности хрупких материалов происходит переизмельчение более мягких минералов. Чтобы учесть это обстоятельство, в модель введена дополнительно функция отбора сростков по микротвердости  $H$ . Для дискретной шкалы качества  $H$  представляется в виде диагональной матрицы  $M \times M$  в которой диагональные элементы вычисляются по формуле

$$h_{kk} = [h_q g_k + h_m (1 - \bar{g}_k)] / (h_m + h_q) \quad (21)$$

где  $h_m, h_q$  - микротвердость минеральных фаз по Виккерсу;  $\bar{g}_k$  - среднее качество сростков  $k$ -го класса, доли ед.

Обозначим векторное произведение матриц  $\Lambda$  и  $\mathbf{H}$  через  $\mathbf{U}$ . Тогда доля объема отобранного к пересортировке по качеству питания  $j$ -го класса крупности будет пропорциональна  $U_j$ , доля пересортированного материала равна  $U_j R$ , а остаток составит величину  $(I_m - U_j)$ . Суммарный продукт, переходящий в класс крупности  $j+1$ , будет описываться выражением  $[\gamma_{k,j}] (U_j R) + I_m - U_j$ . Повторяя подобную цепь операций в последующих классах крупности, получим формулу моделирования нестационарного процесса раскрытия гетерогенной двухфазной руды

$$[\gamma_{k,i}] = [\gamma_{k,j}] \prod_{j=1}^{i-1} [U_j R + I_m - U_j] \quad (22)$$

Используя ранее приведенное массово-балансовое уравнение (15) и принимая во внимание (22), получим следующее матричное уравнение имитационного моделирования объединенного процесса сокращения крупности и раскрытия:

$$\gamma = \mathbf{f} \prod_{j=1}^T \mathbf{L} \{ \mathbf{U} \mathbf{R} + \mathbf{I}_m - \mathbf{U} [ \mathbf{B} \mathbf{S} + \mathbf{I}_n - \mathbf{S} ] \} \quad (23)$$

где  $\mathbf{f}$  - распределение объема питания по крупности, матрица  $N \times 1$  (вектор-столбец);  $\mathbf{L}$  - матрица раскрытия минеральных фаз  $N \times M$ ;  $\gamma$  - совместное распределение частиц продукта по крупности и качеству, матрица  $M \times N$ ;  $\mathbf{B}$  - матрица распределения разрушения, задаваемая функцией Бродбента-Калкотта, нижняя треугольная матрица  $N \times N$ ;  $\mathbf{S}$  - функция отбора или скорости разрушения, диагональная матрица  $N \times N$ ;  $\mathbf{I}_n$  - единичная диагональная матрица  $N \times N$ ;  $\mathbf{I}_m$  - единичная диагональная матрица  $M \times M$ ;  $T$  - число циклов раскрытия и измельчения.

Схема расчета по данной методике реализована в программном обеспечении Geoblock [1.3], где результаты по квалиметрии и оценке стоимости блоков далее используются для оптимизации границ карьера и поиска наилучшей последовательности этапов ведения горных работ по максимуму прибыли.



## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ РАЗВАЛА ВЗОРВАННОЙ ГОРНОЙ МАССЫ

Прогнозирование формы и конфигурации развала при проведении массовых взрывов в карьерах на основе гранулометрии дезинтегрированной рудной массы рассматривалось в монографии [12].

Проблема моделирования конфигурации развала взрывааемых в карьерах блоков чрезвычайно актуальна для горнодобывающих предприятий. Решение задачи позволяет значительно повысить эффективность ведения горных работ, управления качеством рудопотоков и оперативного планирования добычи.

По результатам моделирования формы и структуры развала могут быть определены основные характеристики железорудного сырья: гранулометрический состав дезинтегрированной рудной массы, качественный состав кусков по железу общему и магнетитовому, степень перемешивания сортов руд, ожидаемые потери и разубоживание с учётом заданных параметров селективности выемки и емкости ковша экскаватора. При наличии соответствующей входной информации о вещественном составе, структурно-текстурных особенностях и физико-химических характеристиках руды могут быть оценены также дополнительные показатели качества сырья, такие как дробимость, измельчаемость и раскрываемость, необходимые для оптимизации процессов рудоподготовки и обогащения.

