УДК 533.72

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Малай
Белгородский государственный университет

Проводится аналитическое решение нелинейного уравнения конвективной теплопроводности. Используя метод сращиваемых асимптотических разложений, получено поле температуры в окрестности неравномерно нагретой аэрозольной частицы.

1. Постановка задачи. Для расчета таких процессов в дисперсных потоках, как сушка, возгонка, термическое разложение, горение топлива, лазерное зондирование атмосферы и т.д., необходимо знать распределение температуры в потоке. В имеющихся в этом направлении работах, например, [1-3] найдено лишь первое, стоксовское приближение для полей скорости без учета влияния движения среды, т.е. при решении уравнения теплопроводности не учитывались конвективные члены. Это не позволяет более точно оценить поля скорости и давления в потоке и вычислить силу сопротивления, действующую на частицы в потоке.

Озеен [4], Праудмен и Пирсон [5] для гидродинамической задачи, а Акривос и Тейлор [6] для тепловой – показали, что вдали от частицы инерционные и конвективные члены становятся одного порядка с членами молекулярного переноса и поэтому обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, так как уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить точное единое решение, однородно справедливое для всей области течения.

Целью данной работы является определение для данного случая поле температуры, учитывающее конвективные члены. Для этого нам необходимо решить следующие уравнения

$$\rho_e c_{pe}(U_e \cdot \nabla)T_e = \lambda_e \Delta T_e, \qquad (1.1)$$

$$\Delta T_i = -q_i / \lambda_i, \qquad (1.2)$$

с граничными условиями

$$r = R,\quad T_e = T_i,\ \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}, \qquad (1.3)$$

$$r \to \infty,\quad T_e \to T_\infty, \qquad (1.4)$$

$$r \to 0,\quad T_i \neq \infty. \qquad (1.5)$$

Здесь R – радиус частицы, ρ_e – плотность, T – температура, λ_e – коэффициент теплопроводности, q_i – плотность тепловых источников внутри частицы, зависящих от сферических координат r и θ $(0 \le \theta \le \pi)$, c_{pe} - теплоемкость при постоянном давлении; индексы "e" и "i" здесь и далее относятся к газу и частице соответственно, а индексом "∞"- обозначены значения физических величин, характеризующих внешнюю среду в невозмущенном потоке.

В граничных условиях (1.3) на поверхности $(r = R)$ частицы учтено равенство температур и непрерывность потоков тепла.

На большом расстоянии от капли $(r \to \infty)$ справедливы граничные условия (1.4), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $r \to 0$, учтено в (1.5).

При решении уравнения (1.1) нам необходимо знать распределение скорости в окрестности аэрозольной частицы, поэтому к уравнениям (1.1)-(1.2) и граничным условиям (1.3)-(1.5) нужно добавить

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e,\quad \operatorname{div} \mathbf{U}_e = 0, \qquad (1.6)$$

$$r = R,\ U_r^e = 0,\ U_\theta^e = K_{ts} \frac{\nu_e}{R T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}, \qquad (1.7)$$

$$r \to \infty, \quad \mathbf{U}_e \to U_\infty \cos\theta\, \mathbf{e}_r - U_\infty \sin\theta\, \mathbf{e}_\theta,$$
$$P_e \to P_\infty, \qquad (1.8)$$

где P_e – давление, U_r^e и U_θ^e - компоненты массовой скорости газа $\mathbf{U}_e$, K_{ts} - коэффициент теплового скольжения [7], ν_e - коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ - единичные векторы сферической системы координат, U_∞ - величина скорости набегающего потока.

В граничных условиях (1.7) на поверхности $(r = R)$ частицы учтены условия непроницаемости для нормальной и тепловое скольжения для касательной компонент массовой скорости $\mathbf{U}_e$

Тепловое скольжение газа возникает из-за неравномерного нагрева поверхности за счет неоднородного распределения по объему частицы внутренних источников тепла [7]. Неоднородный нагрев поверхности может быть обусловлен, например. протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.п.

