7 Галоян В.С., Яламов Ю И Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 207 с
8 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М Гидродинамика – М.: Наука, 1986 – 733 с
9 М. Ван-Дайк Методы возмущений в механике жидкости. - М.: Мир, 1967 – 310 с.
10. Хаппель Дж., Бреннер Г Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.– М.: Мир, 1976.
11 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. – 735 с.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Фм, 1961. – 703 с.

УДК 531 1

НЕКАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ (РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА С НУЛЕВЫМ СПИНОМ)

Г. К. Хомяков
«Хартон», г. Харьков

Математический формализм, предложенный в [1] распространяется на релятивистский случай движения частицы с нулевым спином. Описание эволюции динамических переменных и условий квантования представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени. В нерелятивистском приближении рассмотрение согласуется с нестационарным уравнением Шредингера.

1. Релятивистским уравнением для частицы с нулевым спином, соответствующим нерелятивистскому уравнению Шредингера, является уравнение Клейна-Гордона [2]. В случае свободного движения частицы с массой m ее волновая функция X должна удовлетворять уравнению

$$\left(\Box + \left(\frac{m \cdot c}{\hbar}\right)^2\right) \cdot X = 0 \qquad (1)$$

где $\Box$ - оператор Даламбера, c - скорость света, $\hbar$ =h/2π-постоянная Планка.

2. Для построения тензорного уравнения, соответствующего уравнению (1), запишем 4-вектор смещения как

$$ds = (dx, dy, dz, i\ c \cdot dt), \qquad (2)$$

а 4 – импульс, соответственно,

$$p = \left(p_x, p_y, p_z - E'/i \cdot c\right) \qquad (3)$$

Приращение функции действия тогда

$$dS = p \cdot ds = p_x \cdot dx + p_y \cdot dy + p_z \cdot dz - E' \cdot dt$$

и для свободно движущейся частицы волна де Бройля, удовлетворяющая уравнению (1), будет

$$X = Exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \left(p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z - E' \cdot t\right)\right). \quad (4)$$

Если соответствующий 4-вектору импульса (3) инвариант, содержащий динамические переменные – импульс и энергию,

$$m^2c^2 = -p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - \left(-E'/ic\right)^2$$

подставить в (1), то видно, что уравнение Клейна-Гордона является Sp (следом) тензорного уравнения

$$-\hbar^2 \frac{d}{ds} grad_s z_s = p_s p_s \cdot Z_s, \qquad (5)$$

где d/ds и $grad_s$ есть (∂/∂x, ∂/∂y, ∂/∂z, ∂/ic∂t),

$p_s p_s$ - 4-диада, построенная на (3).

3. Аналогично [1] системе уравнений в частных производных (5) можно сопоставить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, например,

$$-\hbar^2 \frac{dR_s}{d\tau} = p_s p_s \cdot Z_s \cdot \frac{ds}{d\tau}$$

$$\frac{dZ_s}{d\tau} = \left(R_s \cdot \frac{ds}{d\tau}\right), \qquad (6)$$

где τ - собственное время частицы, а $R_s = grad_s Z_s$.

Через R_s и Z_s можно определить не зависящий от нормировки Z_s квантовый 4-импульс $P_s = i\hbar\, grad_s(LnZ_s) = -i\cdot \hbar R_s/Z_s$.

4. 4-вектор p_s получается при решении соответствующей системы уравнений динамики [3]

$$\frac{dp_s}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m\cdot u) = K,$$

где $u=ds/d\tau$ – 4-вектор скорости

$$(u_i = v_i\big/\sqrt{1-\beta^2},\ i=1,2,3;$$

$$u_4 = i\cdot c\big/\sqrt{1-\beta^2};\ \beta = v/c).$$

K-4 – вектор силы Минковского. Для случая движения частицы с зарядом q в электромагнитном поле

$$K_\mu = \frac{q}{c}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}(u_\nu\cdot A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right],$$

где A - 4-вектор потенциала электромагнитного поля.

5. Если α-совокупность параметров, фиксирующих состояние при t=0, то волновая функция X уравнения (1) может быть представлена через $Z_S(s,\alpha)$ и некоторую амплитуду распределения $\rho(\alpha)$

$$X(s) = \int \rho(\alpha)\cdot Z_S(s,\alpha)\cdot d\alpha. \qquad (7)$$

Поэтому в рассматриваемой схеме X(s) описывает ансамбль частиц. Естественно потребовать, чтобы для стационарных состояний функция Zs удовлетворяла таким же граничным условиям конечности, непрерывности и однозначности, каким удовлетворяет X(s).

6. В нерелятивистском пределе уравнение (5) должно согласовываться с нерелятивистским уравнением Шредингера. Действительно, если положить

$$Z_S = Z\cdot Exp\left(-i\cdot\frac{m\cdot c^2}{\hbar}\cdot t\right)$$

и взять Sp от обеих частей уравнения (5) то получим

$$-\hbar^2\cdot\Delta Z - \hbar^2\cdot\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial(ict)^2} + \frac{2}{(ic)^2}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t}\cdot\left(-i\cdot\frac{m\ c^2}{\hbar}\right) + \frac{Z}{(ic)^2}\cdot\left(-i\cdot\frac{m\cdot c^2}{\hbar}\right)^2\right] =$$

$$= p_{cl}^2\cdot Z + \left(-\frac{mc^2+E_{cl}}{ic}\right)^2\cdot Z,$$

где p_{cl} и E_{cl} – нерелятивистские импульс и энергия соответственно.

Слагаемые в квадратных скобках имеют существенно различную величину: первое – порядка квадрата энергии связи частицы, второе – порядка энергии связи, умноженной на энергию покоя частицы, третье – порядка квадрата энергии покоя. Поэтому первым слагаемым можно пренебречь в силу его малости. Если дополнительно учесть, что $E_{cl}=p_{cl}^2/2m+V$, то получим, что Z удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера

$$i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial Z}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\cdot Z$$

7. Таким образом, в работе показано, что для релятивистского уравнения Клейна-Гордона может быть построена соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в совокупности с уравнениями релятивистской динамики дает полное описание движения микрочастицы.

Библиографический список

1. Хомяков Г К Неканоническая формулировка квантовой механики на базе расширения шредингеровского описания движения (настоящий сборник)
2. Мессиа А . Квантовая механика - М · Наука, 1978 – Т. 1. – 480 с
3. Гольдстейн Г . Классическая механика Изд. 2. – М Наука, 1975. – 415 с.