### Последовательность компьютерного моделирования

В настоящее время прогнозирование характеристик руды в развале и оценка её объёмно-качественных показателей выполняется главным образом на основе эмпирических формул и экспериментально установленных статистических зависимостей. Однако при значительных колебаниях вещественного состава сырья и изменении технологии добычи подобные зависимости не удовлетворяют требованиям по точности. В этих условиях для предсказания хода физических процессов в скальном массиве при взрыве необходимо использовать более широкий комплекс методов математического моделирования в сочетании с прямым вычислительным экспериментом на основе методов теории стохастической геометрии. Центральное место в комплексе занимают методы стереологии, описывающей свойства и поведение случайных замкнутых множеств разнородных частиц в евклидовом пространстве и во времени.

Для базового варианта предлагается следующий алгоритм решения задачи определения формы развала:

*Шаг 1.* Определяются необходимые исходные данные по взрываемому блоку:

а) База данных опробования буровзрывных скважин, в т.ч. карты по категориям взрываемости пород и прочности пород по Протодюконову.

б) Цифровая модель пространственного размещения объёмно-качественных показателей в блоке, контуры рудных тел, изоповерхность бортового содержания железа.

в) Усреднённая гранулометрическая характеристика кусков руды взорванной горной массы по отработанным блокам, включая долю негабарита.

*Шаг 2.* Выполняется построение сеточной модели изоповерхности кондиционной руды (с бортовым содержанием железа выше минимально промышленного) в контуре взрываемого блока по данным опробования буровзрывных скважин. Поверхность блока и изоповерхности кондиционных участков внутри блока описываются полигональными меш-сетками с треугольными элементами.

*Шаг 3.* Выполняется построение сетки трещин разрушения монолитного или слаботрещиноватого массива в результате воздействия взрывной волны. В качестве первого приближения используется усреднённый гранулометрический состав рудной массы (распределение кусков по крупности), характерный для используемой на месторождении технологии взрывания и удовлетворяющий требованиям к материалу для дробления. Для скальных пород высокой степени крепости по Протодюконову сеть трещин разрушения и сеть контактов «руда-порода» принимаются статистически

независимыми. Мелкими фракциями и фракциями негабарита можно пренебречь и, в наиболее простом варианте, принять для предварительного расчёта средний размер кусков руды. В соответствии с заданной гранулометрической характеристикой взорванной руды всё пространство выемочного блока разбивается на отдельные фрагменты, описываемые выпуклыми полиэдрами Вороного, полностью заполняющими пространство.

*Шаг 4.* Определяется пересечение сетки фрагментов дробления и оболочек рудных тел. На данном шаге компьютерной методики выполняется логическая операция пересечения фрагментов сетки трещин в виде полиэдров Вороного с оболочками рудных тел цифровой геологической модели блока. Эта операция требует значительных вычислительных ресурсов, поскольку средний эксплуатационный блок должен быть разбит на множество фрагментов заданного гранулометрического состава. Только в этом случае можно для отдельного фрагмента определить его качество (содержание общего железа в потенциальном куске) в результате поиска пересечения объёма фрагмента с объёмной моделью рудных тел в блоке. Замена построения полной системы фрагментов трещин взрывного блока на стохастическое моделирование гранулометрии по методу Монте-Карло позволяет решить задачу без привлечения мощных суперкомпьютеров. В итоге могут быть определены основные характеристики фрагментированной руды, включая ожидаемые показатели потерь и разубоживания. Преобразование нерегулярной сеточной модели в регулярную грид-модель с плавающим размером ячеек также позволяет существенно сократить время поиска качества рудного фрагмента. Однако для выполнения дальнейших процедур необходимо выполнить обратное преобразование от сеточной модели к блочной.