Задача формулируется следующим образом: найти распределение температуры в окрестности аэрозольной частицы при ее обтекании плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$, внутри которой действуют неравномерно распределенные по объему частицы внутренних источников тепла, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [5-6,9-10] Предполагается, что размеры аэрозольной частицы таковы, что ее можно считать крупной частицей [7] и обтекание происходит при малых перепадах температуры в окрестности частицы, т.е. когда $(T_e - T_\infty)/T_\infty << 1$.

Обезразмерим уравнения и граничные условия, введя безразмерную координату, скорость и температуру следующим образом:

$$y_k = x_k / R, \quad t = T/T_\infty, \quad \mathbf{V} = \mathbf{U}/U_\infty.$$

При $R_e = (\rho_e U_\infty R)/\mu_e << 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики и теплопереноса следует искать в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(0)} + \varepsilon\, \mathbf{V}^{(1)} + \ldots, \quad t = t_0 + \varepsilon t_1 + \ldots,$$
$$\varepsilon = R_e. \qquad (1.9)$$

Решение уравнения, описывающее распределение температуры вне аэрозольной частицы, как отмечалось выше, будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений [5-6,9-10]. Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры ищем в виде

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta), \quad f_0(\varepsilon) = 1, \qquad (1.10)$$

$$t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta), \qquad (1.11)$$

где $\xi = \varepsilon y$ - «сжатая» радиальная координата [9].

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (1.12)$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область, то есть

$$t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta). \qquad (1.13)$$

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности капли (1.3), следует искать в виде аналогичном (1.10)

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y,\theta). \qquad (1.14)$$

Относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается лишь, что порядок их малости по ε увеличивается с ростом n.

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_e^*

$$P_r(V_r^{e*}\frac{\partial t_e^*}{\partial \xi}+\frac{V_\theta^{e*}}{\xi}\frac{\partial t_e^*}{\partial \theta})=\Delta^* t_e^*,\ t_e^*\to 1$$

при $\xi\to\infty$. (1.15)

и соответственно $\mathbf{V}_e^*(\xi,\theta)=\mathbf{e}_z+\varepsilon\,\mathbf{V}_{e1}^*(\xi,\theta)+\ldots$ (1.16)

Здесь Δ^* - осесимметричный оператор Лапласа, полученный из Δ заменой y на ξ,

$V_r^{e*}=V_r^{e*}(\xi,\theta)$, $V_\theta^{e*}=V_\theta^{e*}(\xi,\theta)$, $t_e^*=t_e^*(\xi,\theta)$,

P_r – число Прандля и $\mathbf{e}_z$ - единичный вектор в направлении оси z.

2. Поля температур вне и внутри аэрозольной частицы. При нахождении силы, действующей на неравномерно нагретую частицу, мы ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти нужно знать поля температур вне и внутри аэрозольной частицу. Для этого необходимо решить уравнения (1.1)-(1.2) с соответствующими граничными условиями.

Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (1.11). В данном случае, очевидно, задаче удовлетворяет решение

$$t_{eo}^*=1. \tag{2.1}$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения (1.10). При $\varepsilon=0$ имеем

$$\Delta t_{eo}=0, \tag{2.2}$$

с граничными условиями $t_{eo}=t_{io}$,

$$\lambda_e\frac{\partial t_{eo}}{\partial y}=\lambda_i\frac{\partial t_{io}}{\partial y}\ \text{при}\ y=1. \tag{2.3}$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$t_{eo}=\Gamma_o+\frac{\gamma}{y}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\Gamma_n}{y^{n+1}}+\gamma_n y^n)P_n(\cos\theta). \tag{2.4}$$

Здесь γ, γ_n и Γ_n - постоянные интегрирования, $P_n(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра [11].

