

УДК 532.546:541.182.45

ДЕФОРМАЦИЯ ОДИНОЧНОГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА 1. МОДЕЛЬНЫЙ ПУЗЫРЕК

А.М. Логвинов, К.Б. Канн*

Белгородский государственный университет

Рассматривается деформация модельного газового пузырька (сферокатеноида) под действием локальной нагрузки. Оценивается допустимый диапазон деформации. Сравнение поверхности деформированного модельного пузырька с поверхностью вытянутого двухосного эллипсоида показывает, что разность не превышает 0,8 %.

Свободные газовые пузырьки в жидкости, так же, как и окруженные двухсторонней жидкой пленкой («мыльные») пузыри, имеют сферическую форму, обеспечивающую минимум свободной (поверхностной) энергии. Избыточное давление в газовом пузырьке (по сравнению с давлением в окружающей жидкости) (капиллярное, лапласово давление) определяется соотношением Лапласа [1]:

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R_0} = 2\sigma H, \quad (1)$$

где R_0 – радиус пузырька, σ – поверхностное натяжение жидкости, а $H = 1/R_0$ – кривизна поверхности пузырька. Любое изменение формы пузырька приводит к увеличению межфазной поверхности и требует соответствующих затрат энергии.

Соотношение Лапласа (1) остается справедливым и для точек газожидкостной границы со сложной (несферической) кривизной. Но величина R_0 в этом случае имеет смысл *радиуса средней кривизны*:

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const}, \quad (2)$$

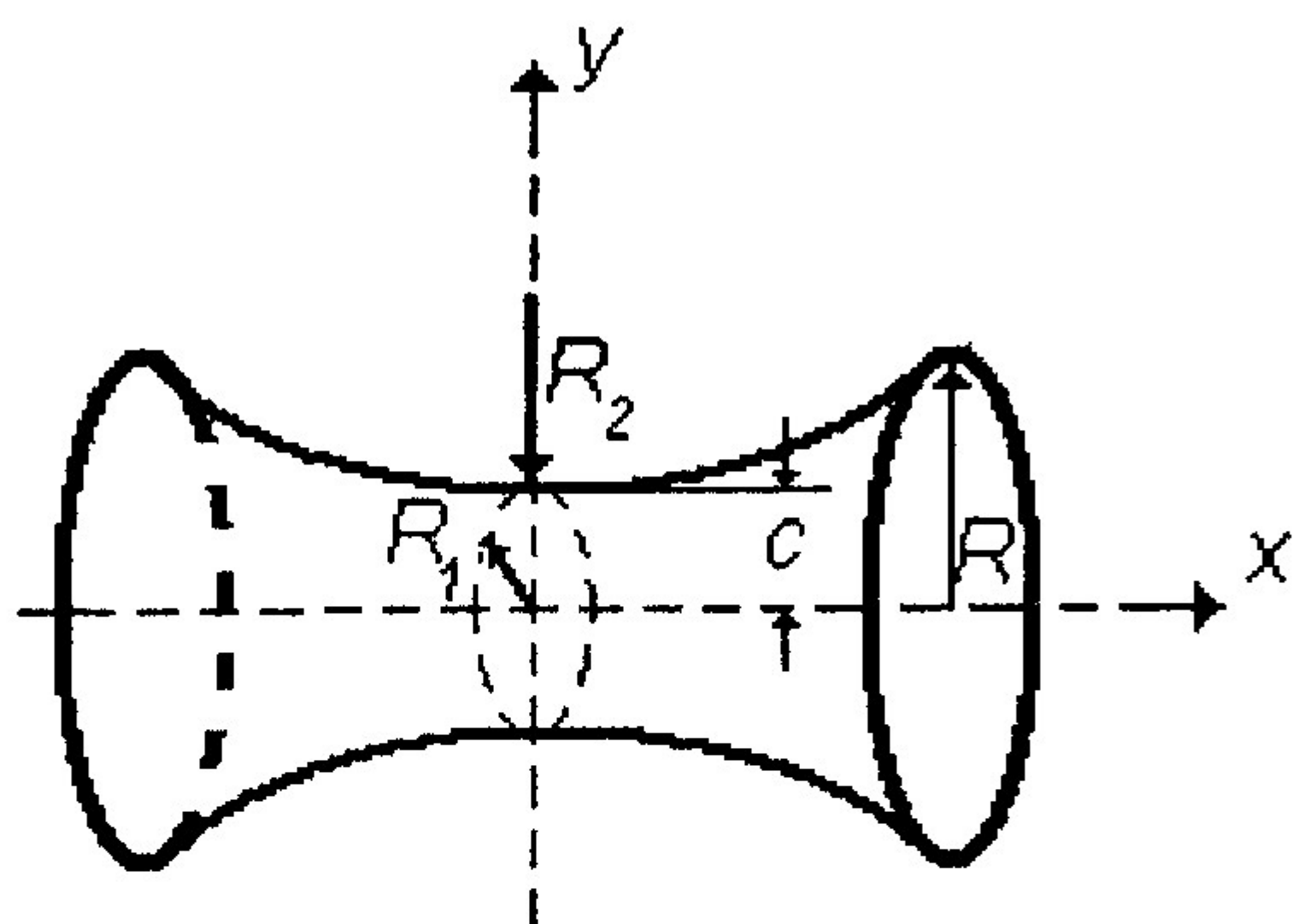


Рис. 1

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны в данной точке.