*Шаг 5.* Выполняется переход от монолитного массива к развалу. Множество полиэдров Вороного до взрыва преобразуется в систему случайно ориентированных полиэдров Вороного в развале после взрыва. При послыном формировании гравитационной упаковки «кусков» учитываются такие физические свойства руды как прочность на сжатие, хрупкость, плотность и коэффициент трения. Для каждого «куска» в зависимости от его вещественного состава эти показатели будут разные.

*Шаг 6.* По результатам работы процедур определяется площадь и объём развала, коэффициент разрыхления горной массы, контуры кондиционных участков, ожидаемые потери и разубоживание.

В первом приближении при сборе исходных данных можно ограничиться существующей технологией построения участка цифровой модели карьера, полученной на основе маркшейдерской съёмки или по данным фотограмметрии. Для более оперативного варианта целесообразно применение 3D лазерного сканирования бортов карьера.

Таким образом, определяемые по триангуляционной модели площадь поверхности и объём развала должны быть сопоставлены с полученными в результате моделирования пространственными параметрами распределения руды по гранулометрии и качеству. Одновременно может быть определен прогноз технологических сортов руд и ожидаемые технологические показатели обогащения: выход, качество и извлечение железа в концентрат. Анализ и сопоставление экспериментальных и расчетных данных даёт возможность оценить истинную ошибку прогноза.

#### **Модель оптимизации системы добычи облицовочного камня**

При промышленной добыче облицовочного камня пыльные "блоки" нарезаются оборудованием непосредственно в карьере или каменоломне. Некачественный блок бракуется и отправляется в отвал.

На месторождении облицовочного известняка Канфанар в Хорватии блоки имеют следующие размеры: длина не менее 2,0 метров, ширина не менее 1,2 метров и высота не менее 1,5 метров. Блок должен быть однородной окраски без каких-либо трещин, микротрещиноватости, пустот, пятен и т.д. По этой причине когда оценивается качество, то "хорошим материалом" считается 100% годный блок. Предельный фактор утилизации колеблется для разных каменоломен и зависит от тектоники на месторождении,

технологии добычи, однородности текстуры, цвета и т.д. В настоящий момент, в больших карьерах по добыче камня факторы утилизации варьируют от 2,5% до 70% по объёму не принимаемая в расчёт перекрывающие породы.

Исходные условия отработки запасов камня.

Рабочие плоскости при эксплуатации месторождения облицовочного камня выбираются в соответствии со следующими критериями:

1. Согласно стратификации месторождения камня (если она имеется; мраморные или гранитные месторождения обычно не имеют напластований)
2. Согласно плоскостям разрывных нарушений путём выбора нарушений, которые перпендикулярны друг другу во всех трёх плоскостях
3. Принимая во внимание, что оборудование может нормально работать только в том случае, если рабочая поверхность выработки отклоняется от горизонтальной плоскости не более чем на 15 градусов.
4. Объединив все эти требования можно получить наилучший выход качественной продукции и высокий фактор утилизации.

Подсчет запасов облицовочного камня на месторождении известняков Канфанар ведётся по методу параллельных геологических разрезов, в предположении, что зону подсчета слагают:

- Кондиционный известняк – на 100% годится для экскавации и из полностью подсчитанного объёма данного типа материала получают примерно 35%-й выход коммерчески годных блоков.
- Средний известняк - этот материал не очень хорошего качества, но он всё ещё пригоден для добычи.
- Голубой известняк - материал окрашен в голубой цвет, не пригодный для рынка. Необходимо лишь знать как много такого материала в месторождении.
- Некондиционный известняк - материал на 100% не годится для блоков

Предложенный нами алгоритм оптимизации системы разработки для обеспечения максимального выхода высококачественной продукции включает следующие основные шаги:

*Шаг 1.* Для рассеянных точек топографии POINTS 2D выполняется триангуляция Делоне и создается набор данных TIN, Для контактов между литологическими пластами POINTS 3D и для полигонов складок (POLYGONS) создаются сеточные модели MESH 2D.