Постоянные интегрирования γ,γ_n и Γ_n определяем из условия сращивания. Для сращивания внешнее решение должно быть разложено в ряд по ξ. Затем значения констант устанавливается из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\xi\to 0$ и членов разложения (2.4) при $y\to\infty$. Для нулевых приближений сращивание тривиально; получаем $\Gamma_o=1$, $\Gamma_n=\gamma_n=0$ (n=1, 2, ...). Следовательно,

$$t_{eo}(y)=1+\frac{\gamma}{y}. \tag{2.5}$$

При дальнейшем решении задачи нам необходимо знать поле температуры внутри частицы. Подставляя (1.14) в уравнение (1.2), получаем следующее общее решение для $t_i(y,\theta)$, удовлетворяющее конечности решения при $y\to 0$

$$t_i(y,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n t_{in}(y)P_n(\cos\theta), \tag{2.6}$$

где $t_{in}(y)$ – функция, зависящая от радиальной координаты и имеющая вид (2.7)

$$t_{in}(y)=\{B_n y^n+\frac{1}{(2n+1)y^{n+1}}\int_1^0\psi_n(y)y^n dy$$
$$+\frac{1}{2n+1}[y^n\int_1^y\frac{\psi_n(y)}{y^{n+1}}dy-$$
$$-\frac{1}{y^{n+1}}\int_1^y\psi_n(y)y^n dy]\}. \tag{2.7}$$

Здесь

$$\psi_n(y)=-\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty}y^2\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}q_i P_n(\cos\theta)\,d(\cos\theta)$$
$$(n\ge 0).$$

В дальнейшем нам потребуются выражения для функций $t_{io}(y)$ и $t_{i1}(y)$, которые равны

$$t_{io}(y)=\{B_o+\frac{1}{4\pi RT_\infty\lambda_i y}\int_V q_i dV$$
$$+\int_1^y\frac{\psi_0}{y}dy-\frac{1}{y}\int_1^y\psi_0 dy\}, \tag{2.8}$$

$$t_{i1}(y)=\{B_1 y+\frac{1}{4\pi R^2 T_\infty \lambda_i y^2}\int\limits_V q_i z\,dV$$

$$+\frac{1}{3}[y\int\limits_1^y \frac{\psi_1}{y^2}dy-\frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \psi_1\, y\,dy]\}. \qquad (2.9)$$

В (2.8) – (2.9) интегрирование ведется по всему объему частицы, $z = r\cos\theta$.

Подставляя в (2.3) выражения (2.5), (2.8) имеем

$$\gamma = t_s - 1,\quad B_o=(1-\frac{\lambda_e}{\lambda_i})(t_s-1).$$

Здесь $t_s = T_s/T$, T_s - средняя температура поверхности частицы. определяемая формулой (2.10)

$$\frac{T_s}{T_\infty}=1+\frac{1}{4\pi R\lambda_e T_\infty}\int\limits_V q_i dV. \qquad (2.10)$$

В (2.10) интегрирование ведется по всему объему аэрозольной частицы.

При нахождении первого приближения для внешнего разложения (1.8) необходимо сначала определить явный вид коэффициента $f_1^*(\varepsilon)$ во внешнем разложении Для этого в решении (2.5) перейдем к внешней переменной. Тогда их (2.5) следует, что $f_1^*(\varepsilon)=\varepsilon$. Следовательно, первое приближение для внешнего разложения следует искать в виде

$$t_{e1}^* = \varepsilon t_{e1}^*. \qquad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (1 15), учитывая (1.16) и удерживая члены порядка ε, получаем

$$\Lambda t_{e1}^*=0,\ \Lambda = P_r\Delta^* - x\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{1-x^2}{\xi}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$x=\cos\theta, \qquad (2.12)$$
$$\xi\to\infty,\ t_{e1}^*\to 0.$$

Общее решение уравнения (2.12) имеет вид [12]

$$t_{e1}^* = \exp\{\frac{P_r}{2}\xi x\}(\frac{\pi}{P_r\xi})^{1/2}\cdot$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n K_{n+1/2}(\frac{P_r\xi}{2})P_n(x). \qquad (2.13)$$

$$K_{n+1/2}(\frac{P_r\xi}{2})=(\frac{\pi}{P_r\xi})^{1+1/2}\exp\{-\frac{P_r\xi}{2}\}\cdot$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!m!(P_r\xi)^m}$$

