УДК 519.1, 621.3

К ВОПРОСУ О МИНИМИЗАЦИИ В МОДЕЛЯХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В.Е. Хачатрян[1], *Н.В. Щербинина*[1]

1 - Белгородский государственный университет Российская Федерация, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Рассмотрена задача построения по заданному объекту в классе эквивалентных его минимального представителя. Разработан алгоритм, который образует исходный объект, в ему эквивалентный и минимальный.

ВВЕДЕНИЕ

В моделях вычислений важной является задача построения по заданному объекту в классе эквивалентных его минимального представителя, причем минимальность определяется по тем или иным его параметрам.

Задача решается построением алгоритма, который преобразует исходный объект, в ему эквивалентный и минимальный. При этом алгоритм осуществляет "монотонное" уменьшение значений параметров, определяющих минимальность.

Сложность решения такой задачи заключается в том, что:

а) алгоритмы, осуществляющие уменьшение значений, параметров определяющих минимизацию, обычно приводят лишь к тупиковым объектам, которые не являются минимальными;

б) минимальный объект определяется неоднозначно.

Для решения задачи минимизации предлагается использовать следующую стратегию:

1. разработать полную систему эквивалентных преобразований (э.п.);
2. построить алгоритм, осуществляющий направленное применение э. п. и позволяющий по данному объекту построить минимальный;
3. используя э.п. получить все минимальные объекты в классе эквивалентности.

В данной работе показывается возможность применения данной стратегии для решения задачи минимизации в некоторых классах конечных детерминированных двухленточных автоматов.

Отметим, что неразрешимость проблемы включения для многоленточных автоматов установлена в [1]. В [2] описан алгоритм, разрешающий эквивалентность двухленточных автоматов, и только в [3] доказана разрешимость этой проблемы в общем случае. Полные системы э. п. для различных подклассов имеются в работах [4,5]. Для общего случая такая система получена в [6].

Работа состоит из трех разделов. В первом – уточняется рассматриваемая задача, и даются основные понятия. Во втором – предлагаемый алгоритм проигрывается на множестве безцикловых автоматов. В третьем – на множестве автоматов с непересекающимися циклами.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассматриваются двухленточные бинарные автоматы в определении, данном в [2].

Минимальным в классе эквивалентности автоматов называется автомат этого класса с минимальным числом состояний.

Известно, что в случае конечных автоматов поиск минимального автомата сводится к задаче склеивания эквивалентных его состояний, т.е. приведению автомата к виду, когда в нем нет двух различных и эквивалентных состояний.

При переходе к двухленточным автоматам обнаружилась следующая ситуация: в общем случае

а) автомат, не имеющий различных эквивалентных состояний, не является минимальным;

б) в одном и том же классе эквивалентности двухленточных автоматов возможно несколько минимальных автоматов.

Эти утверждения говорят о сложности построения минимальных двухленточных автоматов.

В связи с изложенным под обобщенной проблемой минимизации в некотором множестве Ω двухленточных автоматов мы понимаем следующее: для любого класса эквивалентности, содержащегося в Ω

α) построить минимальный в нем автомат;

β) описать, как из него можно получить любой другой, ему эквивалентный минимальный автомат.

Следует отметить, что в [7] задача α исследовалась для множества многоленточных автоматов в случае, отличающемся от рассматриваемого нами; задача β вообще не рассматривалась.

Доказательство минимальности автомата в некотором классе эквивалентных автоматов осуществляется с привлечением полной системы э.п..

Для исследования этой проблемы нами выбран, на первый взгляд, простой случай – бинарные двухленточные автоматы, ленты которых обладают свойством: одна лента заполняется произвольно, вторая – только фиксированным символом. Более того, мы ограничились подмножеством автоматов, не имеющих пересекающиеся циклы. Уже этому подмножеству автоматов присущи свойства а) и б).

Для определенности, обозначим p ленту, которая заполнена произвольно , а через q – ленту, заполненную только фиксированным символом. Пусть M – множество выбранных автоматов.

Нами разработана следующая методика решения проблемы минимизации в M.

Пусть D –произвольный автомат из M, [D] – класс эквивалентности автомата D, тогда

1) в [D] строится автомат с минимальным числом состояний, в которых считывается лента p; такой автомат именуется p-минимальным в [D], а задача его построения – p-минимизацией в [D];

2) доказывается, что подмножество в [D], состоящее из всех p-минимальных в [D], является разрешимым; обозначим его $[D]_p$;

3) в множестве $[D]_p$ отыскивается автомат с наименьшим числом состояний, в котором считывается лента q; такой автомат называется q-минимальным в $[D]_p$, а задача его отыскания – q-минимизацией в $[D]_p$;

4) устанавливается, что q-минимальный в $[D]_p$ автомат является минимальным в [D];

5) описываются э.п., посредством которых из одного минимального в [D] автомата могут быть получены все минимальные в [D] автоматы.

Изложение предложенной методики сначала "проигрывается" на подмножестве M_0 множества M, состоящих из бесцикловых автоматов, а затем на множестве M автоматов из Ω с непересекающимися циклами. В обоих случаях получено решение проблемы минимизации. Оба множества характеризуются наличием в них классов эквивалентности с более, чем одним минимальным автоматом. Более того, множество автоматов M с непересекающимися циклами содержит классы эквивалентности, в которых содержится бесконечное число автоматов, каждый из которых не имеет эквивалентных состояний.

Множество бесцикловых автоматов послужило стендом для решения проблемы минимизации во втором множестве.

Доказательство минимальности некоторого автомата в своем подклассе класса эквивалентных опирается на предварительное построение системы э.п., полной в этом подклассе.

Поэтому в статье вслед за строгим определением двухленточных бинарных автоматов, т.е. его структуры и функционирования, дается описание того, как строятся принимаемые нами полные системы э.п. Здесь же излагается стратегия доказательства полноты предложенной системы, и она демонстрируется для M_0.

Конечный бинарный двухленточный автомат представляется конечным ориентированным графом специального строения, размеченный символами алфавитов P и B, где P={p, q}, а B={0, 1}.

Вершины графа назовем состояниями. Структура графа удовлетворяет требованиям: в нем имеются два выделенных состояния, называемых входом и выходом автомата; всякое состояние, кроме выхода, помечено символом из P; состояния, помеченные меткой p, назовем p-состояниями, а меткой q – q-состояниями; из любого состояния, кроме выхода, исходят две дуги, помеченные символами 0 и 1 соответственно.

Пусть ω – путь через автомат D, т.е. путь, ведущий из входа автомата D в его выход:

$\omega = (v_1,\varepsilon_1)\dots(v_i,\varepsilon_i)\dots(v_k,\varepsilon_k)$, $k\geq 1$, где v_i, $i=1,\dots,k$ состояния, а ε_i, $i=1,\dots,k$ метки дуг из них выходящие.

Слово L, несомое ω – путем, записывается следующим образом:

$L(\omega)=(p_1,\varepsilon_1)\dots(p_i,\varepsilon_i)\dots(p_k,\varepsilon_k)$, $k\geq 1$, где p_i, $i=1,\dots,k$ метка состояния v_i, а ε_i – метка дуги, выходящей из этого состояния.

p-проекцией слова L, где $p\in P$, назовем слово, полученное из L вычеркиванием всех пар с первой компонентой, отличной от p.

Автоматы D_1, D_2 *эквивалентны* ($D_1 \sim D_2$) тогда и только тогда, когда, каким бы ни был путь через один из них, существует путь через другой, обладающий свойством: для любого p, $p\in P$, p-проекция слова, несомого первым путем, совпадает с p-проекцией слова, несомого вторым путем.

Автоматы D_1, D_2 – *сильно эквивалентны* ($D_1 \approx D_2$) тогда и только тогда, когда, каким бы ни был путь через один из них, в другом существует путь с тем же несомым словом.