Сфера – не единственная поверхность постоянной средней кривизны. Этим свойством обладают *катеноиды* – осесимметричные поверхности, образованные вращением цепной линии [2]. В прямоугольной (декартовой) системе координат цепная линия представляется уравнением.

$$y = c \operatorname{sch} \frac{x}{c}. \quad (3)$$

На рис. 1 представлена простейшая катеноидная поверхность. Таковую «седловидную» форму имеет двусторонняя жидкая пленка, натянутая на два жестких колечка радиуса R [3]. Поскольку давление по разные стороны пленки одно и то же, то $\Delta P = 0$ и согласно уравнению (1) средняя кривизна во всех точках катеноида $H = 0$ (т.е. $R_1 = -R_2$).

* E-mail: Logvinov@bsu.edu.ru

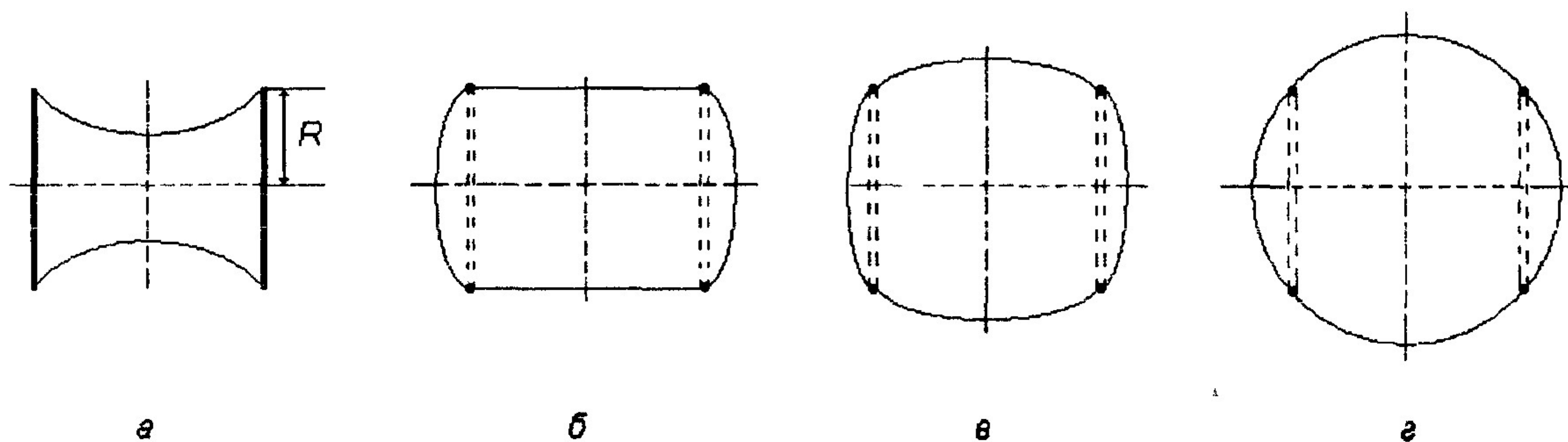


Рис. 2

Чтобы получить замкнутый пузырек, затащим колечки жидкими пленками (рис. 2 а). Согласно (1) торцевые пленки будут плоскими ($H = 0$). Если внутри такого «пузырька» нагнетать воздух, пузырек будет раздуваться. При некотором избыточном давлении центральная часть фигуры станет цилиндрической (рис. 2, б), а торцевые пленки получат сферическую кривизну радиуса r . Кривизна на всей поверхности пузырька будет одной и той же. Т.к. для сферических торцов $r = R_1 = R_2$, то из (2) получаем соотношение $r = 2/H$.

При дальнейшем расширении пузырек превратится в «бочку» со сферическими торцами (рис. 2 в). Такую фигуру в дальнейшем мы будем называть *сферокатеноидом* (СК). Продолжая раздувать пузырек, его можно сделать и строго сферическим (рис. 2 г).