Здесь $K_{n+1/2}(\frac{P_r\xi}{2})$ - модифицированная функция Бесселя [12]. Произвольные постоянные интегрирования L_n должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (2.13) при $\xi\to 0$ и функции (2.5) при $y\to\infty$. Нетрудно установить, что $L_0=\gamma P_r/\pi$, $L_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$t_{e1}^*(\xi,\theta)=\frac{\gamma}{\xi}\exp\{\frac{1}{2}P_r\xi(x-1)\}. \qquad (2.14)$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Из (2.14) видно, что $f_1(\varepsilon)=\varepsilon$. Таким образом, имеем следующее двучленное внутреннее разложение

$$t_e(y,\theta)=t_{eo}(y)+\varepsilon t_{e1}(y,\theta). \qquad (2.15)$$

Для t_{e1} и t_{i1} в двучленном внутреннем разложении получаем из (1.1) – (1.5) следующую задачу

$$P_r V_r^e\frac{\partial t_{eo}}{\partial y}=\Delta t_{e1}, \qquad (2.16)$$

$$t_{i1}(y)=\{B_1 y+\frac{1}{4\pi R^2 T_\infty\lambda_i y^2}\int\limits_V q_i z\,dV$$
$$+\frac{1}{3}[y\int\limits_1^y\frac{\psi_1}{y^2}dy-\frac{1}{y^2}\int\limits_1^y\psi_1\, y\,dy]\}.$$

$$y=1,\qquad t_{e1}=t_{i1},\quad \lambda_e\frac{\partial t_{e1}}{\partial y}=\lambda_i\frac{\partial t_{i1}}{\partial y}.$$

Чтобы определить поведение $t_{e1}(\infty,\theta)$, срастим двучленные внутреннее и внешнее разложения

$$t_e(y,\theta)=t_{eo}(y)+\varepsilon t_{e1}(y,\theta),$$
$$t_e^*(\xi,\theta)=\varepsilon\frac{\gamma}{\xi}\exp\{\frac{1}{2}P_r\xi(x-1)\},$$

имеем

$$t_{e1}(\infty,\theta)=\frac{\omega}{2}(\cos\theta-1),\quad \omega=P_r\gamma. \qquad (2.17)$$

Из (2.16) видим, что для определения t_{e1} необходимо сначала найти поле скорости, т.е. решить гидродинамическую задачу.

3. Определение скорости. Общее решение уравнений гидродинамики (1.6), удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности (т.е. при $y\to\infty$), имеет вид [10]

$$V_r^e(y,\theta)=\cos\theta\left(1+\frac{A_1}{y^3}+\frac{A_2}{y}\right),$$

$$V_\theta^e(y,\theta)=-\sin\theta\left(1-\frac{A_1}{2y^3}+\frac{A_2}{2y}\right),$$

$$p_e(y,\theta)=1+\frac{A_2}{y^2}\cos\theta. \qquad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.16), имеем следующее уравнение для функции t_{e1}

$$\Delta t_{e1}=-\frac{\omega}{y^2}G(y)\cos\theta. \qquad (3.2)$$

Здесь $G(y)=(1+\frac{A_1}{y^3}+\frac{A_1}{y})$, $\omega=P_r\gamma$.

Решение t_{e1} ищем в виде

$$t_{e1}=[\zeta(y)+\tau_e(y)\cos\theta], \qquad (3.3)$$

с краевыми условиями

$$\zeta(y)\to-\frac{\omega}{2},\quad \tau_e(y)\to\frac{\omega}{2}\quad \text{при } y\to\infty, \qquad (3.4)$$

$$\zeta=0,\quad \tau_e=\text{const}\quad \text{при } y=1.$$

Подставляя (3.3) в (3.2), убеждаемся, что переменные разделяются и

$$\zeta(y)=\frac{\omega}{2y}(1-y),$$

а τ_e удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\tau_e}{dy^2}+\frac{2}{y}\frac{d\tau_e}{dy}-\frac{2}{y^2}\tau_e=-\frac{\omega}{y^2}G. \qquad (3.5)$$

Общее решение уравнения (3.5), удовлетворяющее краевым условиям (3.4), имеет вид

$$t_{e1}(y,\theta)=\frac{\omega}{2y}(1-y)+ +\left\{\frac{\Gamma}{y^2}++\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{A_2}{2y}-\frac{A_1}{4y^3}\right)\right\}\cos\theta, \qquad (3.6)$$

Здесь

$$\Gamma=\frac{RJ}{\lambda_i T_\infty\delta}+\frac{\omega}{2\delta}\left[\frac{A_1}{2}\left(1+3\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)-A_2\left(1+\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)-1\right],$$

$$\delta=1+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i},\quad J=\frac{1}{V}\int_V q_i z\,dV,\quad V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Таким образом, в первом приближении по ε нами определены поля температур вне и внутри аэрозольной частицы.