Пусть D – автомат, а v – состояние в нем. Рассмотрим все состояния, достижимые из v ориентированными путями и, воспринимая v как вход, получим автомат. Обозначим полученный автомат D(v) и назовем его подавтоматом автомата D со входом v. Состояния v_1 и v_2 одного или различных автоматов назовем эквивалентными (сильно эквивалентными), если эквивалентны (сильно эквивалентными) подавтоматы со входами v_1 и v_2 соответственно.

Обозначим через |D| – количество состояний автомата D, лежащих на путях через D.

Автомат D назовем *минимальным* в классе [D], если он принадлежит этому классу и $|D'|\leq|D''|$ для любого автомата D'' из [D].

Нахождение минимальных автоматов в классе эквивалентных будет осуществляться с привлечением системы фрагментных э.п..

Эти системы составлены из преобразований по замене одного фрагмента автомата другим фрагментом. Формальное описание таких систем дано в [8].

Ограничимся содержательным их описанием.

Фрагмент автомата – это его часть, порожденная некоторым множеством состояний автомата и всеми инцидентными им дугами. Состояния и инцидентные им дуги наследуют метки, присвоенные им в автомате.

Связь фрагмента с остальной частью автомата задается множеством *приходящих* в него дуг из состояний, не принадлежащих фрагменту и *исходящих* из него дуг, ведущих в состояния, ему не принадлежащие. Начало и конец каждой приходящей дуги, назовем *внешним* и, соответственно, *внутренним входами* фрагмента, а исходящей – *внутренним* и *внешним выходами* фрагмента.

Пусть даны фрагменты F_1, F_2 с непересекающимися множествами вершин. Если между приходящими в них дугами и, соответственно, между внешними выходами фрагментов установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее метки дуг, то, согласно [8], определенной является операция *замены* в автомате вхождения одного из фрагментов F_1, F_2 вхождением другого фрагмента. Она осуществляется подстановкой в автомате вместо приходящих дуг и внешних выходов одного фрагмента соответствующих дуг и выходов другого.

Фрагменты, допускающие операцию замены, называются *согласованными*.

Два согласованных фрагмента называются *эквивалентными*, если, какими бы ни были автомат и вхождение в него одного из согласованных фрагментов, операция замены его другим фрагментом является э.п..

Каждая пара эквивалентных фрагментов индуцирует множество э. п. автомата.

Система э. п. автоматов задается парами эквивалентных фрагментов. Последние разбиты на подмножества, каждое из которых обязано быть разрешимым и называется *аксиомой*.

Всякая пара фрагментов в системе не является ориентированной в силу обратимости операции замены фрагмента фрагментом.

Систему э.п. назовем *полной* в некотором классе автоматов, если для любых двух эквивалентных автоматов из этого класса, существует цепочка преобразований, принадлежащих системе э.п. и трансформирующих один из этих автоматов в другой.

Договоримся в рассматриваемых нами автоматах и во всех используемых преобразованиях не рассматривать состояния и дуги, которые не расположены на путях через автоматы. На рисунках они просто не изображаются. Для преобразования этой части автомата необходимы дополнительные аксиомы. Не рассматриваемые нами аксиомы предназначены для замены пустым фрагментом той части автомата, которая недостижима из входа, либо для замены пустым циклом, он изображен на рис. 1, той части , из которой недостижим выход автомата. Описание этих аксиом имеется в работах [5,8].

Рис. 1.

Обозначим M_0 – множество бесцикловых автоматов класса М.

Лемма 1. В множестве автоматов M_0 существуют классы эквивалентности с более, чем одним минимальным автоматом.

Для доказательства приведем пример двух различных минимальных эквивалентных автоматов, принадлежащих M_0. Такие автоматы изображены на рис. 2.□

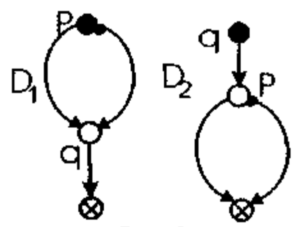


Рис. 2.

Отметим, что при изображении автомата, как на рис. 2, так и в последующем, используются соглашения: состояния автомата, отличные от его входа и выхода, изображаются полыми кружочками, вход – затушеванным кружочком, а выход – кружочком с крестиком; дуга, которой сопоставлено число 1, снабжается жирной точкой у основания; метки дуг опускаются; не изображаются дуги, ведущие в пустой цикл.

Приведем систему Т э.п., полную для класса M_0.

Она индуцируется аксиомами А0 и А1. Последние приведены на рис.3., где $x \in \{p, q\}$, а двойной стрелкой обозначено множество, приходящих в вершину дуг.

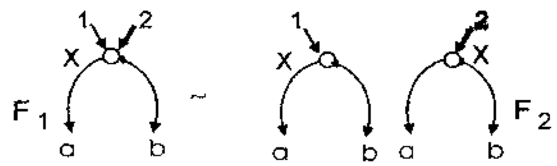
Аксиома A0 индуцирует преобразование, которое именуется *склейкой – расклейкой* сильно эквивалентных состояний автомата.

Аксиома A1 индуцирует преобразование, которое именуется *перестановкой состояний* в автомате, использующих различные ленты.

Преобразование, индуцированное некоторой аксиомой A, будем называть преобразованием по аксиоме A. Преобразование A, наделенное стрелкой вниз – A↓, означает, что фрагмент F_1 заменяется фрагментом F_2, а стрелкой вверх – A↑, означает, что фрагмент F_2 заменяется фрагментом F_1.

Легко проверить, что преобразования, индуцируемые аксиомами A0 и A1, являются э.п.

Аксиома A0



Аксиома A1

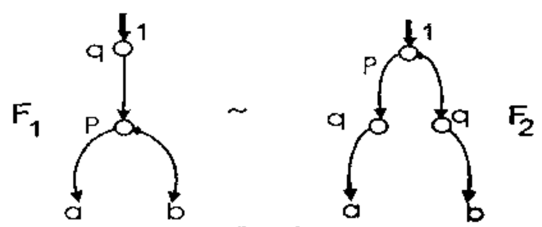


Рис. 3.

Для доказательства полноты системы э.п. в некотором множестве автоматов используется следующая стратегия. Любой автомат множества э.п. приводится к некоторой форме и доказывается, что такое представление в классе эквивалентности единственно. Тогда, в силу эквивалентности и обратимости всех используемых преобразований, любые два автомата множества, если они эквивалентны, трансформируемы один в другой.

Теорема 1. Система преобразований T является полной для множества автоматов M_0.

Используя описанную выше стратегию докажем полноту предложенной системы преобразований T в множестве M_0, предварительно введя ряд понятий и доказав леммы 2 и 3.

Автомат назовем *раскрытым*, если в любое его состояние, находящееся на пути через автомат, за исключением входа и выхода, приходит ровно одна дуга.

Преобразованиями A0↓ любой автомат D из M_0 можно трансформировать в эквивалентный ему раскрытый автомат.

p-проекцией автомата D назовем автомат, обозначим его $D|_p$, полученный из D корректным устранением q-состояний. Последнее осуществляется так: если преемником p-состояния является q-состояние, то его преемник объявляется преемником первого; это правило используется до тех пор, пока из D не устранятся все q-состояния.

Очевидна лемма.

Лемма 2. Если D_1, D_2 – эквивалентные раскрытые автоматы из M_0, то их p-проекции изоморфны.

Автомат назовем *q-упорядоченным*, если он раскрытый и к нему неприменимо преобразование A1↑.

Понятно, что любой раскрытый автомат из M_0 преобразованиями A1↑ трансформируем в эквивалентный q-упорядоченный автомат.

Лемма 3. Эквивалентные q-упорядоченные автоматы из M_0 – изоморфны.