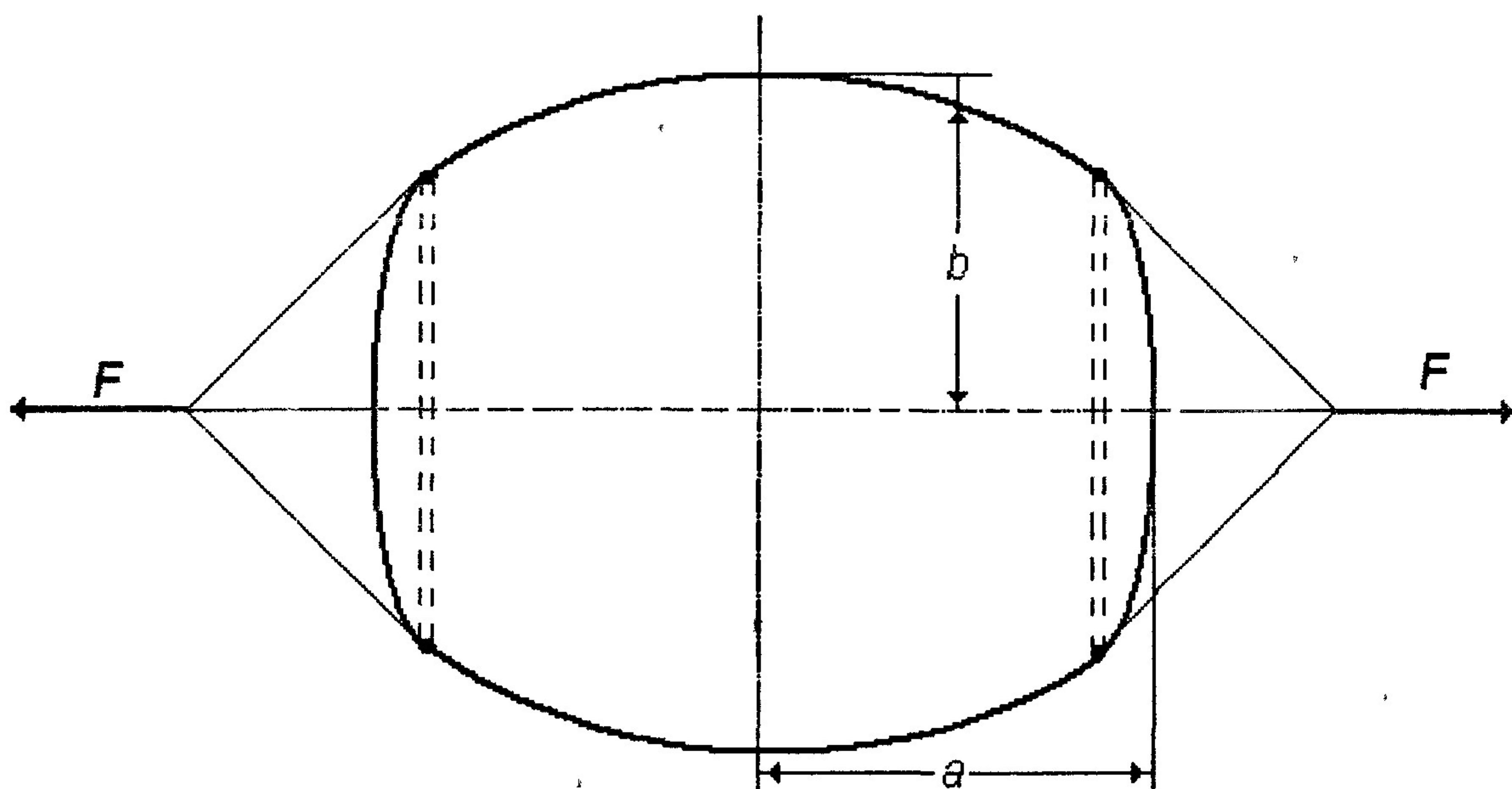
Все сказанное выше справедливо и для одностороннего газового пузырька в жидкости, который и будет рассматриваться дальше.

Сферокатеноид можно рассматривать как деформированный сферический пузырек. Действительно, снабдив сферический пузырек жесткими колечками (как на рис. 2 г) и приложив к ним усилия F (рис. 3), можно деформировать пузырек, придав ему форму сферокатеноида. Такие усилия будем называть *локальной нагрузкой* на пузырек.

Деформацию пузырька будем оценивать *коэффициентом формы* (параметром деформации) – отношением полуосей фигуры (см. рис.3):

$$\chi = \frac{a}{b}. \tag{4}$$

Деформация газового пузырька под действием локальной нагрузки происходит практически без изменения его объема, т.к. капиллярное давление (1) обычно намного меньше давления в пузырьке. Поэтому можно считать, что объем сферокатеноида V_c при любой деформации равен объему V_0 исходного сферического пузырька: $V_c = V_0$.