*Шаг 2.* На основе полученных наборов для литологических поверхностей создаются SOLID оболочки рудных тел и внутри них – SOLID\_ORESORTS оболочки тел рудных сортов:

а) выполняется экструзия TIN кровли каждого пласта до дна полной модели  
б) выполняются операции с множествами между моделями и экструзиями SOLIDS, чтобы получить оболочки тел пластов с конкретными типами пород

*Шаг 3.* Подсчитываются исходные геологические запасы по каркасной модели

*Шаг 4.* В пределах рамок модели генерируется регулярная решетка GRID\_3D с заданными размерами блоков и приращением азимутальной ориентацией модели на 10 градусов.

*Шаг 5.* Решетка GRID 3D конвертируется в SOLID модель блоков, то есть параллелепипедов стандартных блоков камней.

*Шаг 6.* Выполняется операция пересечения множеств между моделями GRID\_3D и SOLID\_Orebody, чтобы получить блоки камней внутри каркасной оболочки пластов месторождения. Результирующая модель GRID3D\_int\_SOLID должна включать лишь камни внутри оболочек пластов. (Замечание: На этом шаге мы выполняем геометрическую процедуру определения пересечения ребер и вершин прямоугольных блоков камней с каркасными оболочками рудных тел или пластов).

*Шаг 7.* Выполняется операция разности Difference между полученной моделью кондиционных блоков камней GRID3D\_dif\_SOLID и моделью складок MESH2D\_FAULTS, чтобы получить ненарушенные трещиноватостью камни. В итоге модель GRID3D\_dif\_MESH2D\_FAULTS должна включать лишь камни вне разломов и структурных нарушений. (Замечание: Если происходит пересечение любого треугольника блока камня с любым треугольником плоскости нарушения, то данный блок отбрасывается и выполняется переход к следующему блоку).

*Шаг 8.* Выполняется операция пересечения точек центров блоков с оболочками типов или сортов руд, то есть POINTS3D\_dif\_POLYGONS и SOLID\_ORESORTS, чтобы пометить каждый блок соответствующим типом породы или сортом руды.

*Шаг 9.* Вычисляется полный объём и запасы модели для различного качества облицовочных блоков известняка.

*Шаг 10.* Определяется полученный выход годных блоков от максимально возможного выхода запаса, полученного на шаге 4. Если заданного максимума выхода блоков руды не достигнуто, то осуществляется переход к шагу 5.

*Шаг 11.* Иначе конец вычислениям и печать отчёта.

Данный алгоритм оптимизации системы разработки облицовочного известняка подготовлен к реализации в виде модуля программной системы Geoblock [1.3].

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен имитационно-иерархический подход к квалиметрии запасов рудных месторождений, который включает следующую последовательность методики оценки объемно-качественных характеристик:

1. Построение компьютерной геолого-технологической модели месторождения. Определение потенциальной раскрываемости сортов руд и минеральных фаз. Анализ сложности строения залежи.
2. Построение компьютерной эксплуатационной модели месторождения. Определение экономически оптимальной конфигурации карьерного поля или шахты для выемки запасов в течение планируемого срока жизни предприятия. Анализ сложности системы разработки.
3. Оценка интегральной стоимости месторождения по совокупности показателей вещественного состава и параметров системы отработки запасов

Суть метода масштабируемой пирамидально-рекурсивной оценки геометрического строения залежи заключается в следующем. Пространственная модель блока залежи разбивается последовательно на квадратные фрагменты уменьшающейся крупности  $D$ , покрывая технологически важный диапазон размеров ( $1\text{м} - 10^4\text{ мкм}$ ), а затем совокупность фрагментов классифицируется по качеству и объемной доле в них полезной минеральной фазы. В сериях изображений, асимптотически воспроизводящих стереологические характеристики структуры, определяется совместная функция плотности вероятности образования фрагментов различного состава и размеров.

В 3D варианте методики структура месторождения (рудные тела, однородные области минерализации и поля минеральных фаз) моделируются на основе построения диаграммы полиэдров Вороного. Технологический процесс добычи и переработки руды моделируется путём стохастического покрытия пространства залежи минерального сырья масштабируемыми пробными блоком, соответствующими объёму селективности выемки оборудования.