Доказательство. Пусть D_1, D_2 – q-упорядоченные автоматы из [D], где D из M_0. Автоматы D_1, D_2 представляют из себя эквивалентные "деревья" со склеенными концами, причем их p-проекции, т.е. автоматы $D_1|_p$, $D_2|_p$, по лемме 2, изоморфны. Поэтому достаточно доказать совпадение слов несомых эквивалентными путями. Доказательство проведем от противного. Пусть ω_1, ω_2 – эквивалентные пути автоматов D_1,D_2 соответственно. Несомые ими слова, обозначим их соответственно через L_1,L_2, не совпадают. Тогда они могут быть представлены в виде $L_1=L_0'(p,\varepsilon)L_1'$, $L_1=L_0''(q,\varepsilon)L_2''$, где L_0' и L_0'' – изоморфные слова, p и q – метки тех первых состояний v_1 и v_2, на которых произошло несовпадение несомых слов. Состояния v_1 и v_2 эквивалентны, и имеют различные метки. Но тогда, на каждом пути, ведущем из состояния v_1 в автомате D_1, находится q-состояние. Это означает, что к автомату D_1 применимо преобразование A1↑. Последнее противоречит q-упорядоченности автомата D_1.□

Доказательство теоремы 1. Пусть D_1, D_2 из [D], где $D\in M_0$. Трансформируем автоматы D_1,D_2 э.п. системы T в q-упорядоченные. По лемме 3 они изоморфны. Но тогда, в силу обратимости э.п., любой из автоматов D_1,D_2 трансформируем в другой.□

2. МИНИМИЗАЦИЯ В МНОЖЕСТВЕ БЕСЦИКЛОВЫХ АВТОМАТОВ

Обозначим M_0 множество бесцикловых автоматов в M. Автомат называется *бесцикловым*, если множество путей через него конечно.

Приведем алгоритм ρ, который по любому автомату D из M_0 строит автомат ρ(D), минимальный в классе [D]. Он состоит из двух подалгоритмов ρ_1 и ρ_2. Первый минимизирует количество состояний, работающих с лентой p, а второй – с лентой q. Опишем возможность получения по построенному минимальному автомату ρ(D) всех минимальных в классе [D].

Нетривиальность решения рассматриваемой проблемы минимизации для автоматов множества M_0 показана на рис.4., где изображен бесцикловый автомат D и все минимальные, их три: D_1, D_2, D_3, ему эквивалентные.

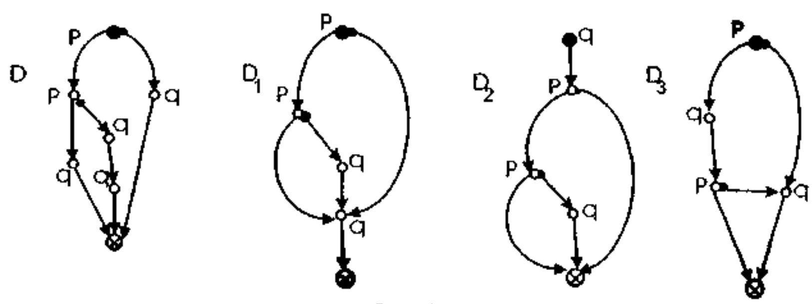


Рис 4.

Автомат D содержит два p-состояния и четыре q-состояния. Автоматы D_1, D_2, D_3 – содержат по два p и q-состояния.

Пусть D – некоторый автомат, а [D] – его класс эквивалентности.

Назовем автомат D' *p-минимальным* в классе [D], если D' из [D] и для любого автомата D" из [D], $|D'|_p| \le |D''|_p|$.

Опишем алгоритм ρ_1, который по любому автомату D, D из M_0, строит p-минимальный автомат в классе [D]. Покажем, что p-минимальный автомат определяется неоднозначно.

Алгоритм ρ_1

Шаг 1. преобразованиями A0↓ трансформируем автомат D в раскрытый автомат D_1;

Шаг 2. преобразованиями A1↑ трансформируем автомат D_1 в q-упорядоченный автомат D_2;

Шаг 3. преобразованиями A0↑ склеим в автомате D_2 все сильно эквивалентные состояния. Полученный автомат обозначим D_3, $D_3=\rho_1(D)$.

Теорема 2. Если D из M_0, то $\rho_1(D)$ является p-минимальным автоматом в классе [D].

Доказательство. p-состояния a_1, a_2, принадлежащие эквивалентным автоматам, назовем *подобными* и будем говорить, что одно из этих состояний подобно другому, если они принадлежат эквивалентным путям и в p-проекциях этих эквивалентных путей занимают одинаковые места.

Легко проверить справедливость следующих предложений:

Предложение 1. Для любого p-состояния одного из двух эквивалентных автоматов, в другом существует ему подобное.

Пусть автоматы D_1, D_2 получены из автомата D, D из M_0, после 1-го и, соответственно, 2-го шагов алгоритма ρ_1.

Предложение 2. Если a_1', a_2' – эквивалентные p-состояния автомата D_1, то подобные им p-состояния в автомате D эквивалентны либо совпадают, а в автомате D_2 – эквивалентны.

Предложение 3. Характеристика пары p-состояний быть подобными является транзитивной.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать, что для любых двух различных p-состояний a_1^*, a_2^* автомата $\rho_1(D)$, пара p-состояний a_1, a_2 автомата D, таких, что a_i^*, a_i, i=1,2 подобны, также различны.

В силу взаимно однозначного соответствия между эквивалентными путями рассматриваемых нами автоматов и предложения 1 следует существование таких состояний a_1'', a_2'' в автомате D_2, a_1', a_2' – в автомате D_1,и a_1, a_2 – в автомате D, что пары a_i, a_i'; a_i', a_i''; и a_i'', a_i^*, i=1,2 подобны. По предложению 3 пары a_i, a_i^*, i=1,2 – также подобны.

Из не эквивалентности p-состояний a_1^*, a_2^* следует не эквивалентность, а значит и несовпадение, p-состояний a_1'', a_2''. По предложению 2 не эквивалентны и различны пары p-состояний a_1', a_2' и a_1, a_2.□

Отметим, что существуют классы эквивалентности, в которых p-минимальный автомат определяется неоднозначно. Автоматы D, D_1 ,D_2 ,D_3 – приведенные на рис.4, являются p-минимальными в классе [D], причем алгоритм ρ_1, примененный к автомату D, выдает автомат D_2.

Тем не менее, справедлива

Лемма 3. Для любого автомата D, D из M_0, p-проекции минимальных автоматов класса [D] – изоморфны.

Доказательство. Пусть D_1, D_2 – различные p-минимальные автоматы класса [D]. Тогда различным p-состояниям одного автомата соответствуют различные, им подобные, p-состояния другого. Т.е. $D_1|_p$, $D_2|_p$. – изоморфны.□

p-минимальный автомат в классе эквивалентности в общем случае не является минимальным. Примером такого автомата может служить автомат D, изображенный на рис.5. Легко видеть, что $\rho_1(D)=D_1$. Автомат D_1 является минимальным в классе [D].

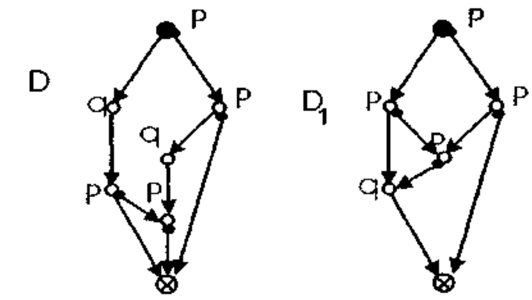


Рис. 5.

Обозначим через $[D]_p$ подкласс автоматов класса $[D]$, имеющих p-проекцию автомата D. Через $||D||$ обозначим число различных q-состояний автомата D, находящихся на путях через него.