Р и с . 3

Поскольку в дальнейшем мы намерены использовать сферокатеноид для моделирования реальных газовых пузырьков, нас будет интересовать форма лишь выпуклых сферокатеноидов – от строго сферических до «цилиндрических» (см. рис. 2 б).

С ростом деформации поверхность сферокатеноида S_c увеличивается и растет поверхностная энергия. При некоторой (критической) деформации χ_k пузырек разрывается на два вторичных (сферических) пузырька. (В первом приближении будем считать, что исходный пузырек распадается на два *равных* пузырька, что не очевидно).

Из термодинамических соображений следует, что в критическом состоянии должно выполняться два условия:

$$V_c = 2V_1. \quad (5)$$

и

$$S_c = 2S_1, \quad (6)$$

где V_c и V_1 – объем СК и объем каждого из двух вторичных пузырьков, а S_c и S_1 – их поверхности в критическом состоянии.

Предельной формой для выпуклых (модельных) пузырьков является цилиндрический сферокатеноид (см. рис. 2,б). Полагая, что дробление пузырька наступает, когда он получает форму цилиндрического сферокатеноида, рассчитаем диапазон деформаций, которые может получить газовый пузырек под действием локальной нагрузки. Коэффициент формы сферического пузырька (по определению (4)) $\chi_0 = 1$, а коэффициент формы цилиндрического сферокатеноида зависит от отношения радиуса R колечек, на которых удерживается пузырек, к радиусу R_0 исходного пузырька. Положив $R_0 = 1$, найдем зависимость коэффициента формы цилиндрического сферокатеноида (а следовательно, критической деформации χ_k) от безразмерного радиуса R . Для этого необходимо решить совместно уравнения (5) и (6). Объем СК (в безразмерных единицах)

$$V_c = \frac{4}{3}\pi \quad (7)$$

и остается практически неизменным при любых деформациях. Объем вторичного пузырька

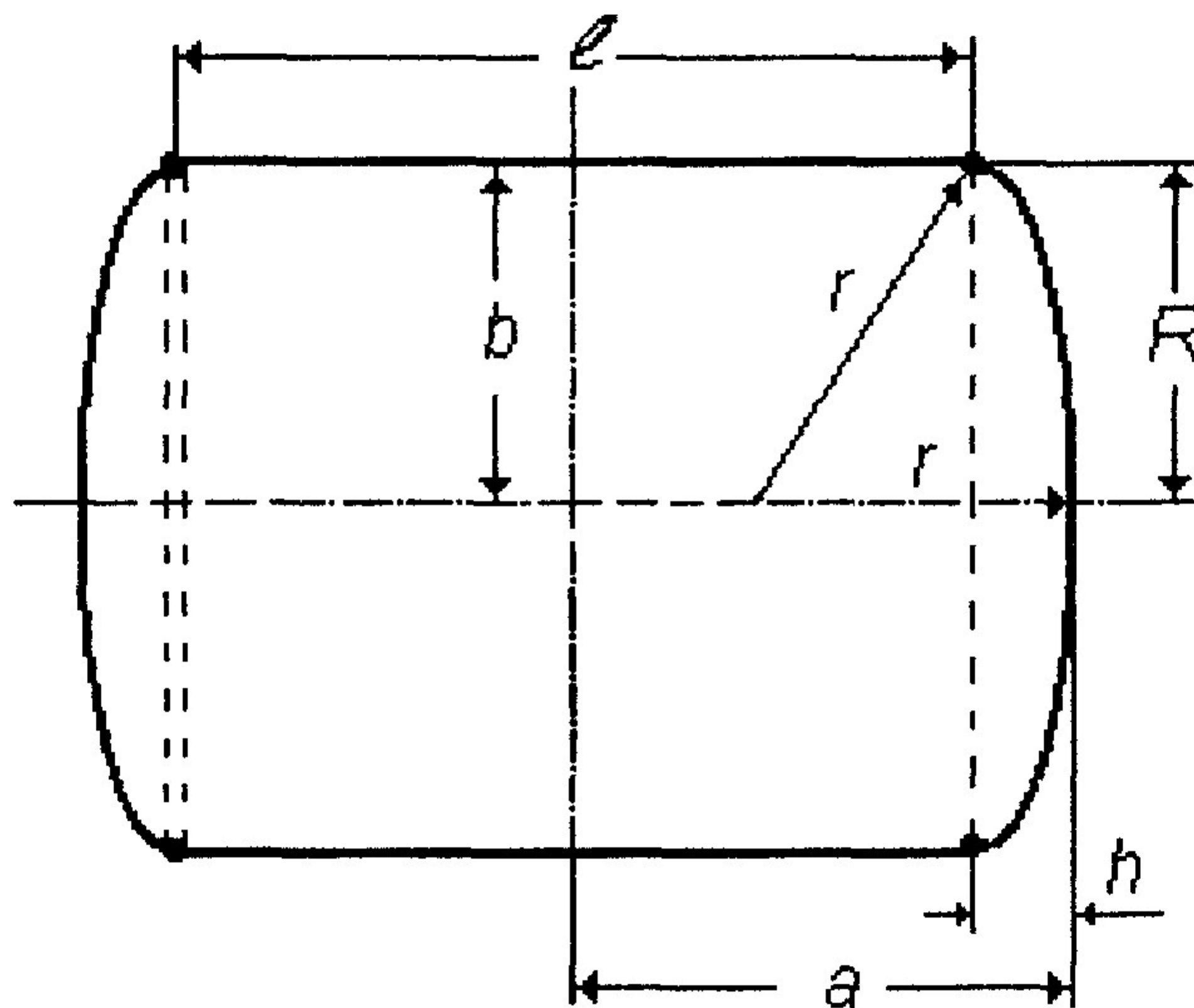
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^2. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (5), получаем значение радиуса вторичного пузырька

