16. Колтунов И.А., Чаркина Л.Я., Монастырев А.П. и др. Обработка изображений. Избранные методы и алгоритмы. Препринт 26-88.ФТИНТ. Харьков, 1988.

17. Малая Л.Т., Яблучанский Н.И, Рудинский О.О., Колтунов И.А., Кондратьева Л.М., Монастырев А.П., Чаркина Л.Я. Возможности использования комплекса программ распознавания образов РОСА для обработки медицинской информации. Харьков, 1987, 19 стр. Препринт ФТИНТ АН УССР, №12-87.

18. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен.М. Мир, 1976, 559 стр.

19. Колтунов И.А., Кондратьева Л.М., Кочарян Е.В. и др. Комплекс программ РОСА. Харьков, 1986, 48 стр. Препринт. ФТИНТ АН УССР, №9-86.

20. Веркин Б.И., Коноводченко В.Н. и др. Сверхпроводниковый ИК-радиометр. Тепловые приемники излучения. Л. Изд-во ГОИ, 1980, стр. 144-146

21. J.Koltunov, A.Maximov, I Meitin et al. Determination of temperature and/or emissivity function of objects by remote sensing. International Patent WO 99/27336, 03.06.99.

22. Alexander Koltunov, Joseph Koltunov, and Eyal Ben-Dor Adaptive recognition under static and dynamic environment assumptions.- in Infrared Technology and Applications XXIX, Proc. SPIE v.5074, Aerosense - 2003 Symposium, (Orlando, FL), 21-25 April, 2003.

23. J.Koltunov, A.Koltunov Dynamic Detection Model and its applications: in Ifrared Technology and Applications XXIX. Proc SPIE 5074, Aerosense-2003. Symposium, (Orlando,FL), April, 2003.

24. Белгородоведение.Под. ред. В.А. Шаповалова. Белгород, 2002,410 с.

25. Хрисанов В.А., Петин А.Н., Яковчук М.М. Геологическое строение и полезные ископаемые Белгородской области. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2000, 250 с.

УДК 681.5.015.8

ЦИФРОВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.М. Перлов

Основные соотношения

Введём обозначения

$$F(R,x) = (2\pi R)^{-1}\left(\frac{\sin(Rx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$ - ядро Фейера;

$$\sigma_R(x,f) = \int_{-\pi}^{\pi} F(R,t) f(x+t)dt$$ - R-я сумма Фейера функции $f()$ в точке x.

Теорема 1.

Пусть функция $f(x)$, $x \in (-\infty,\infty)$ обладает свойствами:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\Delta x) < \infty, \forall \Delta x > 0; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty \quad (1)$$

тогда для $\forall t>0$

$$\lim_{R\to\infty} t \int_{-\infty}^{\infty} F(R,xt) f(x)dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jx_t), x_t = \frac{2\pi}{t} \quad (2)$$

Доказательство.

Вследствие (2) существует интеграл

$$t\int_{-\infty}^{\infty}F(R,xt)f(x)dt=\int_{-\infty}^{\infty}F(R,y)f(y/t)dy=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\int_{-(j+1)\pi}^{-j\pi}F(R,y)f(y/t)dy+\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}F(R,y)f(y/t)dy\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\int_{(j+1)\pi}^{j\pi}F(R,y)f(y/t-jx_t)dy+\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}F(R,y)f(y/t)dy\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{(j-1)\pi}^{(j+1)\pi}F(R,y)\psi_j(y)dy=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F(R,y)\psi_j(y)dy=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_R(0,\psi_j),$$

где функция $\psi_j(x)$ определена следующим образом:

$$\psi_j(x)=\begin{cases}f(x/t-jx_t),(j-1)\pi<x<j\pi,\\ f(x/t),j\pi\le x\le(j+1)\pi;\end{cases}\qquad(3)$$

$$\psi_j(x+2\pi k)=\psi_j(x)$$

Предпоследнее равенство в приведённой цепочке тождественных преобразований следует из 2π-периодичности подинтегральных функций.

Нетрудно убедиться, что из определения функции $\psi_j()$ *следуют равенства*

$$\psi_j(-0)=\begin{cases}f(-kx_t),j=2k;\\ f((k+1)x_t),j=2k+1\end{cases}$$

$$\psi_j(+0)=\begin{cases}f(kx_t),j=2k;\\ f(-(k+1)x_t),j=2k+1\end{cases}$$

Применим теорему Фейера: $\sigma_R(0,\psi_j)\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}[\psi_j(-0)+\psi_j(+0)]/2$.

Вследствие (1) далее корректны действия с рядами:

$$t\int_{-\infty}^{\infty}F(R,xt)f(x)dt=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_R(0,\psi_j)\xrightarrow[R\to\infty]{}\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_{2k}(-0)+\psi_{2k}(+0)+$$

$$+\psi_{2k+1}(-0)+\psi_{2k+1}(+0)]/2=\sum_{k=0}^{\infty}[f(-kx_t)+f(kx_t)+\qquad(4)$$

$$+f(-(k+1)x_t)+f((k+1)x_t)]/2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kx_t)$$

Теорема доказана.

В [1] было доказано соотношение вида (2) для функции $f(x)$, являющейся спектральной плотностью стационарного случайного процесса.

Рассмотрим функцию $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n),\ x\in E_n$, обладающую свойствами

$$f\in L^1(E_n),\qquad(5)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\dots,k\Delta x_i,\dots,x_n)<\infty;\ \forall i,\ \forall\Delta x_i>0,\qquad(6)$$

$$f(x_1,x_2,\dots,-x_i,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n);\ i=1,2,\dots,n.\qquad(7)$$

Из (5) следует существование преобразований Фурье

$$c(t)=\int\limits_{E_n} e^{\imath(t,x)}(2\pi)^{-n}f(x)dx,\ t\in E_n \tag{8}$$

$$f(x)=\int\limits_{E_n} e^{-\imath(t,x)}c(t)dt. \tag{9}$$

где $(t,x) = t_1x_1 + \quad + t_nx_n$.