Назовем автомат D' – *q-минимальным* в классе $[D]_p$, если для любого автомата D'' из $[D]_p$, $||D'||\le||D''||$.

Опишем алгоритм ρ_2, который по любому автомату D, D из M_0, строит автомат $\rho_2(D)$, q-минимальный в подклассе $[D]_p$.

Рассмотрим аксиому А.2. Она задается парой фрагментов, изображенных на рис. 6.

Фрагменты F_1 и F_2 содержат по m+k входов. Каждая двойная стрелка обозначает множество дуг, приходящих в состояние. Все внутренние входы являются q-состояниями. Двойные стрелки, направленные во внутренние входы фрагментов наделены метками $\alpha_1,..,\alpha_m$ и $\gamma_1,..,\gamma_k$. Они и определяют взаимно однозначное соответствие между

Аксиома А.2

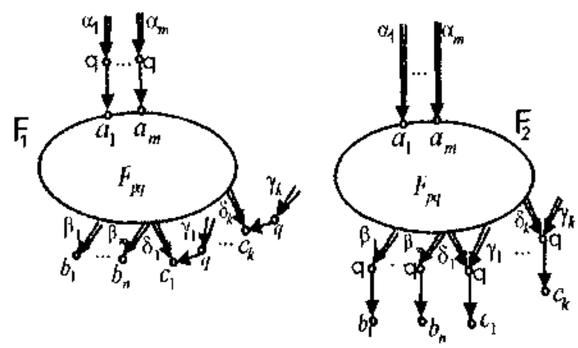


Рис. 6.

приходящими дугами, поскольку совпадение меток, приписанных этим стрелкам, означает наличие взаимно однозначного соответствия между дугами множеств сохраняющего метки дуг и состояния, из которых исходят эти дуги.

Внешние выходы фрагментов, а их n+k, разбиты на два множества, которые наделены метками b и c с индексами. Последние и определяют взаимно однозначное соответствие между выходами.

Фрагменты F_1,F_2 содержат один и тот же подфрагмент $F_{p,q}$, входы которого помечены символом a с индексами. Этот фрагмент может содержать как p-состояния, так и q-состояния.

Преобразование, индуцированное аксиомой А.2, назовем φ-преобразованием. Можно показать, что φ-преобразование является э.п.

При замене фрагмента F_2 на F_1 φ-преобразование будем обозначать φ↓, а при замене F_1 на F_2 – через φ↑.

φ-преобразование назовем *правильным*, если оно соответствует преобразованию φ↓ в случае, когда m>n, и преобразованию φ↑ в случае, когда n>m. Применение к автомату правильного φ-преобразования уменьшает в нем количество q-состояний.

Автомат, к которому неприменимо правильное φ-преобразование, назовем *предельным*.

Алгоритм ρ_2

Шаг 1. Если к автомату, поступившему на вход шага 1, применимо правильное φ-преобразование, то применить его и с вновь полученным автоматом вернуться к выполнению шага 1. В противном случае, автомат объявляется результатом алгоритма.

Применение к любому автомату D из M_0 правильного φ-преобразования уменьшает в нем количество q-состояний и сохраняет количество p-состояний, а значит после конечного числа применений правильных φ-преобразований мы непременно получим автомат, являющийся предельным.

Отметим, что предельный автомат определяется неоднозначно. Автоматы D_1, D_2, D_3, являются предельными для автомата D. (см. рис. 4)

φ-преобразование, в котором m=n, назовем *устойчивым.*

Теорема 3.

1.Предельные автоматы класса $[D]_p$ являются q-минимальными в нем.

2.В подклассе предельных автоматов класса $[D]_p$ устойчивое φ-преобразование образует полную систему э.п.

Доказательству теоремы предпошлем рассмотрение следующего свойства, присущего подобным q-состояниям автоматов класса $[D]_p$. Понятие подобия q-состояний дублирует аналогичное понятие, определенное ранее для p-состояний.

Рассмотрим пути эквивалентных автоматов D_1, D_2, изображенные на рис. 7.

Предположим, что $L_1L_1^* \sim L_2L_2^*$ и $L_1'L_1^* \sim L_2'L_2^*$.Через a_0, a_1, a_0' – обозначим q-состояния автоматов D_1, D_2, причем состояние a_0 находится на пути L_1, a_1 – на L_1^*, а a_0' – на L_2^*.

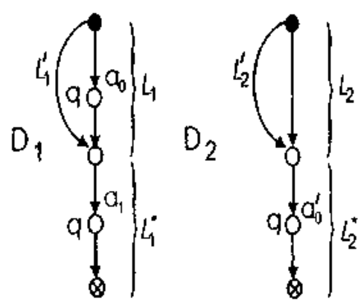


Рис. 7.

Справедливо предложение 4.

Предложение 4. Состояние a_0' не может быть одновременно подобным состоянию a_0 – на эквивалентных путях $L_1L_1^*$,$L_2L_2^*$ и состоянию a_1 на эквивалентных путях $L_1'L_1^*$,$L_2'L_2^*$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, из подобия состояний a_0, a_0' и наличия q-состояния a_1 на пути $L_1L_1^*$,следует наличие ей подобного состояния a_1' на пути $L_2L_2^*$. Причем, q-состояние a_1' находится после q-состояния a_0'.Но тогда, ввиду эквивалентности путей $L_1'L_1^*$ и $L_2'L_2^*$ на пути L_1^*, должно находиться q-состояние a_2, подобное состоянию a_1'. Причем, расположено оно после состояния a_1. Такое рассуждение можно продолжить до бесконечности, что будет противоречить конечности рассматриваемых путей.□

Доказательство теоремы 3. Обозначим через D' предельный автомат класса $[D]_p$, к которому неприменимо устойчивое φ↑-преобразование. Назовем его верхним предельным автоматом класса $[D]_p$. Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать единственность автомата D'.

Пусть D_1, D_2 – эквивалентные верхние предельные автоматы класса $[D]_p$. Тогда $D_1|p \approx D2|_p$. Докажем совпадение автоматов D_1, D_2, то есть докажем, что, если $L_1 \sim L_2$, то

$L_1=L_2$. Т.к. $L_1|_p=L_2|_p$, то достаточно доказать, что подобные q-состояния находятся между подобными p-состояниями. Докажем это для первых подобных q-состояний, расположенных на путях L_1 и L_2. Доказательство проведем от противного. Предположим на пути L_1 первое вхождение q-состояния расположено между i-ым и i+1 p-состоянием. Обозначим их p_i, p_{i+1}. А на пути L_2 подобное ему q-состояние расположено после состояния p_{i+1}. Случай, когда оно расположено до состояния p_i сводится к рассматриваемому переименованием путей.

Тогда в автомате D_2 на любом пути через автомат, ведущем из состояния p_{i+1}, встретится q-состояние.

На рис. 8 схематично изображена возникающая при этом ситуация. Обозначим множество встретившихся q-состояний через Q. Через $F(p_{i+1})$ обозначим фрагмент, содержащий все p-состояния этих путей от состояния p_{i+1} до состояний множества Q, включая само состояние p_{i+1}. Через $F'(p_{i+1})$ обозначим фрагмент автомата D_1, начинающийся в состоянии p_{i+1}, p-проекция которого совпадает с p-проекцией фрагмента $F(p_{i+1})$. Рассмотрим все пути автомата D_2, проходящие через q-состояния множества Q.

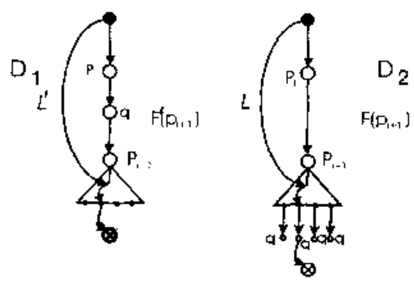


Рис. 8.