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \quad (9)$$

Площадь поверхности цилиндрического сферокатеноида определяется зависимостью

$$S_c = 2\pi Rl + 4\pi rh, \quad (10)$$



Р и с . 4

где l – длина цилиндрической части сферокатеноида, r – радиус торцевого (сферического) сегмента, а h – его высота (см. рис.4). Из рисунка видно, что

$$l = 2(a - h). \quad (11)$$

Высота торцевого сегмента h может быть определена из соотношения

$$r^2 = R^2 + (R - h)^2,$$

откуда

$$h = R(2 - \sqrt{3}). \quad (12)$$

Применительно к цилиндрическому сферокатеноиду соотношение (2) между радиусами сферической r и цилиндрической R записывается в виде:

$$H = \frac{1}{R} = \frac{2}{r} = const,$$

откуда следует, что

$$r = 2R \quad (13)$$

Подставляя (11), (12) и (13) в (10), получаем

$$S_c = 4\pi R[a - R(2 - \sqrt{3})] + 8\pi R \cdot R(2 - \sqrt{3}) = 4\pi R[a + R(2 - \sqrt{3})]. \quad (14)$$

Площадь вторичного пузырька $S_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^2$, или (с учетом (9))

$$S_1 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = 2\pi\sqrt[3]{2}. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (6), имеем

$$4\pi R \cdot [a + R(2 - \sqrt{3})] = 2 \cdot 2\pi\sqrt[3]{2},$$

откуда

$$a = \frac{\sqrt[3]{2}}{R} - R(2 - \sqrt{3}). \quad (16)$$

Если учесть, что поперечный размер цилиндрического сферокатеноида $b = R$, то коэффициент формы (4) такой фигуры можно представить так:

$$\chi = \frac{a}{b} = \frac{a}{R},$$

откуда

$$a = \chi R. \quad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), получаем $\chi R = \frac{\sqrt[3]{2}}{R} - R(2 - \sqrt{3})$, откуда находим зна-