Поскольку нами определены поля температур, то мы можем найти постоянные интегрирования A_1 и A_2, входящие в выражения для скорости (3.1), и, в частности, вычислить силу сопротивления, действующую на неравномерно нагретую частицу. Она определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы [8] и имеет следующий вид

$$F=-\varepsilon 6\pi R\mu_e\left[\frac{2}{3}K_{ts}\frac{\mu_e}{t_s}\left(\frac{RJ}{\lambda_i T_\infty\delta}+\frac{3\omega}{8\delta}\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)\right]e_z. \qquad (3.7)$$

Выражение (3.7) можно записать и через формулу Стокса

$$F=-\frac{2}{3}K_{ts}\frac{\mu_e}{t_s}\left(\frac{RJ}{\lambda_i T_\infty\delta}+\frac{3\omega}{8\delta}\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)F_s e_z, \qquad (3.8)$$

где $F_s=6\pi R\mu_e U_\infty$ – формула Стокса, $\omega=P_r\gamma$, $J=\frac{1}{V}\int_V q_i z\,dV$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $\int_V q_i z\,dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников.

Формула (3.7) позволяет при известном распределении по объему тепловых источников учесть влияние движения среды на величину силы сопротивления F, действующей на неравномерно нагретую аэрозольную частицу.

Из этой формулы видно, что на величину F будет оказывать влияние величина и направление дипольного момента плотности тепловых источников $\int_V q_1 z dV$. Если, например, нагрев поверхности частицы происходит за счет поглощения электромагнитного излучения, то дипольный момент может быть как отрицательным (большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к потоку излучения), так и положительным (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы). Это зависит от оптических свойств частицы Учитывая, что величина $(3\omega\lambda_e/8\delta\lambda_i)$ положительна, а величина дипольного момента может быть как положительной, так и отрицательной, то отсюда будет меняться и величина силы сопротивления.

Кроме того, из полученных формул видно, что эта сила зависит и от теплопроводности аэрозольной частицы. При $\lambda_i \to \infty$ вклад движения среды в общую силу, при фиксированной величине дипольного момента плотности темповых источников, стремятся к нулю.

При $\omega = 0$ полученные выше формулы переходят в формулы работы [3]. В тех случаях, когда частица поглощает излучение как черное тело с помощью формул (3.7), можно непосредственно оценить вклад движения среды в силу сопротивления. Когда частица поглощает излучение как черное тело, поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\tau << R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной τ равна

$$q_i(r,\theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\tau}\cos\theta o\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, R - \tau \le r \le R, \\ 0,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.9)$$

где I_0 - интенсивность падающего излучения.

С учетом (3.9) имеем следующие выражения

$$\int_V q_1(r,\theta) z\, dV = -\frac{2}{3}\pi R^3 I_0,$$

$$\int_V q_1(r,\theta)\, dV = \pi R^2 I_0.$$

Таким образом

$$F = K_{ts}\frac{\mu_e}{3t_s}\frac{R}{\lambda_i\delta T_\infty}(1 - \frac{3P_r}{16})F_s I_0 e_z. \quad (3.10)$$

Здесь $t_s = 1 + \frac{R I_0}{4\lambda_e T_\infty}$.

Для иллюстрации вклада движения среды, т.е. учета конвективных членов, в силу сопротивления F были проведены численные оценки по формуле (3.10) для частиц борированного графита, взвешенных в воздухе при

$$T_\infty = 300\,K,\ K_{ts} = 1.15,\ P_r = 0{,}708,$$

$$\lambda_i = 55\,Вт/м\cdot град,\ R = 15\cdot 10^{-6}\,м,$$

$P_e = 10^5$ Па от интенсивности падающего излучения. Численные оценки показали, что максимальный относительный вклад составляет около 14 % при $I_0 = 7\times10^{-3}$ Вт/см^2.