На рис. 8 изображен один такой путь L (в случае отсутствия такого пути автомат D_2 не будет верхним предельным). Рассмотрим множество эквивалентных им путей в автомате D_1. На рис.8. приведен путь L', эквивалентный пути L. Обозначим через Q' множество q-состояний в автомате D_1, подобных состояниям множества Q. Докажем, что все состояния множества Q' находятся до фрагмента $F'(p_{i+1})$. Предположим противное и рассмотрим случай, когда одно из q-состояний, обозначим его a_1, принадлежит фрагменту $F'(p_{i+1})$. Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично. Тогда в автомате D_1 (см. рис .9) существуют два различных пути $L_1L_1^*$ и $L_1'L_1^*$, проходящих через эту вершину a_1. Причем, L_1 проходит и через q-состояние, нахо p-состояниями p_i и p_{i+1}. Оно обозначено на рис. 8 через a_0. Эквивалентные им пути $L_2L_2^*$ и $L_2'L_2^*$ в автомате D_2 проходят через q-состояние множества Q. Оно обозначено через a_0'. На пути $L_2L_2^*$ оно подобно состоянию a_0, а на пути $L_2'L_2^*$ – состоянию a_1. По предложению 4 такого быть не может. А значит, множество состояний Q' находится до фрагмента $F'(p_{i+1})$.

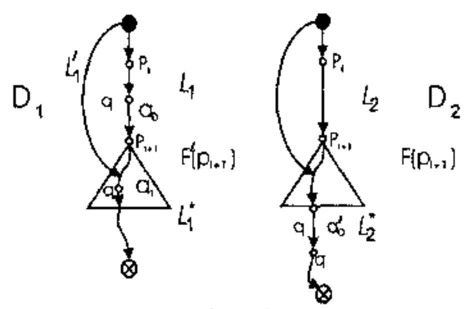


Рис. 9.

Отметим, что из справедливости предложения 4, также следует, что любые два q-состояния множества Q' не находятся на одном пути. Это означает, что множество Q' определяет входы некоторого фрагмента.

В автомате D_1 рассмотрим фрагмент F', входами которого являются состояния множества Q' и который заканчивается фрагментом F' (p_{i+1}). Через F обозначим фрагмент автомата D_2, p-проекция которого совпадает с p-проекцией фрагмента F',а предвыходами являются состояния множества Q. Тогда автомат D_2 не является верхним предельным, поскольку к нему применимо $\varphi\uparrow$–преобразование, для которого F_2=F. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.□

Обозначим через ρ – алгоритм последовательного применения к автомату подалгоритмов ρ_1 и ρ_2.

Пусть автомат D из M_0 и ρ(D)= $\rho_1(\rho_2(D))$.

Теорема 4. Автомат ρ(D) является минимальным в классе [D].

Доказательство. Преобразованиями A.0 – склейка-расклейка и φ-преобразованиями – перестановка q-состояний, из автомата ρ(D) можно получить любой другой автомат, ему эквивалентный. Поскольку отыскивается минимальный, а в нем нет эквивалентных состояний, т. е. он является тупиковым, то достаточно рассмотреть лишь такие цепочки преобразований, при которых после расклейки p-состояний, перестановка q-состояний превращает эти p-состояния в не эквивалентные. Но использование таких преобразований в автомате ρ(D) таково, что количество добавленных при расклейке p-состояний, в лучшем случае, может быть лишь компенсировано уменьшением количества q-состояний, правильными φ-преобразованиями. Действительно, пусть F фрагмент, к которому неприменимо φ-преобразование. F' – подфрагмент, отделение которого от F позволяет к оставшемуся подфрагменту F_1 применить φ-преобразование. Фрагмент F_1 изображен на рис. 6 и содержит m+k входов и n+k выходов. Пусть подфрагмент F', входами которого являются p-состояния с приходящими дугами из p-состояний, содержит S p-состояний. Тогда S не может быть меньше m, т.к. это означало бы, что автомат ρ(D) не является предельным. В нем возможны переносы q-состояний на входы фрагмента F' с уменьшением их общего количества. S не может быть и больше m, т.к. в этом случае в полученном после перестановок автомате количество не эквивалентных состояний будет больше, чем в автомате ρ(D). Таким образом, возможен лишь случай, когда S=m и при этом n=0. Только в этом случае в преобразованном автомате количество добавленных p-состояний компенсировано перестановкой q-состояний, а значит полученный автомат будет иметь столько состояний, сколько имеет автомат ρ(D).□

Опишем процесс получения всех минимальных автоматов в классе [D], где D из M_0.

По исходному автомату D можно построить минимальный в классе [D] автомат ρ(D). По автомату ρ(D), используя устойчивые φ-преобразования, можно построить все те минимальные автоматы класса [D], p-проекция которых совпадает с p-проекцией автомата ρ(D). Обозначим их $D_1, D_2,\ldots,D_k$, $k\geq 1$, где $D_1=\rho(D)$ и $D_1|_p = D_2|_p=\ldots= D_k|_p$. При доказательстве теоремы 4 было показано, что если D' минимальный автомат, для которого $|D'|_p| > |\rho(D)|_p|$, то его можно получить из некоторого автомата D_i, i=1,2,…,k используя лишь цепочку φ-преобразований, осуществляющую расклейку состояний в автомате с последующим применением φ-преобразования, которое направлено на нарушение эквивалентности состояния, возникшее во время их расклейки. Отыскание таких цепочек преобразований контролируется проверкой того, чтобы во вновь полученном автомате общее количество состояний было равно количеству состояний автомата ρ(D). Это позволяет не проверять вновь полученные состояния автоматов на эквивалентность, поскольку в этом случае они отсутствуют.

На рис.10. приведен пример автомата D_1, D_1 из M_0, для которого построены все минимальные автоматы класса [D_1]. Это автоматы D_2, D_3, D_4, D_5. Автомат D_2=ρ(D_1). D_3 получен из D_2 устойчивым φ-преобразованием, а значит $|D_2|=|D_3|$.

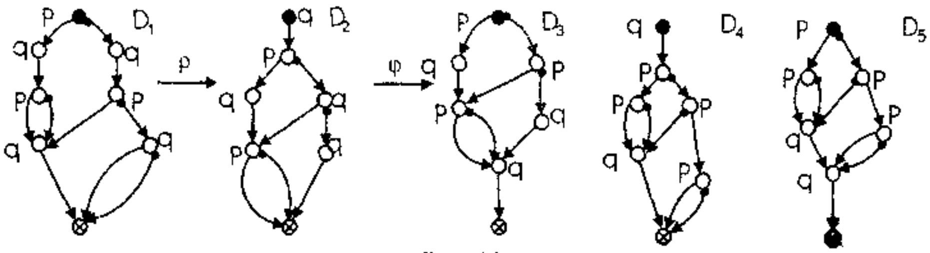


Рис 10

Что касается автоматов D_4 и D_5, то они получены, соответственно, из D_2 и D_3, увеличением количества p-состояний. $|D_4|_p| = |D_5|_p| > |D_2|_p| = |D_3|_p|$. Это увеличение компенсируется уменьшением количества q-состояний в автомате применением соответствующего правильного φ-преобразования. Последовательность преобразований, осуществляющих такую трансформацию автоматов D_2, D_3, в D_4, D_5, приведена на рис.11.

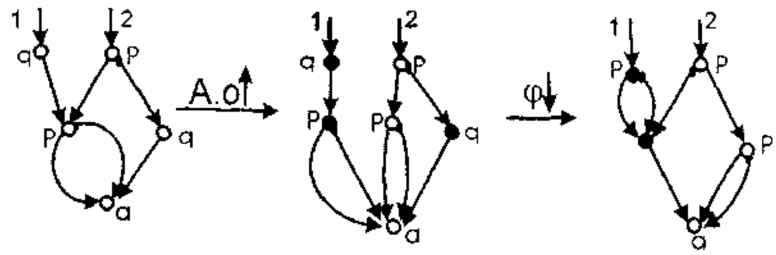


Рис. 11.