Теорема 2.

Пусть $f(x),\ x\in E_n$ обладает свойствами (5)-(7), тогда

$$\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}\cdots\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right)c(j_1t_1,\dots,j_nt_n)\xrightarrow[R_1\quad R_n\to\infty]{} \sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{\infty}f(j_1x_1,\dots,j_nx_n),\ x_k=\frac{2\pi}{t_k},k=1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Доказательство.

Обозначим

$$S(t)=\left(\prod_{k=1}^{n} t_k/R_k\right)\sum_{j_1=0}^{R_1-1}\sum_{k_1=0}^{R_1-1}\cdots\sum_{j_n=0}^{R_n-1}\sum_{k_n=0}^{R_n-1}c((j_1-k_1)t_1,\dots,(j_n-k_n)t_n). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что

$$S(t)=\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}\cdots\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left[\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right]c(j_1t_1,\dots,j_nt_n). \tag{12}$$

Выведем также другое выражение для S(t). Предварительно отметим, что

$$\sum_{m=0}^{R-1}\sum_{n=0}^{R-1}e^{\imath(m-n)x}=\left[\frac{\sin(Rx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2=2\pi RF(R,x). \tag{13}$$

После подстановки (8) в (11), учитывая (13), получаем

$$\begin{aligned}S(t)&=\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\prod_{k=1}^{n}F(R_k,x_kt_k)dx=\\&=t_n\int_{-\infty}^{\infty}F(R_n,x_nt_n)\dots\left[t_1\int_{-\infty}^{\infty}f(x)F(R_1,x_1t_1)dx_1\right]dx_2\dots dx_n\end{aligned} \tag{14}$$

Функция $f(x)$ обладает свойством (1) по каждому из аргументов.

Теперь, используя (2) последовательно сначала для сомножителя в квадратных скобках в (14), затем для интегралов по $x_2,\ x_3,\ \ ,\ x_n$, получаем

$$S(t)\xrightarrow[R_1,\ \ ,R_n\to\infty]{}\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{\infty}f(j_1x_1,\dots,j_nx_n).$$

Этим и равенством (12) теорема доказана.

Отметим следующий факт [2].

Пусть ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j$ имеет конечную или бесконечную сумму, тогда справедливо соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{j=-R}^{R}(1-j/R)a_j=\lim_{R\to\infty}R^{-1}\sum_{j=0}^{R-1}\sum_{i=-j}^{j}a_i=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j. \tag{15}$$

Так как

$$c(t_1,\ldots,t_n)\xrightarrow[|t_k|\to\infty]{}0, k=1,2,\ldots,n$$

ряд

$$\sum_{j_k=-\infty}^{\infty}c(j_1t_1,\ldots,j_kt_k,\ldots,j_nt_n), k=1,\ldots,n$$

имеет конечную или бесконечную сумму. Но тогда, в соответствии с (15), в (10) слева можно перейти к пределу. При этом получается многомерный вариант формулы суммирования Пуассона:

$$\begin{gathered}\left(\prod_{k-1}^{n}t_k\right)\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{\infty}c(j_1t_1,\ldots,j_nt_n)=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{\infty}f(j_1x_1,\ldots,j_nx_n),\\ x_k=\frac{2\pi}{t_k}, k=1,2,\ldots,n;\end{gathered} \tag{16}$$

из которой следует, что функция $c(t)$ имеет свойство (6). Очевидно также, что $c(t)$ – чётна по каждому из аргументов.

Заметим теперь, что при доказательстве теоремы 2, кроме свойств (6), (7) использовалось не «всё» свойство (5) абсолютной интегрируемости $f(x)$, а лишь одно из следствий из него – существование интеграла (8). Но из (5) также следует и существование интеграла (9), поэтому функция $c()$ обладает всеми необходимыми свойствами для применения Теоремы 2 и существования соотношения, обратного (10):

$$\begin{gathered}\sum_{j_1=-(R_1-1)}^{R_1-1}\cdots\sum_{j_n=-(R_n-1)}^{R_n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(1-|j_k|/R_k)\right)f(j_1x_1,\ldots,j_nx_n)\xrightarrow[R_1\ ,R_n\to\infty]{}\\ \left(\prod_{k=1}^{n}t_k\right)\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{\infty}c(j_1t_1,\ldots,j_nt_n), x_kt_k=2\pi, k=1,2,\ldots,n.\end{gathered} \tag{17}$$

Рассмотрим практическое применение полученных соотношений.

Вычисление преобразований Фурье чётных функций

Рассмотрим функцию $f(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$, обладающую свойствами (5)-(7). Одномерные варианты соотношений (10), (17) и (16) таковы:

$$\lim_{R\to\infty} t\left\{c(0)+2\sum_{j=1}^{R-1}(1-j/R)c(jt)\right\} = f(0)+2\sum_{j=1}^{\infty} f(jx_t), \tag{18}$$

$$\lim_{R\to\infty} t^{-1}\left\{f(0)+2\sum_{j=1}^{R-1}(1-j/R)f(jx_t)\right\} = c(0)+2\sum_{j=1}^{\infty} c(jt), \tag{19}$$

$$t\left\{c(0)+2\sum_{j=1}^{\infty} c(jt)\right\} = f(0)+2\sum_{j=1}^{\infty} f(jx_t), \tag{20}$$