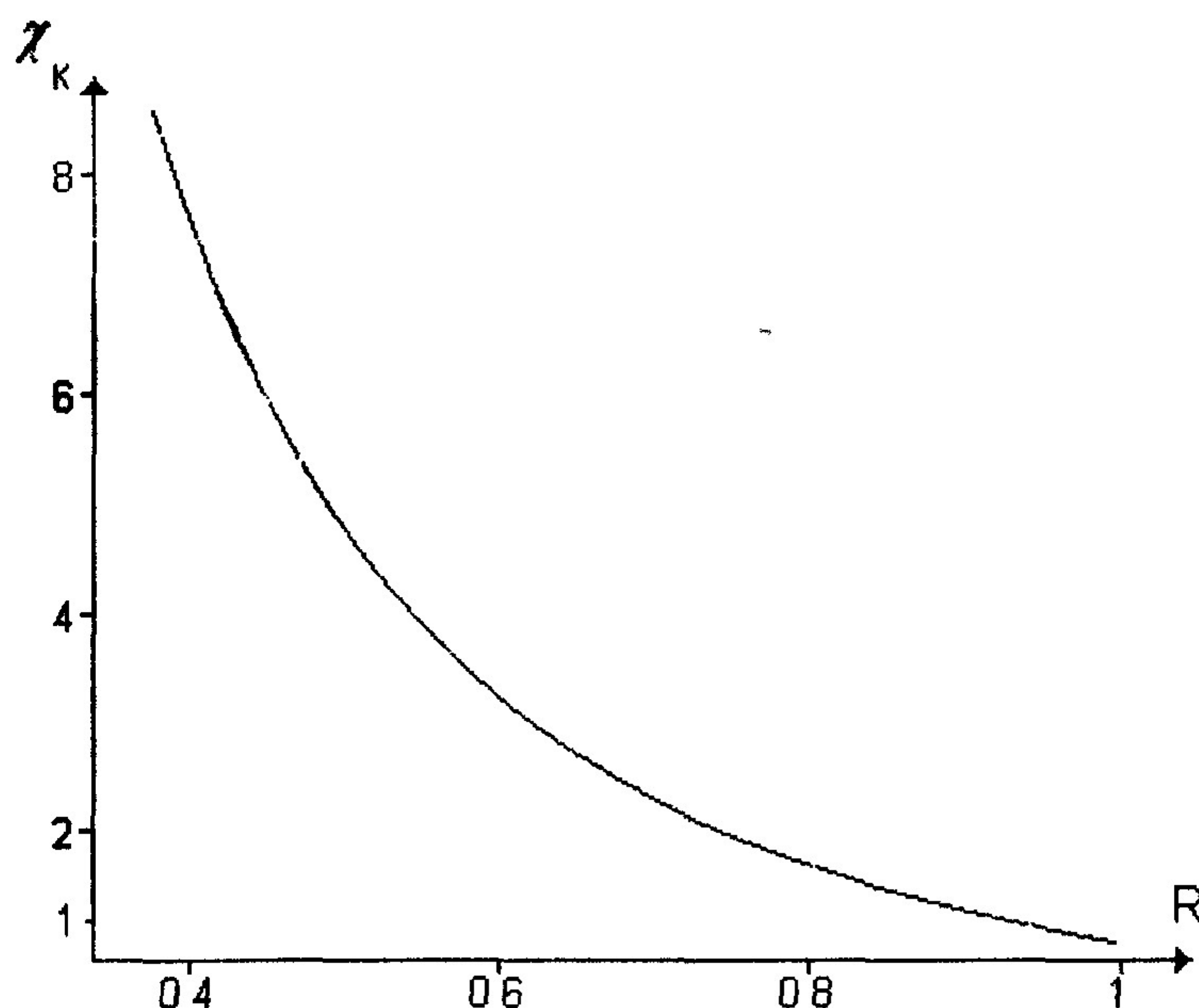
чение коэффициента формы для цилиндрического сферокатеноида:

$$\chi \approx \frac{\sqrt[3]{2}}{R^2} - 0,268. \quad (18)$$

На рис. 5 приведена зависимость параметра деформации для цилиндрических СК от радиуса несущих колечек R^1 .

Любая (устойчивая) форма сферокатеноида представляет собой поверхность постоянной кривизны, которая определяется уравнением Лапласа (1) и изменяется с деформацией. Поверхность реальных (деформированных) газовых пузырьков в жидкости не является поверхностью постоянной кривизны. Например, в пенном потоке газовые пузырьки имеют плавную форму, скорее напоминающую вытянутый двухосный эллипсоид.

¹ При малых радиусах R профиль центральной части сферокатеноида перестает быть монотонным: у одного из колечек образуется перетяжка, и пузырек рвется. Этот механизм будет рассмотрен во второй части работы.



Р и с . 5

Найдем критическую деформацию эллипсоидного пузырька, при которой происходит деление пузырька на два (равных) сферических пузырька. При этом должны выполняться соотношения, аналогичные зависимостям (5) и (6) для модельного пузырька:

$$V_2 = 2V_1 \tag{19}$$

$$S_2 = 2S_1, \tag{20}$$

где V_2 и S_2 – объем и поверхность деформированного (эллипсоидного) пузырька, а V_1 и S_1 – объем и поверхность вторичного пузырька. Т.к. объем эллипсоида остается неизменным и равным объему исходного (сферического) пузырька ($V_2 = V_0$), то выполняется и соотношение между радиусами сферических пузырьков, и значение (9) для радиуса вторичного пузырька.

Объем двухосного эллипсоида, вытянутого вдоль полуоси a , определяется зависимостью

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi a b^2. \tag{21}$$

Сравнивая (21) с (7), получаем соотношение

$$a b^2 = 1. \tag{22}$$

Совместно с определением коэффициента формы (4) эта зависимость дает следующие значения полуосей эллипса в зависимости от деформации:

$$\begin{aligned} a &= \chi^{2/3} \\ b &= \chi^{-1/3} \end{aligned} \tag{23}$$

и .