3. МИНИМИЗАЦИЯ В МНОЖЕСТВЕ АВТОМАТОВ С НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЦИКЛАМИ

Описывается рассматриваемое подмножество M двухленточных автоматов с непересекающимися циклами. Приводится полная система э.п в M.

Доказывается существование классов эквивалентности с бесконечным числом тупиковых автоматов.

Приводится алгоритм ρ^*, который по любому автомату D, D из M, строит минимальный автомат $\rho^*(D)$ в классе [D]. Алгоритм ρ^* состоит из двух подалгоритмов. Первый из них ρ_1^*, осуществляет p-минимизацию, а второй – ρ_2^*, q-минимизацию.

Описывается возможность получения по любому автомату D, D из M, всех минимальных в классе эквивалентности [D].

Автомат с *непересекающимися циклами* это автомат, не содержащий такого состояния v, что дуга из v с одной меткой принадлежит одному циклу, а с другой меткой – другому. Цикл - это путь в автомате, в котором совпадают начальные и конечные состояния.

Опишем систему преобразований T_1. Она индуцируется аксиомами B.0, B.1 и B.2. Аксиома B.0 индуцирует преобразование, которое именуем переносом дуги с одного состояния на другое, ему строго эквивалентное. Она приведена на рис.12, c, c_1 – строго эквивалентные состояния, $x \in \{p,q\}$.

Аксиома B.0

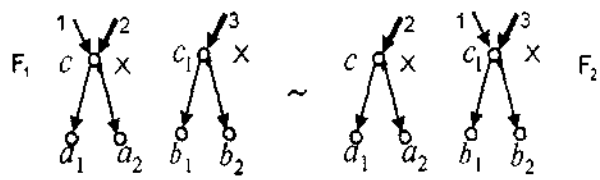


Рис 12.

Двойными стрелками обозначены множества дуг, приходящие в состояния. Эти множества могут быть и пустыми.

Аксиомы B.1 и B.2 приведены на рис.13. и 14. Они индуцируют преобразования, которые именуем перестановкой состояний в автомате.

Аксиома B.1

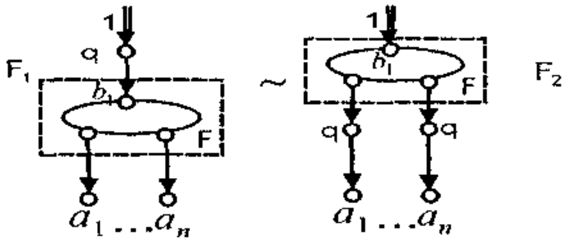


Рис. 13.

Подфрагмент F, участвующий во фрагментах F_1, F_2 аксиомы B.1, состоит из цикла, содержащего только p-состояния.

Во фрагментах F_1, F_2 аксиомы B.2 допускается совпадение состояния b_1 с одним из состояний a_1 или a_2.

Аксиома B.2

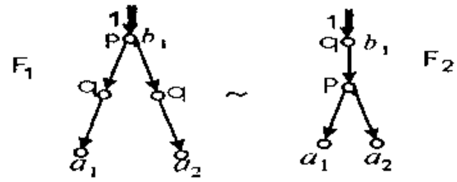


Рис. 14.

Легко видеть, что преобразования, индуцируемые аксиомами системы T_1, являются э.п.

Теорема 5. В множестве M система э.п. T_1 является полной.

Доказательство состоит в том, что любой автомат D, D из M, преобразованиями системы T_1 трансформируется в свернутый автомат. Доказывается, что в классе эквивалентности [D] свернутый автомат единственен.

Построение свернутого автомата осуществляется в три шага.

По-прежнему, через B1↑ будем обозначать преобразование, индуцируемое аксиомой B1 и при этом фрагмент F_1 заменяется на фрагмент F_2. Через B1↓ – преобразование, при котором фрагмент F_2 заменяется на F_1.

Шаг 1. По автомату D преобразованиями B.0 строится раскрытый автомат D_1.

Шаг 2. По автомату D_1 преобразованиями B1↑, B2↑ строится q-упорядоченный автомат D_2.

Шаг 3. В автомате D_2 преобразованиями B.0 склеиваются все сильно эквивалентные состояния. Полученный автомат D_3 объявляется свернутым.

Определим раскрытый автомат. Состояние автомата, принадлежащее циклу, назовем *входом цикла*, если в него входит дуга, не принадлежащая циклу, либо оно является входом автомата. Автомат назовем *раскрытым*, если: каждый его цикл имеет единственный вход и это p-состояние; во вход любого цикла направлена единственная дуга; все остальные состояния за исключением выхода, имеют по одной приходящей дуге.

Используя лишь конечное число преобразований B.0, по любому автомату D, D из M, можно построить раскрытый автомат D_1.

Раскрытый автомат назовем *q-упорядоченным,* если к нему неприменимы преобразования B1↑, B2↑.

По любому раскрытому автомату D_1, используя лишь конечное число преобразований B1↑, B2↑, можно получить q-упорядоченный автомат D_2.

Лемма 4. Эквивалентные состояния в q-упорядоченном автомате сильно эквивалентны.

Для доказательства леммы 4 определим ряд понятий и докажем некоторые утверждения.

Рассмотрим путь L, проходящий через состояния $v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k$, $k \geq 1$.

Назовем его *линейным участком*, если ни одно из состояний v_i, $i=0,1,\ldots,k-1$ не принадлежит циклу.

Путь L назовем *участком цикла*, если все его состояния v_i, $i=0,1,\ldots,k$, $k\geq 1$, принадлежат одному циклу.

Будем говорить линейный участок *завершается циклом*, если состояние v_k является входом цикла.

Пусть V' – множество состояний линейного участка, завершающегося циклом и все состояния самого цикла.

Утверждение 1. Состояния a_1, a_2, принадлежащие пути в автомате D и не принадлежащие некоторому множеству V' этого автомата, не эквивалентны.

Доказательство. Предположим, для определенности, что состояние a_1 на рассматриваемом пути в автомате, предшествует состоянию a_2. Тогда они одновременно не принадлежат: линейному участку; участку цикла; состояние a_1 – линейному участку, а a_2 – циклу, которым завершается этот линейный участок.

Это означает, что существует путь из состояния a_1 в состояние a_2, содержащий цикл, который предшествует состоянию a_2.

Назовем рангом состояния автомата максимальное число различных циклов, которые могут встретиться на пути из этого состояния в выход автомата. Переформулируем теорему 1 работы [5].

Утверждение 2. Состояния автомата различного ранга не эквивалентны.

Тогда ранг состояния a_1 больше ранга состояния a_2 и по утверждению 2 эти состояния не эквивалентны, что доказывает утверждение 1.

p-состояние автомата назовем q-заменяемым, если на любом пути из этого состояния в выход автомата находится q-состояние.

Утверждение 3. Если в раскрытом автомате существует q-заменяемое состояние, то автомат не является q-упорядоченным.

Доказательство. Пусть v q-заменяемое состояние. Докажем, что двигаясь из состояния v к выходу автомата непременно встретим фрагмент, к которому применимо либо преобразование B1↑, либо преобразование B2↑. Это будет означать, что автомат не является q-упорядоченным.

Проведем доказательство индукцией по рангу состояния v.

Пусть v имеет ранг 0. Тогда все пути, идущие из состояния v в выход автомата, не проходят через циклы. Двигаясь по некоторому пути из состояния v к выходу автомата, будем проверять тип приемников каждого встреченного p-состояния. При этом непременно встретится p-состояние, приемниками которого является только q-состояния, поскольку, иначе нашелся бы путь из состояния v в выход автомата, проходящий только через p-состояния. Обозначим через v' p-состояние с q-преемниками. Но тогда в автомате существует фрагмент с указанными состояниями, к которым применимо либо преобразование B1↑, либо преобразование B2↑. Начальный шаг индукции доказан.