Разработана стохастическая модель совместного процесса «сокращения крупности-раскрытия» в технологии добычи и переработки полезных ископаемых. Итоговая функция

состояния  $\chi(\eta, \beta, \xi)$  руды в классах свойств материала вычисляется на основе матриц переходных вероятностей теории Марковских цепей.

#### ССЫЛКИ В ИНТЕРНЕТ

- I.1. Применение диаграммы Вороного в различных областях науки и техники, от физики твёрдого тела до телекоммуникаций и геоинформатики: <http://www.voronoi.com/applications.htm>
- I.2. Стереологическая реконструкция 3D структур по сериям последовательных сечений в просвечивающей электронной микроскопии биологических тканей: <http://synapses.bu.edu/>
- I.3. Проект разработки программы Geoblock: <http://sourceforge.net/projects/geoblock>
- I.4. Методы генетического программирования: <http://www.genetic-programming.com/johnkoza.html>

#### Библиографический список

1. Александров В.В., Горский Н.Д. Представление и обработка изображений. Рекурсивный подход. Л.:Наука. - 1985, - 188с.
2. Ломоносов Г.Г. Формирование качества руды при открытой добыче. М.:Недра. - 1975, - 224с.
3. Новожилов М.Г., Ройзен Я.Ш., Эрперт А.М. Качество рудного сырья черной металлургии. М.:Недра, - 1977, - 420с.
4. Васильев П.В., Тихонов О.Н. Об оценке фракционного состава минерального сырья по данным анализа изображений его микроструктуры. Известия вузов. Цветн.металлургия. – 1988. - №6. -С.2-9.
5. Hilliard J.E., Lawson L.R. Stereology and Stochastic Geometry (Computational Imaging and Vision). Springer, 2003, 512p.
6. Lombardi M. Interpolation and smoothing. Astronomy & Astrophysics manuscript. arXiv:astro-ph/0208533 v2 10 Sep 2002.
7. Most T., Unger J.F., Bucher C. Stochastic Modeling of Cohesive Crack Propagation Using Meshless Discretization Techniques. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, Jyvaskyla, 24–28 July 2004, pp.1-20
8. Schneider C.L., Neumann R. Quantitative Measurement of Exposed Area by Image Analysis of Particle Cross-section. Applied Mineralogy, Pecchio et al. (eds) 2004 ICAM-BR, Sao Paulo, ISBN 85-98656-02-X.. pp.1035-1038.
9. Васильев П.В. Моделирование пространственных структур методами стохастической геометрии. //Научные ведомости. Белгородский Государственный Университет. Серия: Информатика, Прикладная математика и Управление. Изд. БелГУ. – 2006. -№2. -С.58-75.
10. Yingling J.C. Liberation model for multi-component ores. Minerals and Metallurgical Processing. 1991, May, pp.65-72.
11. Тихонов О.Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых. М.:Недра. - 1984. - 208с.
12. Оксанич И.Ф., Миронов П.С. Закономерности дробления горных пород взрывом и прогнозирование гранулометрического состава. М.:Недра, - 1982. – 166с.
13. Снетков В.И. О статистических методах в квалиметрической оценке месторождений полезных ископаемых. //Маркшейдерия и недропользование. – 2005. - №4. –С.34-41.

#### SOME STOCHASTIC MODELS AND ALGORITHMS IN QUALITY CONTROL OF MINERAL DEPOSIT RESERVES

*Pavel V. Vassiliev*

Questions of stochastic geometry in the quality control for industrial mineral deposits are discussed. The approach for mineral liberation modeling on the basis of stereology principles and Markov chains is developed. Computational methods and algorithms on determination of frequency distribution for size and quality composition in random fragments have been used for such tasks as the prediction of technology parameters in ore bodies before mining and processing; forecasting the scattering configuration from rock blocks after explosions; optimization of the mining system for dimensional stones in accordance with economy criteria and minimum waste.