где $x_t=\dfrac{2\pi}{t}$

Поскольку ряды в (18)-(20) сходятся, можно подобрать такие значения $\mathcal{X}_0, \mathcal{T}_0$, что с необходимой точностью выполняются соотношения

$$t\left\{c(0)+2\sum_{j=1}^{R_c}(1-j/R_c)c(jt)\right\} \approx f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f} f(jx_t), \tag{21}$$

$$t^{-1}\left\{f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}(1-j/R_f)f(jx_t)\right\} \approx c(0)+2\sum_{j=1}^{R_c} c(jt); \tag{22}$$

$$t\left\{c(0)+2\sum_{j=1}^{R_f} c(jt)\right\} = f(0)+2\sum_{j=1}^{R_c} f(jx_t), \tag{23}$$

где

$$R_c=[T_0/t],\ R_f=[X_0/x_t], \tag{24}$$

[a] - целая часть a.

Зададим некоторое натуральное N_c. Положим $t=T_0(N_c+1)/N_c$, тогда $R_c=[N_c/(N_c+1)]$, и из (22)-(24)

$$\hat{c}(0)=t^{-1}\left\{f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}\alpha_j f(jx_t)\right\}, \tag{25}$$

где символ ^ далее обозначает оценку соответствующей величины.

Пусть теперь $t=k_1(\mathcal{T}_0/\mathcal{N}_c),\ k_1\in K_1=\{k:[\mathcal{N}_c/k]=1\}$ тогда из (22)-(24)

$$\hat{c}\,(t)=t^{-1}\left\{f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}\alpha_j f(jx_t)\right\} - \hat{c}\,(0)/2.$$

Для $t = k_2(T_0/N_c),\ k_2 \in K_2 = \{k\ [N_c/k] = 2\}$

$$\hat{c}(t)=t^{-1}\left\{f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}\alpha_j f(jx_t)\right\} - \hat{c}(2t) - \hat{c}(0)/2.$$

Общий вид алгоритма вычисления значений преобразования Фурье вместе с (25) таков:

$$t_k=k(\mathcal{T}_0/\mathcal{N}_c),\ x_k=2\pi/t_k,\ R_f=[\mathcal{X}_0/x_k],\ R_k=[\mathcal{N}_c/k];\ k=\mathcal{N}_c,\ \mathcal{N}_c-1,\dots,1; \tag{26}$$

$$\hat{c}(t_k)=t_k\left(f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}\alpha_j f(jx_t)\right)-\sum_{j=2}^{R_k}\hat{c}(jt_k)-\hat{c}(0)/2.$$

Алгоритм (25), (26) заключается в следующем:

1. задаются параметры $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{T}_0$, для которых соответственно функции $f(x)$, $c(t)$ малы;

2. задаётся натуральное N_c - параметр, определяющий количество вычисляемых оценок значений преобразования Фурье $\hat{c}(0)$, $\hat{c}(\mathcal{T}_0/N_c)$, $\hat{c}(2\mathcal{T}_0/N_c)$,..., $\hat{c}(\mathcal{T}_0)$;

3. вычисляется оценка $\hat{c}(0)$;

4. в порядке убывания $k=N_c, N_c-1,...,1$ вычисляются оценки $\hat{c}(k\mathcal{T}_0/N_c)$.

Параметр α_j в (25)-(26) равен 1, если в основе алгоритма – приближённая формула суммирования Пуассона, $\alpha_j = 1 - j/R_f$, если в основе алгоритма соотношение (22).

Приведём теперь алгоритм решения обратной задачи – восстановления исходной функции (вычисления оценок её значений) по оценкам $\hat{c}(0)$, $\hat{c}(\mathcal{T}_0/N_c)$, $\hat{c}(2\mathcal{T}_0/N_c)$,..., $\hat{c}(\mathcal{T}_0)$.

Аналогично прямому алгоритму (25)-(26) обратный основан на соотношении (21) или (23).

Зададим натуральный параметр N_f, имеющий тот же смысл, что и N_c. Обратный алгоритм таков:

$$x=x_0>\mathcal{X}_0,\ t_0=2\pi/x_0,\ R_c=[\mathcal{T}_0/t_0],$$
$$\hat{f}(0)=t\left(\hat{c}(0)+2\sum_{j=1}^{R_c}\alpha_j\hat{c}_{in}(jt_0)\right), \tag{27}$$

$$x_k=k(\mathcal{X}_0/N_f),\ t_k=2\pi/x_k,\ R_c=[\mathcal{T}_0/t_k],\ R_k=[N_f/k];\ k=N_f,\ N_f-1,...,1;$$
$$\hat{f}(x_k)=t_k\left(\hat{c}(0)/2+\sum_{j=1}^{R_c}\alpha_j\hat{c}_{in}(jt_k)\right)-\sum_{j=2}^{R_k}\hat{f}(jx_k)-\hat{f}(0)/2. \tag{28}$$

Где $\hat{c}_{in}$ – интерполированные значения по узлам $\hat{c}(0)$, $\hat{c}(T_0/N_c)$, $\hat{c}(2T_0/N_c)$,..., $\hat{c}(T_0)$; $\alpha_j=1$ или $\alpha_j=1-j/R_c$.

Разумеется, если исходная функция задана поточечно, в прямом алгоритме (25)-(26) вместо $f()$ также должны стоять интерполированные значения $f_{in}()$. Такая модификация алгоритма будет представлена в следующем разделе.

Алгоритмы вида (25)-(26), (27)-(28) обладают двумя основными свойствами: отсутствием тригонометрических функций и рекуррентностью. По-видимому, было бы удобно, учитывая второе свойство, назвать такие алгоритмы рекуррентным преобразованием Фурье (РПФ).