Предположим, утверждение 3 верно для состояний v ранга k-1. Докажем его справедливость для состояний ранга k.

Проделаем путешествие из какого-либо состояния v ранга k к выходу автомата, сопоставляя при этом преемников каждого встреченного p-состояния.

Возможны случаи:

а) встретится p-состояние v, преемниками которого являются только q-состояния. Тогда фрагмент F_2, к которому может быть применено преобразование либо B1↑, либо B2↑, состоит из состояния v и q-состояний его преемников, если последние не являются входами цикла. Если одна из дуг q-состояния направлена в состояние v, то к автомату применимо преобразование B2↑, иначе B1↑ либо B2↑.

Если q-преемник является входом цикла, то его необходимо выделить из цикла преобразованием B.0, а затем, к полученному фрагменту, применить либо преобразование B1↑, либо – B2↑.

б) все встречаемые p-состояния в качестве хотя бы одного преемника имеют p-состояние. Легко видеть, что все такие p-состояния являются q-заменяемыми и среди них существует хотя бы одно, являющееся входом некоторого цикла. Обозначим его через v'. Если ранг состояния v' меньше k, то утверждение 3 доказано. Предположим, что его ранг равен k.

Возможны случаи:

1. цикл со входом v' содержит только p-состояния. Тогда, если все выходы цикла являются q-состояниями, фрагмент F_2 определяется следующим образом: он состоит из всех состояний цикла и q-состояний, являющихся внешними выходами цикла. При этом к фрагменту F_2 применимо преобразование B1 ↑. Если же один из выходов цикла является p-состоянием, то он является q-заменяемым, и ранг его равен k-1;

2. в цикле со входом v' имеется q-состояние. Тогда рассмотрим ближайшее ко входу цикла p-состояние, преемником которого является q-состояние цикла. Вторым преемником этого p-состояния так же является p-состояние. Обозначим его через v''. Легко видеть, что состояние v'' является q-заменяемым, и ранг его равен k-1.□

Доказательство леммы 4. Докажем, что эквивалентные состояния одновременно являются p-состояниями либо q-состояниями. Предположим противное. Тогда по утверждению 3 автомат не является q-упорядоченным, поскольку имеет q-заменяемое состояние.

Следствие леммы 4. Эквивалентные q-упорядоченные автоматы сильно эквивалентны.

Для доказательства достаточно предположить, что рассматриваемые автоматы являются подавтоматами некоторого q-упорядоченного автомата.□

Лемма 5. В классе эквивалентности [D], где D из M, свернутый автомат единственен.

Доказательство. Эквивалентные q-упорядоченные автоматы сильно эквивалентны. Сильно эквивалентные свернутые автоматы совпадают.□

Этим завершается доказательство теоремы 5.□

Теорема 6. Множество M содержит классы эквивалентности с бесконечным числом тупиковых автоматов.

Доказательство. На рис.15 приведен пример автомата D, класс эквивалентности которого [D], содержит бесконечное число тупиковых автоматов D_1, D_2….

Докажем, что представленные на рис. 15 автоматы D_i, i=1,2,….

1) эквиваленты;

2) являются тупиковыми.

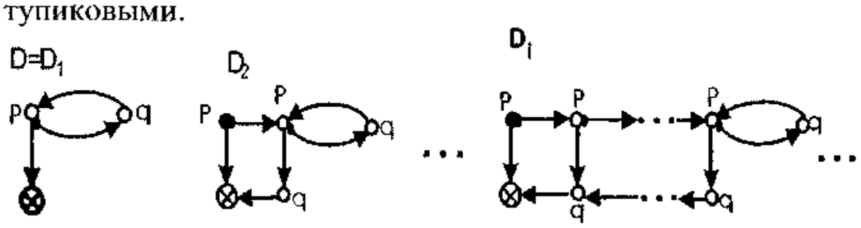


Рис. 15.

Докажем пункт 1). Любой автомат D_i, i=1,2,…, содержит фрагмент F, изображенный на рис. 16 а.

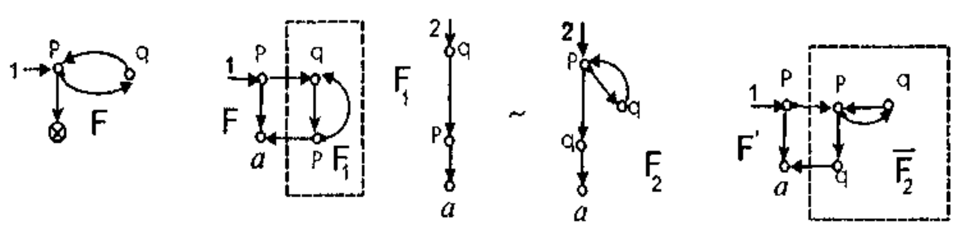


Рис 16.

Покажем, что фрагмент F э.п. системы T_1 можно преобразовать во фрагмент F', изображенный на рис.16 г. Тогда автоматы D_i, D_{i+1}, i=1,2,... эквивалентны, поскольку именно замена фрагмента F на F' в автомате D_i трансформирует его в автомат D_{i+1}.

Для преобразования фрагмента F во фрагмент F' необходимо:

- во фрагменте F, используя преобразование B.0, расклеить p-состояние, и перенести дугу, выходящую из q-состояния на копию p-состояния. Полученный фрагмент F*, изображен на рис. 15 б;
- в полученном фрагменте F* выделим подфрагмент F_1* (рис.15 б);
- используя преобразование B2↑, а оно задается фрагментами F_1*, F_2*, изображенными на рис. 15 в, заменим фрагмент F_1* фрагментом F_2*. Получим необходимый фрагмент F', изображенный на рис. 15 г.

Докажем пункт 2), что автомат D_i, i=1,2,... не содержит различных эквивалентных состояний, т.е. является тупиковым. Все p-состояния автомата D_i, а также q-состояния, принадлежащие циклу, назовем состояниями верхнего яруса, остальные – нижнего яруса:

- состояния верхнего яруса не эквивалентны состояниям нижнего яруса, т.к. любой путь, ведущий из состояния верхнего яруса в выход автомата, проходит через p-состояние, в то время, как пути, ведущие из состояний нижнего яруса в выход автомата, такого состояния не содержат;
- состояния верхнего яруса не эквивалентны между собой, т.к. у них не совпадают длины максимальных путей, ведущих из этих состояний в выход автомата;
- состояния нижнего яруса также не эквивалентны между собой. Из каждого такого состояния в выход автомата ведет единственный путь, длина которого не совпадает с длиной путей, ведущих из других состояний нижнего яруса.□

Обозначим через ρ_1* алгоритм, который по автомату D, D из M, строит свернутый автомат ρ_1*(D).

Справедлива теорема 7.

Теорема 7. Свернутый автомат является p-минимальным в своем классе эквивалентности.

Отметим, что p-минимальный автомат определяется неоднозначно, но p-проекции у эквивалентных p-минимальных автоматов совпадают.

Предложим, алгоритм ρ_2*, который в подклассе $[D]_p$ класса [D] по автомату D выдает q-минимальный автомат.

Он основан на использовании ψ-преобразования, которое определяется аксиомой B.3, которая изображена на рис.17.