Площадь поверхности двухосного эллипсоида вычисляется по формуле [7]:

$$S_s = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right). \quad (24)$$

С учетом зависимостей (23) площадь эллипсоида можно представить в функции от параметра формы χ :

$$\begin{aligned} S_s &= 2\pi \left[\chi^{-2/3} + \frac{\chi^{4/3} \cdot \chi^{-1/3}}{\sqrt{\chi^{4/3} - \chi^{2/3}}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\chi^{4/3} - \chi^{2/3}}}{\chi^{2/3}}\right) \right] = \\ &= 2\pi \left[\chi^{2/3} + \frac{\chi^{4/3}}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \arcsin \frac{\sqrt{\chi^2 - 1}}{\chi} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Площадь поверхности вторичного пузырька (с учетом (9)) равна

$$S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2. \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в (20), имеем

$$2\pi \left[\chi^{-2/3} + \frac{\chi^{4/3} \cdot \chi^{-1/3}}{\sqrt{\chi^{4/3} - \chi^{2/3}}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\chi^{4/3} - \chi^{2/3}}}{\chi^{2/3}}\right) \right] = 2 \cdot 4\pi \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad (27)$$

что после преобразований дает соотношение

$$\chi^{-2/3} + \frac{\chi^{4/3}}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \arcsin \frac{\sqrt{\chi^2 - 1}}{\chi} = 2\sqrt[3]{2}. \quad (28)$$

Решением этого уравнения является значение критического коэффициента формы для эллипсоидного пузырька, равное $\chi_c = 3,79$. Это значение соответствует деформации модельного пузырька на колечках радиуса $R = 0,56$.

Энергетические затраты на деформирование пузырьков идут на увеличение их поверхности. Поэтому представляет интерес сравнить поверхность сферокатеноида с поверхностью соответственного ему двухосного эллипсоида.

Эллипсоидом, соответственным данному СК, будем называть вытянутый двухосный эллипсоид, удовлетворяющий следующим условиям:

1) коэффициент формы эллипсоида тот же, что и у СК:

$$\chi_s = \chi_c = \chi;$$

2) средняя кривизна эллипсоида в точке $x = 0$ равна кривизне СК:

$$H_s(0) = H_c;$$

3) объем эллипсоида равен объему СК:

$$V_s = V_c.$$

Площадь поверхности сферокатеноида рассчитывается как сумма поверхности центральной (катеноидной) части S_k и площадей двух сферических торцевых сегментов $S_{сф.}$:

$$S_c = S_k + 2S_{сф.} \quad (29)$$

Средняя кривизна сферокатеноида определяется через главные радиусы кривизны, которые равны b и c (см. рис. 3):

$$H_c = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (30)$$

Можно показать (это будет сделано во второй части работы), что средняя кривизна эллипсоида в точке $x = 0$ определяется соотношением

$$H_э(0) = \frac{a^2 + b^2}{a^2b}, \quad (31)$$

где a и b – полуоси эллипсоида.

Приравнявая (30) и (31) (согласно условию 2), имеем

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

откуда получаем

$$\frac{b}{a^2} = \frac{1}{c}. \quad (32)$$

Подставив в (32) $\chi = \frac{a}{b}$, получим

$$c = a\chi, \quad (33)$$

что позволяет рассчитать площадь центральной части СК.

Площадь фигуры вращения определяется известным соотношением [7]

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (34)$$

Уравнение цепной линии, образующей центральную часть СК – $f(x) = -c \operatorname{sch} \frac{x}{c} + c + b$. Подставляя это выражение в (34), получаем

$$S_k = 2\pi \int_{-(a-h)}^{a-h} \left(-c \operatorname{sch} \frac{x}{c} + c + b \right) \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx. \quad (35)$$

Площадь сферического сегмента СК определяется зависимостью

$$S_{сф.} = 2\pi r h, \quad (36)$$

что после несложных преобразований дает соотношение

$$S_{сф.} = \frac{4\pi\chi ah}{\chi^2 + 1}. \quad (37)$$

Подставляя (35) и (37) в (29), получаем уравнение для поверхности СК:

$$S_c = 2\pi \int_{-(a-h)}^{a-h} \left(-c \operatorname{ch} \frac{x}{c} + c + b \right) \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx + \frac{8\pi\chi ah}{\chi^2 + 1}. \quad (38)$$

Видно, что для нахождения S_c необходимо еще одно уравнение – для параметра h . Этот параметр находится из условия 3.

Объем СК представляет собой сумму объемов центральной (катеноидной) части и двух сферических сегментов:

$$V_c = V_k + 2V_{сф} \quad (39)$$

Объем центральной части рассчитывается как объем фигуры вращения

$$V_k = 2\pi \int_0^{a-h} \left(-c \operatorname{ch} \frac{x}{c} + c + b \right)^2 dx. \quad (40)$$