Программная реализация РПФ

Исследовались оба варианта алгоритмов: $\alpha_j = 1$, $\alpha_j = 1 - j/R_f$ – для прямого алгоритма (25)-(26) и $\alpha_j = 1$, $\alpha_j = 1 - j/R_c$ – для обратного алгоритма (27)-(28). Далее будем обозначать эти варианты номерами 1 и 2 соответственно.

Алгоритм РПФ был реализован для трёх пар функций:

$$f_1(x)=(1+x^2)^{-1},\ c_1(t)=0.5e^{-|t|}; \tag{29}$$

$$f_2(x)=\frac{0.4}{0.16+(x-1)^2}+\frac{0.4}{0.16+(x+1)^2},\ c_2(t)=0.5e^{-0.4|t|}\cos t. \quad (30)$$

$$f_3(x)=\frac{\cos(x/2)}{0{,}49+x^2},\ c_3(t)=\begin{cases} e^{-0{,}35}ch(0{,}7t)/1{,}4; t\le 0{,}5; \\ e^{-0{,}7t}ch(0{,}35)/1{,}4; t>0{,}5 \end{cases} \quad (31)$$

Вычислялись прямое и обратное РПФ. На значения функции $f_i(x)$ накладывались некоррелированные аддитивные помехи с дисперсией σ^2 и нулевым средним. Работа алгоритма повторялась 100 раз для каждой пары и для каждого значения σ^2.

Вычислялись промежуточные показатели точности решения прямой и обратной задач:

$$\Delta c_m^n = 100\% \left[\sum_{k=0}^{N_c} |\hat{c}_m^n(t_k)-c_m(t_k)| / \sum_{k=0}^{N_c} |c_m(t_k)| \right]$$

$$\Delta f_m^n = 100\% \left[\sum_{k=0}^{N_f} |\hat{f}_m^n(x_k)-f_m(x_k)| / \sum_{k=0}^{N_f} |f_m(x_k)| \right]$$

где m = 1, 2, 3 – номер пары функций (29)-(30) соответственно; n = 1,...,100 – номер вычислительного эксперимента для m-й пары; $\hat{c}_m^n(t_k), \hat{f}_m^n(t_k)$ - оценки $c_m(t_k)$, $f_m(x_k)$ соответственно в n-м вычислительном эксперименте.

Итоговые показатели точности

$$\Delta c_m = 0{,}01\sum_{n=1}^{100}\Delta c_m^n, \Delta f_m = 0{,}01\sum_{n=1}^{100}\Delta f_m^n$$

Усреднённые интегральные показатели точности представлены в таблицах 1-3. Верхние индексы 1, 2 показателей точности соответсвуют 1-му и 2-му вариантам алгоритмов соответственно.

Таблица 1

Точность РПФ и обратного РПФ для функций (29)

Параметры алгоритма	$T_0=20.0,\ N_c=20;\ X_0=20.0,\ N_f=20$			
σ^2	0.0	0.0001	0.0005	0.001
Δc_1^1,%	2.39	19.88	46.09	59.73
Δc_1^2,%	9.43	18.49	33.12	41.26
Δf_1^1,%	8.58	12.40	20.13	26.64
Δf_1^2,%	7.73	8.90	13.60	16.19

Таблица 2

Точность РПФ и обратного РПФ для функций (30)

Параметры алгоритма	$T_0=15\ 0,\ N_c=30;\ X_0=20.0,\ N_f=30$			
σ2	0.0	0.0001	0.0005	0.0025
Δc_2^1,%	2.37	7.60	15.51	34.27
Δc_2^2,%	6.77	8.32	12.41	22.95
Δf_2^1,%	3.26	12.84	19.02	36.77
Δf_2^2,%	8.23	9.76	13.34	21.66

Таблица 3

Точность РПФ и обратного РПФ для функций 31

Параметры алгоритма	$T_0=15.0,\ N_c=30;\ X_0=25.0,\ N_f=30$			
σ^2	0.0	0.0001	0.0005	0.001
$\Delta c_3^1,\%$	1.31	13.04	27.72	39.82
$\Delta c_3^2,\%$	3.03	8.61	17.45	24.19
$\Delta f_3^1,\%$	3.97	9.90	20.73	29.01
$\Delta f_3^2,\%$	10.20	12.79	16.92	19.77

Как видно, при точном измерении функции ($\sigma^2 = 0$) 1-й вариант прямого и обратного алгоритмов имеет некторое преимущество, хотя для 1-й пары варинат обратного алгоритма даёт лучший результат. Однако при увеличении дисперсии ошибки измерения 2-й вариант становится более точным. Причём с возрастанием дисперсии увеличивается и относительное перимущество в точности 2-го варианта над 1-м.

Алгоритм РПФ вычисления коэффициентов Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ получается из (25), (26) при $X_0=\pi,\ T_0=n_c$

Оценки коэффициентов ряда Фурье таковы:

$$t_0=n_c+1,\ R_f=[\pi/t_0],\ x_0=2\pi/t_0;\ \hat{c}_0=\hat{c}(0)=t_0^{-1}\left(f(0)+2\sum_{j=1}^{R_f}\alpha_j f(jx_0)\right), \tag{32}$$

$$t_k=k,\ k=n_c,\ n_c-1,\dots,1;\ x_k=2\pi/t_k,\ R_f=[\pi/x_k],\ R_k=[n_c/k];$$
$$\hat{c}_k=\hat{c}(t_k)=t_k^{-1}\left(f(0)/2+\sum_{j=1}^{R_f}\alpha_j f(jx_k)\right)-\sum_{j=2}^{R_k}\hat{c}_{jk}-\hat{c}_0/2. \tag{33}$$

В (33) двойной нижний индекс jk означает произведение $j\cdot k$.