Библиографический список

1. Hidy G.M. and Brock J.R Photophoresis and the Descent of Particles into the Lower Stratosphere // J Geophysical Research, 1967. Vol. 72. P. 455-460.
2. Gorelov S.L. Thermophoresis and Photophoresis in a Rarefied Gas //Fluid Dynamics, 1976. Vol. 11 P. 800-804
3. Кутуков В.Б., Щукин Е.Р., Яламов Ю.И. О фотофоретическом движении Аэрозольной частицы в поле оптического излучения // ЖТФ. – 1976. Т. 46. № 3. – С. 626-627.
4. Oseen C W. Uber die Sstokes'sche Formel und uber eine verwandtl Aufgabe in der Hydrodynamik //Ark Math. Astron Fys., 1910. Bd. 6. № 29.
5. Praudman L., Pearson J.B.A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder //J. Fluid Mech., 1957. Vol. 2. P.3, P. 237-262
6. Acrivos A., Taylor T.D. Heat and mass transfer from single spheres in stokes flow //J. Phys. Fluids, 1962 Vol. 5. No. 4. P. 387-394.

7 Галоян В.С., Яламов Ю И Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 207 с

8 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М Гидродинамика – М.: Наука, 1986 – 733 с

9 М. Ван-Дайк Методы возмущений в механике жидкости. - М.: Мир, 1967 – 310 с.

10. Хаппель Дж., Бреннер Г Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.– М.: Мир, 1976.

11 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. – 735 с.

12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Фм, 1961. – 703 с.

УДК 531 1

НЕКАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ (РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА С НУЛЕВЫМ СПИНОМ)

Г. К. Хомяков
«Хартон», г. Харьков

Математический формализм, предложенный в [1] распространяется на релятивистский случай движения частицы с нулевым спином. Описание эволюции динамических переменных и условий квантования представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени. В нерелятивистском приближении рассмотрение согласуется с нестационарным уравнением Шредингера.

1. Релятивистским уравнением для частицы с нулевым спином, соответствующим нерелятивистскому уравнению Шредингера, является уравнение Клейна-Гордона [2]. В случае свободного движения частицы с массой m ее волновая функция X должна удовлетворять уравнению

$$\left(\Box + \left(\frac{m \cdot c}{\hbar}\right)^2\right) \cdot X = 0 \qquad (1)$$

где $\Box$ - оператор Даламбера, c - скорость света, $\hbar$ =h/2π-постоянная Планка.

2. Для построения тензорного уравнения, соответствующего уравнению (1), запишем 4-вектор смещения как

$$ds = (dx, dy, dz, i\ c \cdot dt), \qquad (2)$$

а 4 – импульс, соответственно,

$$p = \left(p_x, p_y, p_z - E'/i \cdot c\right) \qquad (3)$$

Приращение функции действия тогда

$$dS = p \cdot ds = p_x \cdot dx + p_y \cdot dy + p_z \cdot dz - E' \cdot dt$$

и для свободно движущейся частицы волна де Бройля, удовлетворяющая уравнению (1), будет

$$X = Exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \left(p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z - E' \cdot t\right)\right). \qquad (4)$$

Если соответствующий 4-вектору импульса (3) инвариант, содержащий динамические переменные – импульс и энергию,

$$m^2 c^2 = -p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - \left(-E'/ic\right)^2$$

подставить в (1), то видно, что уравнение Клейна-Гордона является Sp (следом) тензорного уравнения

$$-\hbar^2 \frac{d}{ds} grad_s z_s = p_s p_s \cdot Z_s, \qquad (5)$$

где d/ds и $grad_s$ есть (∂/∂x, ∂/∂y, ∂/∂z, ∂/ic∂t),

$p_s p_s$ - 4-диада, построенная на (3).

3. Аналогично [1] системе уравнений в частных производных (5) можно сопоставить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, например,

$$-\hbar^2 \frac{dR_s}{d\tau} = p_s p_s \cdot Z_s \cdot \frac{ds}{d\tau}$$
$$\frac{dZ_s}{d\tau} = \left(R_s \cdot \frac{ds}{d\tau}\right), \qquad (6)$$