Аксиома B.3

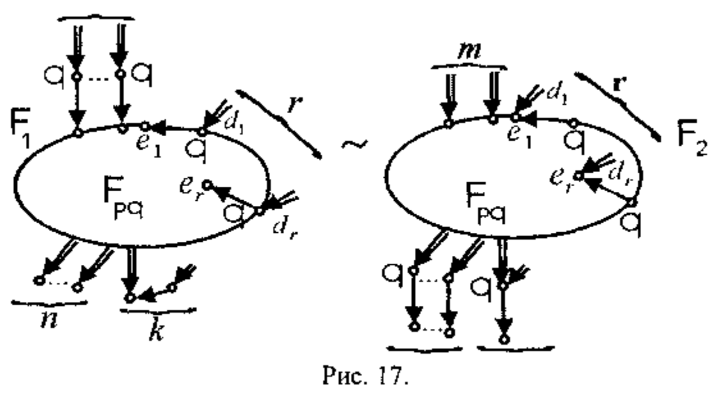


Рис. 17.

Аксиома B.3 отличается от аксиомы A.2 лишь тем, что подфрагменты $F_{p,q}$ могут содержать циклы. Поэтому во фрагменте F_1 могут быть входы, являющиеся q-состояниями, которые принадлежат циклам. Именно такие q-состояния обозначены во фрагменте F_1 символом d с индексом. Предположим, что фрагмент F_1 содержит r таких входов. Выходящие из таких q-состояний дуги направлены в состояния, которые обозначены символом e с индексом. Во фрагменте F_2 состояния с меткой e обращаются во входы фрагмента.

Преобразование, индуцированное аксиомой B.3, назовем ψ-преобразованием. ψ-преобразование для множества автоматов M играет такую же роль, как и φ-преобразование для множества M_0. Отметим, что ψ-преобразование можно заменить цепочкой преобразований индуцированных аксиомами B0, B1, B2.

Для ψ-преобразования определим понятия правильного и устойчивого ψ-преобразования. Определим понятие предельного и верхнего предельного автомата. Эти понятия вводятся по аналогии с понятиями, которые были введены ранее.

Через ρ_2^* обозначим алгоритм, который по автомату D строит предельный автомат $\rho_2^*(D)$.

Теорема 8.

1. $\rho_2^*(D)$ – q-минимальный автомат в подклассе $[D]_\rho$ класса [D].
2. ψ-преобразование является полной системой э.п. в подклассе $[D]_\rho$.

Обозначим через ρ^* алгоритм последовательного применения алгоритмов ρ_1^* и ρ_2^* к автомату D, D из M.

Справедлива

Теорема 9. Автомат $\rho^*(D)$ является минимальным в классе [D].

Наконец заметим, что процесс получения по заданному автомату D, где D из M, всех минимальных в классе [D] аналогичен описанию, который был сделан для автоматов множества M_0. Необходимо лишь преобразование, задаваемое аксиомой A.0, заменить на преобразование, задаваемое аксиомой B.0, а φ-преобразование – ψ-преобразованием.

В заключение приведем два примера минимизации автоматов множества M.

На рис. 18 автомат D_1 алгоритмом ρ^* переводится в минимальный автомат D_2. Затем ψ-преобразование позволяет получить еще один минимальный автомат D_3.

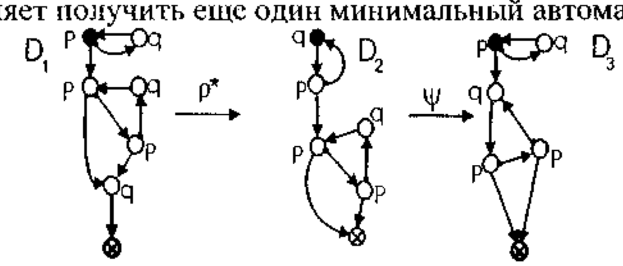


Рис. 18.

На рис.19 изображен автомат D и все минимальные класса [D], их три D_1, D_2, D_3.

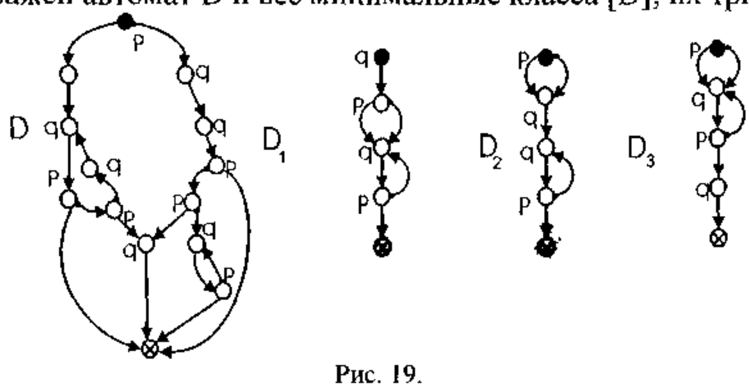


Рис. 19.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается обобщенная проблема минимизации вычислительных моделей, заключающаяся в нахождении по заданному объекту всех, ему эквивалентных и минимальных по заданным параметрам. Для некоторых классов конечных двухленточных детерминированных автоматов, когда минимизация осуществляется по числу состояний автомата, приводится решение обобщенной проблемы минимизации, основанное на построении полной системы эквивалентных преобразований.

Библиографический список

1. Rabin M.O., Scott D., Finite automata and their decision problems// IBM Journal of Research and Development, 1959, V. 3, № 2, P. 114-125. . (Русский перевод: Кибернетический сборник. 1962. № 4. С.58-91).
2. Bird R., The Equivalence Problem for Deterministic Two– tape automata//YCSS.1973.- Vol. 7, no.4, pp. 58-91.
3. Harju T. and Karhumaki J., The Equivalence of Multitape Finite Automata// Theor. Comput. Sci., 1991, V, 78, №2, P. 347-355.
4. Хачатрян В.Е. Однородные логические графы // Прикладная математика, изд-во Ереванского гос. Университета, Ереван, 1981.
5. Подловченко Р.И., Хачатрян В.Е., Чашин Ю.Г. Полная система эквивалентных преобразований для двухленточных автоматов с непересекающимися циклами //Программирование 2000. .№5. С.3-17.
6. Хачатрян В.Е., Полная система эквивалентных преобразований для многоленточных автоматов// Программирование, №1, 2003. С.62-77.
7. Tamm H., On Minimality and Size Reduction of One-Tape and Multitape Finite Automata // University of Helsinki, Helsinki. 2004.
8. Подловченко Р. И., Айрапетян М. Г. О построении полной системы эквивалентных преобразований схем программ. Программирование // №1, 1996. С. 3-29.

ON THE PROBLEM OF MINIMIZATION IN MODELS OF COMPUTATION.

V.E.Khachatrian, N.V. Sherbinina

The article deals with the problem of creating minimal representative of a given object in the class of its equivalents. An algorithm has been worked out which converts initial object into its minimal equivalent.

УДК 537.533.7

РАСЧЕТ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО И ДИФРАГИРОВАННОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В КРИСТАЛЛЕ

С.В. Блажевич[1], А.В.Носков[2]

1 - Белгородский государственный университет;
2 - Белгородский университет потребительской кооперации

В работе на основе динамической теории дифракции [1] в геометрии рассеяния Брэгга рассматриваются параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) и дифрагированное переходное излучение (ДПИ) релятивистских электронов, падающих на полубесконечный монокристалл. Получены аналитические выражения для спектрально-углового распределения ПРИ, ДПИ и слагаемого, являющегося результатом их интерференции, учитывающие ориентацию поверхности кристалла относительно системы дифрагирующих атомных плоскостей. Показано, что при фиксированном угле падения электрона на систему атомных плоскостей кристалла спектрально-угловые характеристики ДПИ существенно зависят от указанной ориентации входной поверхности и возможно создания таких условий, когда интерференция ПРИ и ДПИ оказывает существенное влияние на спектрально-угловое распределение излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Когда быстрая заряженная частица пересекает монокристалл, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, возникает параметрическое рентгеновское излучения (ПРИ) [2-4]. Различается случай геометрии