Этот алгоритм был реализован для функции

$$f(x)=\pi^2-x^2,\ |x|\le\pi;\ f(x)=f(x+2\pi),\ |x|>\pi.$$

Коэффициенты Фурье и сумма Парсеваля этой функции

$$c_0 = 2\pi^2/3;\ c_k=2(-1)^{k+1}/k^2,\ k = 1, 2,\dots; \tag{34}$$

$$S_p = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 8\pi^4/15 \approx 51.951 \tag{35}$$

В таблице 4 при различных значениях n_c представлены оценки первых 4-х коэффициентов, в последней строке записаны суммы $\hat{S}_p=\hat{c}_0^2+2\sum_{i=1}^{n_c}\hat{c}_i^2$. В последнем столбце приведены точные значения коэффициентов Фурье и суммы Парсеваля, вычитсленных по формулам (34), (35).

Таблица 4

Точность РПФ-алгоритма вычисления коэффициентов Фурье и суммы Парсеваля

N_c	20	40	60	80	100	Точное
$\hat{c}_0$	6.5632	6.5756	6.5779	6.5787	6.5790	6.5797
$\hat{c}_1$	1.9932	2.0044	2.0009	1.9995	2.0010	2.0
$\hat{c}_2$	-0.5150	-0.5040	-0.5019	-0.5010	-0.5006	-0.5
$\hat{c}_3$	0.2281	0.2202	0.2214	0.2224	0.2221	0.2222
$\hat{S}_p$	51.734	51.944	51.940	51.938	51 953	51 951

Оценивание спектральной плотности случайного стационарного процесса

Рассмотрим стационарный случайный процесс $Y(t)$ с корреляционной функцией $K(\tau)$ и спектральной плотностью

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\iota\omega\tau} K(\tau) d\tau .$$

Пусть получены оценки корреляционной функции

$$\hat{K}(0),\ \hat{K}(\Delta\tau),\ \hat{K}(2\Delta\tau),\dots,\ \hat{K}(N_K\Delta\tau) \tag{36}$$

где $\Delta\tau = T_0/N_K$; T_0, N_K – заданные параметры. Зададим также параметры Ω_0, N_g. Для оценивания значений спектральной плотности алгоритм (25)-(26) модифицируется очевидным образом:

$$\omega = \omega_0 > \Omega_0, \tau_0 = 2\pi / \omega_0, R_k = [T_0 / \tau_0]; \hat{g}(0) = \omega_0^{-1} \left[\hat{K}(0) + 2\sum_{j=1}^{R_K} \alpha_j \hat{K}_{in}(j\tau_0) \right] \tag{37}$$

$$\begin{gathered} \omega_n = n(\Omega_0 / N_g), \tau_n = 2\pi / \omega_n, R_n = [T_0 / \tau_n]; R_n = [N_g / n], n = N_g, N_g - 1, \dots, 1; \\ \hat{g}(\omega_n) = \omega_n^{-1} \left[\hat{K}(0)/2 + \sum_{j=1}^{R_K} \alpha_j \hat{K}_{in}(j\tau_n) \right] - \sum_{j=2}^{R_n} \hat{g}(j\omega_n) - \hat{g}(0)/2; \end{gathered} \tag{38}$$

где $\hat{K}_{in}()$ – интерполированные по узлам (36) оценки значений корреляционной функции.

Оценки (37)-(38) проверялись на двух цифровых авторегрессионных моделях стаицонарных случайных процессов со спектральными плотностями

$$g_1(\omega) = 0.1/[\pi(0.01 + \omega^2)^2],\ g_1(\omega) = 0.001/[\pi(0.01 + \omega^2)^2].$$

Для каждой из двух моделей и каждого из двух вариантов алгоритмов вычислительный эксперимент состоял из четырёх этапов. На каждом этапе генерировалось по 100 серий, состоящих из N = 500, 1000, 3000 и 5000 измерений соответственно для 1-го, 2-го, 3-го и 4-го этапов. По этим измерениям оценивались значения корреляционной функции (36) и оценки (37)-(38).

Точность оценок (37)-(38) определялась по итоговым усреднённым показателям точности:

$$\Delta g = 0{,}01\sum_{n=1}^{100}\left\{100\%\left[\sum_{k=0}^{N_g}|\hat{g}_n(\omega_k)-g(\omega_k)|/\sum_{k=0}^{N_g}g(\omega_k)\right]\right\},\ i=1{,}2;$$

где в фигурных скобках – промежуточные показатели, а $\hat{g}_n()$ – оценка $g()$ на n-й реализации.

Задача интерполяции решалась линейно по правому и левому узлам.

Результаты приведены в Таб. 5. Индексы 1 и 2 по-прежнему обозначают первый и второй варианты РПФ.

Таблица 5

Точность оценок спектральной плотности стационарного случайного процесса

	Первая спектральная плотность				Вторая спектральная плотность			
N_g	25	25	25	25	25	25	25	25
Ω_0	2.0	2.0	2.0	2.0	0.35	0.35	0.35	0.35
N_K	45	50	50	50	50	50	50	50
T_0	292.5	325.0	325.0	325.0	600.0	600.0	600.0	600.0
N	500	1000	3000	5000	500	1000	3000	5000
$\Delta g_1^1,\%$	49.4	34.0	20.1	15.5	38.0	26.4	15.9	12.4
$\Delta g_1^2,\%$	24.9	17.8	12.6	10.0	18.7	13.7	8.3	6.4
$\Delta g_2^1,\%$	111.3	61.5	41.9	35.5	64.4	46.7	30.1	26.8
$\Delta g_2^2,\%$	36.5	30.2	26.4	24 2	32.3	25.9	19.7	18.2

Приведённые результаты позволяют отметить следующие свойства алгоритма (37)-(38).

1) Оценки (37)-(38) сходятся при возрастании числа измерений к истинным значениям спектральной плостности.

2) Второй вариант алгоритма РПФ существенно точнее первого.

Точность РПФ-оценок исследуется в следующем разделе. Второе свойство объясняется тем, что алгоритм (37)-(38) описывается схемой РПФ, в которой исходная функция определена поточечно, и её значения измеряются с центрированной ошибкой (при несмещённости оценок корреляционной функции).

Точность РПФ-оценок

Рассмотрим пару функций $c(t)$, $f(x)$, t, $x\in(-\infty,\infty)$, связанных между собой соотношениями (8), (9) и удовлетворяющих условиям (5)-(7). Пусть, кроме того, $f(x)$ – непрерывна. Исходной функцией считаем $c(t)$. РПФ-оценивание $f(x)$ проводится по следующей схеме:

1) производятся измерения функции $c(t)$: $\hat{c}(0)$, $\hat{c}(\Delta t)$, $\hat{c}(2\Delta t)$, ..., $\hat{c}(N_c\Delta t)$; $\Delta t = T_0/N_c$; T_0, N_c – заданы;

2) измерение значения $\hat{c}(n\Delta t)$ производятся с центрированной ошибкой, имеющей дисперсию σ_n^2, $n = 0, ..., N_c$.

3) заданы параметры N_f и X_0, определяющие количество РПФ-оценок $\hat{f}(x_k)$, $k = 0,..., N_f$; $x_k = k(X_0/N_f)$.

Алгоритм РПФ будет выглядеть следующим образом:

$$x_0=X_0(N_f+1)/N_f,\ t_0 = 2\pi/x_0,\ R_c = [T_0/t_0];\ \hat{f}(0) = \hat{S}(t_0) \qquad (39)$$

$$x_n = n(X_0/N_f),\ t_n = 2\pi/x_n,\ R_c = [T_0/t_n],\ R_n = [N_f/n],\ n = N_f, N_f - 1,\dots, 1;$$
$$\hat{f}(x_n) = \hat{S}(t_n)/2 - \sum_{j=2}^{R_n} \hat{f}(jx_n) - \hat{f}(0)/2; \tag{40}$$

где

$$\hat{S}(t) = t\left[\hat{c}(0) + 2\sum_{j=1}^{R_C} \alpha_j \hat{c}_{in}(jt)\right]$$
$$\alpha_j = 1 - j/R_c,$$

$\hat{c}_{in}()$ – интерполированные значения по узлам $\hat{c}(n\Delta t)$, $n = 0, 1,\dots, N_c$.

Обозначим также

$$S(t) = t\left[c(0) + 2\sum_{j=1}^{R_C} \alpha_j c_{in}(jt)\right].$$

Оценим ошибку оценки $\hat{f}(x_n)$.

$$\begin{aligned}
\rho_n &= 2\left\{\mathrm{M}\left[\hat{f}(x_n) - f(x_n)\right]^2\right\}^{1/2} = \{\mathrm{M}\{\hat{S}(t_n) - S(t_n) + S(t_n) - \sum_{j=-R_n}^{R_n} f(jx_n) + \\
&+ 2\sum_{j=2}^{R_n}[f(jx_n) - \hat{f}(jx_n)] + f(0) - \hat{f}(0)\}^2\}^{1/2} \le \{\mathrm{M}[\hat{S}(t_n) - S(t_n)]^2\}^{1/2} + \\
&+ \left|S(t_n) - \sum_{j=-R_n}^{R_n} f(jx_n)\right| + 2\sum_{j=2}^{R_n}\{\mathrm{M}[f(jx_n) - \hat{f}(jx_n)]^2\}^{1/2} + \{\mathrm{M}[f(0) - \hat{f}(0)]^2\}^{1/2} = \\
&= \{\mathrm{M}[\hat{S}(t_n) - S(t_n)]^2\}^{1/2} + \left|S(t_n) - \sum_{j=-R_n}^{R_n} f(jx_n)\right| + \sum_{j=2}^{R_n} \rho_{jn} + \rho_0/2; n = N_f,\dots,1.
\end{aligned} \tag{41}$$

В цепочке (41) использовалось неравенство Минковского

$$\left[\mathrm{M}\left(\sum \eta_j\right)^2\right]^{1/2} \le \sum\left(\mathrm{M}\eta_j^2\right)^{1/2}.$$

Оценим

$$r_n = \mathrm{M}[\hat{S}(t_n) - S(t_n)]^2\}^{1/2} \le t_n\left\{\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}(0) - c(0)\right)^2\right]^{1/2} + 2\sum_{j=1}^{R_c}\alpha_j\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n) - c(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}\right\} =$$
$$= t_n\left\{\sigma_0 + 2\sum_{j=1}^{R_c}\alpha_j\left[\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n) - c(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}\right]\right\}$$

Точка jt_n попадает между узлов с номерами $l = [jt_n/\Delta t]$, $m = l + 1$. Для простоты выкладок будем считать интерполяцию линейной. В этом случае

$$\hat{c}_{in}(jt_n) = (1 - \Delta)\hat{c}(\ell\Delta t) + \Delta\hat{c}(m\Delta t),\ \Delta = (jt_n - \ell\Delta t)/\Delta t. \tag{42}$$

Обозначим

$$c_{in}(jt_n) = (1 - \Delta)c(\ell\Delta t) + \Delta c(m\Delta t). \tag{43}$$

$c_{in}(jt_n)$ – линейная интерполяция по точным значениям узлов $c(m\Delta t)$. $c(l\Delta t)$. Тогда, как известно,

$$\exists t_j^* \in [l\Delta t, m\Delta t],\ d_j\text{:}\ |c_{in}(jt_n) - c(jt_n)| \le d_j c''(t_j^*)(\Delta t)^2.$$

Используем это неравенство в следующей оценке

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n)-c(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}=\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n)\pm c_{in}(jt_n)-c(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}\le\\&\le\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n)-c_{in}(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}+|c_{in}(jt_n)-c(jt_n)|\le\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n)-c_{in}(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}+\\&+d_jc''(t_j^*)(\Delta t)^2.\end{aligned} \tag{44}$$

Из (42), (43) следует неравенство:

$$\left[\mathrm{M}\left(\hat{c}_{in}(jt_n)-c_{in}(jt_n)\right)^2\right]^{1/2}\le(1-\Delta)\sigma_l+\Delta\sigma_m. \tag{45}$$

Теперь, учитывая (44), (45) и (40), получаем оценку:

$$\begin{aligned}r_n &\le t_n[\sigma_0 + 2R_c\sigma + 2R_cDc_2(\Delta t)^2] \le 2T_0[\sigma + Dc_2(T_0/N_c)^2] +\\ &+ \sigma_0(2\pi N_f/nX_0),\end{aligned} \tag{46}$$

где

$\sigma = max\{\sigma_0, \sigma_1,..., \sigma_n\}$; $c_2 = maxc''(t)$, $t\in[0, T_0]$; $D = maxd_j$, $j = 1,..., R_c$; $n = 0,..., N_f$.

Сопоставляя $S(t_n)$ с (12), (14), легко видеть, что

$$S(t_n)=t_n\int_{-\infty}^{\infty}F(R_C,xt)f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_{Rc}(0,\psi_j), \tag{47}$$

где $\psi_j(x)$ определена аналогично (3):

$$\begin{aligned}&\psi_j(x)=\begin{cases}f(x/t_n-jx_n),(j-1)\pi<x<j\pi,\\ f(x/t_n),j\pi\le x\le(j+1)\pi;\end{cases}\\&\psi_j(x+2\pi k)=\psi_j(x);k=0,\pm1,\pm2,...;j=0,1,...\end{aligned} \tag{48}$$

Легко убедиться, что вследствие чётности и непрерывности $f()$ (которые не требовались при доказательстве Теоремы 1) $\psi_j(x)$ - 2π-периодическая непрерывная функция. Далее понадобится также выполнение следующих условий:

1) $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица степени α;

2) $L(t_n) = \sum_{k=0}^{\infty}L_k(t_n)<\infty,\forall t_n>0,$

где

$$L_k(t_n) = min\{L: |f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|^{\alpha},\ x_1,\ x_2 \in [kx_n,\ (k+1)x_n]\}. \qquad (49)$$

Теперь приступим к получению оценки второго слагаемого в (41).

$$\begin{aligned}\delta_n &= |S(t_n) - \sum_{j=-R_n}^{R_n} f(jx_n)| = |S(t_n) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jx_n) + \sum_{|j|>R_n} f(jx_n)| \le \\ &\le |S(t_n) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jx_n)| + \tau_n\end{aligned} \qquad (50)$$

где

$$\tau_n = |\sum_{|j|>R_n} f(jx_n)| \qquad (51)$$

Из (4), (47) следует

$$\begin{aligned}|S(t_n) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jx_n)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}[\sigma_{Rc}(0,\psi_{2k}) - \psi_{2k}(0) + \sigma_{Rc}(0,\psi_{2k+1}) - \psi_{2k+1}(0)]\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}[|\sigma_{Rc}(0,\psi_{2k}) - \psi_{2k}0)| + |\sigma_{Rc}(0,\psi_{2k+1}) - \psi_{2k+1}(0)|].\end{aligned} \qquad (52)$$

Из определения (48) функции $\psi_j(x)$ очевидно
$\psi_{2k}(-x) = \psi_{2k}(x) = \psi_{2k}(x + 2k\pi) = f(x/t_n + kx_n),\ x \in [0,\ \pi];$
$\psi_{2k+1}(-x) = \psi_{2k+1}(x) = \psi_{2k+1}(x + 2(k+1)\pi) = f(x/t_n + (k+1)x_n),\ x \in [-\pi,\ 0].$
Из этих равенств и (49) следует липшицевость функций $\psi_{2k}(x),\ \psi_{2k+1}(x)$:

$$|\psi_{2k}(x_1) - \psi_{2k}(x_2)| = |f(x_1/t_n + kx_n) - f(x_2/t_n + kx_n)| \le L_k(t_n)t_n^{-\alpha}|x_1 - x_2|^{\alpha},\ x_1,\ x_2 \in [0, \pi]; \qquad (53)$$

$$|\psi_{2k+1}(x_1) - \psi_{2k+1}(x_2)| \le L_k(t_n)t_n^{-\alpha}|x_1 - x_2|^{\alpha},\ x_1,\ x_2 \in [-\pi, 0] \qquad (54)$$

Поскольку $\psi_j(x) = \psi_j(-x)$, неравенства (53), (54) выполняются и при $x_1,\ x_2 \in [-\pi, \pi]$. Теперь из (53), (54) следуют [3] оценки:

$$\begin{aligned}&|\sigma_{Rc}(0,\psi_{2k}) - \psi_{2k}(0)| \le C_\alpha L_k(t_n)t_n^{-\alpha}\theta_n(\alpha), \\ &|\sigma_{Rc}(0,\psi_{2k+1}) - \psi_{2k+1}(0)| \le C_\alpha L_k(t_n)t_n^{-\alpha}\theta_n(\alpha),\end{aligned} \qquad (55)$$

где

$C_\alpha < 3/(1 - \alpha)$, если $0 < \alpha < 1$ и $C_\alpha = C$, если $\alpha = 1$;

$$\theta_n(\alpha) = \begin{cases} R_C^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1; \\ R_C^{-1}\ln R_C, \alpha = 1. \end{cases}$$

Подставляя (55) и (52) в (50), получаем

$$\delta_n \le 2C_\alpha L(t_n)t_n^{-\alpha}\,\theta_n(\alpha) + \tau_n = 2C_\alpha L(t_n)\varphi_n(\alpha) + \tau_n, \tag{56}$$

где

$$\varphi_n(\alpha) = \begin{cases} [(nX_0T_0 - 2\pi N_f\lambda_n)/(nX_0)]^{-\alpha}, 0<\alpha<1 \\ [(nX_0T_0 - 2\pi N_f\lambda_n)/(nX_0)]^{-1}\ln[(nX_0T_0 - 2\pi N_f\lambda_n)/(2\pi N_f), \alpha = 1. \end{cases}$$

Равенство в (56) было получено подстановкой $R_c = T_0/t_n - \lambda_n,\ 0 \le \lambda_n < 1$.

Оценка последнего слагаемого в (41) следует из (46) и (56):

$$\begin{aligned}\rho_0/2 = \{M[f(0) - \hat{f}(0)]^2\}^{1/2} \le \{M[S(t_0) - \hat{S}(t_0)]^2\}^{1/2} + |S(t_0) - f(0)| = \\ = \tau_0 + \delta_0 \le 2T_0[\sigma + Dc_2(T_0/N_c)^2] + \sigma_0\{2\pi N_f/[X_0(N_f + 1)]\} \\ + 2C_\alpha L(t_0)\varphi_0(\alpha) + \tau_0,\end{aligned} \tag{57}$$

где, согласно (50), (51), $\tau_0 = \sum_{|j|>0} f(jx_0)$, а $\varphi_0(\alpha)$ получено подстановкой в (56), в соответствии с (39), $R_c = T_0/t_0 - \lambda_0,\ 0 \le \lambda_0 < 1$.

Приведём окончательную оценку

$$\begin{aligned}\rho_n \le r_n + \delta_n + \rho_0/2 + \sum_{j=2}^{R_n}\rho_{jn} \le 4T_0[\sigma + Dc_2(T_0/N_c)^2] + \sigma_0(2\pi N_f/X_0)[(N_f+1)^{-1} + n^{-1}] + \\ + 2C_\alpha L(t_n)\varphi_n(\alpha) + 2C_\alpha L(t_0)\varphi_0(\alpha) + \tau_n + \tau_0 + \sum_{j=2}^{R_n}\rho_{jn},\ n = N_f, \ldots, 1.\end{aligned} \tag{58}$$

Как видно, оценка погрешности ρ_n также вычисляется рекуррентно через оценки с большими индексами. Порядок их вычисления таков же, что и порядок вычисления РПФ-оценок: сначала вычисляется оценка $\rho_0/2$ по формуле (57), затем оценки ρ_n, n: $[N_f/n]=1$ и т.д. Таким образом, для получения условий сходимости $\rho_n \to 0,\ n = 0,\ldots, N_f$ необходимо выяснить условия сходимости к нулю всех слагаемых в (58), кроме последней суммы.

Условия сходимости первых четырёх слагаемых, очевидно, таковы:

$$\begin{gathered} c_2 < \infty,\ D < \infty; \\ \sigma \to 0; \\ T_0^3/N_c^2 = T_0(\Delta t)^2 \to 0; \\ 0 < \delta_1 \le \Delta x \le \delta_2 < \infty; \end{gathered} \tag{59}$$

где δ_1, δ_2 – некторые константы.

Для сходимости к нулю τ_n, τ_0, как нетрудно доказать, достаточными вместе с (1) являются следующие условия:

$$X_0 \to \infty,\ \Delta x \ge C = const. \tag{60}$$

(59), (60) являются достаточными условиями сходимости $\rho_n \to 0$.

Как видно, для повышения точности РПФ-оценок не требуется возрастания их числа $N_f + 1$. Однако при большом X_0 и малом N_f является большим шаг $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ аргумента оценок $\hat{f}(x_n)$, $\hat{f}(x_{n-1})$, что уменьшает точность последующей интерполяции.

Следует отметить ещё одно необходимое условие РПФ-оценивания. Наименьшее значение числа R_c должно быть больше 1. Это условие выполняется при выполнении неравенства $\Delta x T_0 > 2\pi$.

Анализируя (58), можно предположить, что погрешность РПФ-оценок возрастает при уменьшении индекса n и для n = 1 превосходит сумму погрешностей всех остальных РПФ-оценок. Однако вычислительные эксперименты показали, что это не так. В отсутствии такой зависимости можно убедиться, сравнивая погрешности $|\hat{c}_n - c_n|$, вычисленные по табл. 4. Это, по-видимому, объясняется сглаживающим эффектом сумм вида $\sum_{j=2}^{R_k} \hat{c}(jt_k)$ в оценках (26), (28), (33), (38).

Библиографический список

1. Перлов Ю.М. Прямое оценивание спектра стационарных случайных процессов//Проблемы передачи информации, 1989.- Т. XXV. - Вып. 2. С. 3-12.
2. Г.Полиа, Г.Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1978.
3. С.М. Никольский. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера //Изв. АН СССР. – Серия мат., 1940. – Т. 4, №6, с. 501-508.