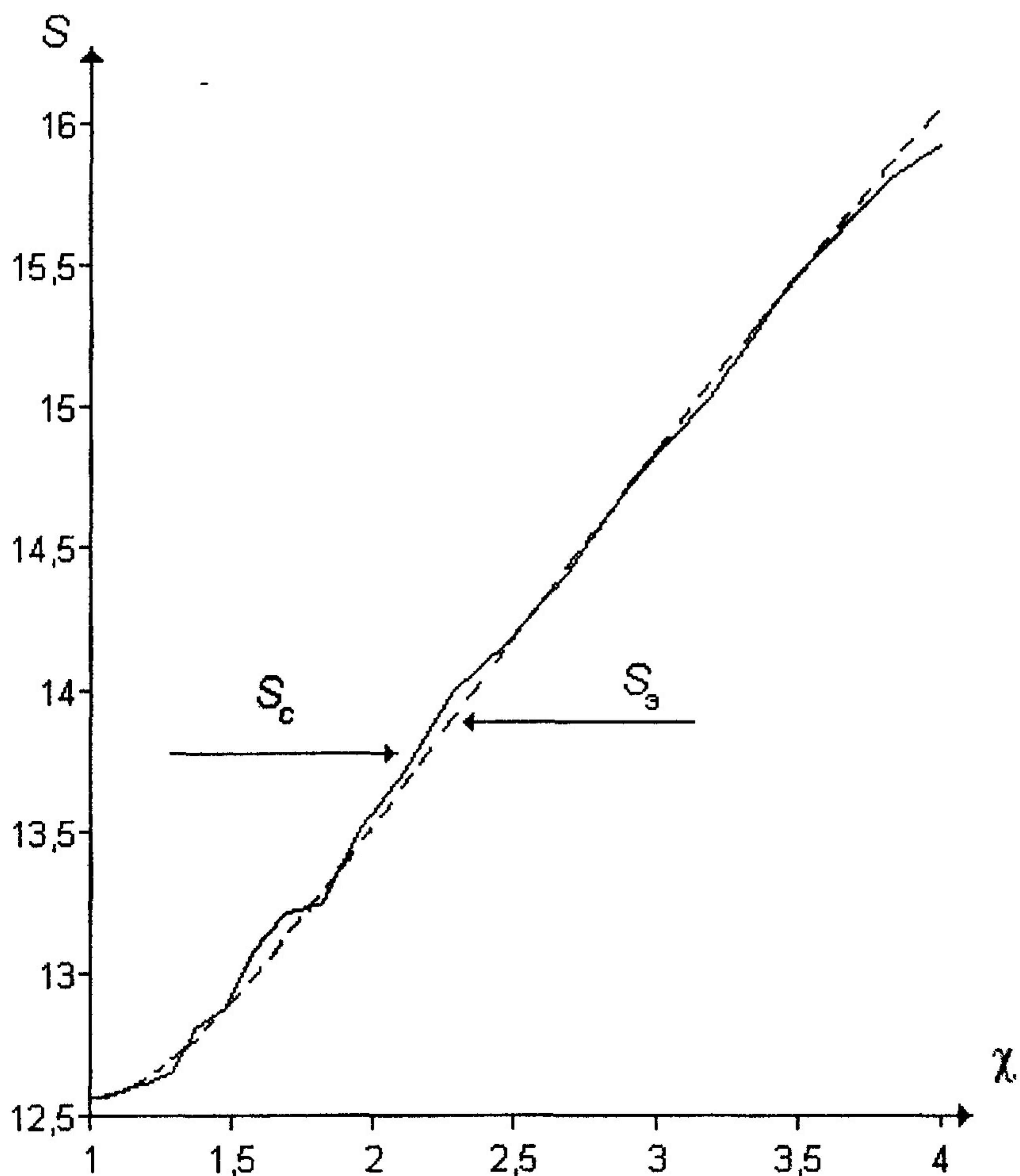


Рис. 6

Объем сферического сегмента равен

$$V_{сф.} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right). \quad (41)$$

Подставляя выражение (40) и (41) в (29), получим объем СК

$$V_c = 2\pi \int_0^{a-h} \left(-cch \frac{x}{c} + c + b \right)^2 dx + 2\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right). \quad (42)$$

Объем эллипсоида равен объему начального пузырька:

$$V_э = \frac{4}{3} \pi. \quad (43)$$

Сравнивая (42) и (43), получаем зависимость для определения h :

$$V_c = 2\pi \int_0^{a-h} \left(-cch \frac{x}{c} + c + b \right)^2 dx + 2\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi. \quad (44)$$

Аналитическое решение этого уравнения очень громоздко, поэтому дальнейшее решение было проведено численно с помощью математического пакета MAPLE.

Значения h , полученные из (44), подставлялись в (38), и рассчитывалась площадь СК. На рис.6 приведена зависимость $S_c(\chi)$, полученная численно (сплошная кривая). Здесь же приведена зависимость для поверхности соответственного эллипсоида – $S_э(\chi)$ (пунктирная кривая). Видно, что эти зависимости расходятся незначительно.

С использованием результатов, представленных на рис.6, была получена зависимость относительной погрешности (рис. 7):

$$\Delta S = \frac{S_c - S_э}{S_э} \%.$$

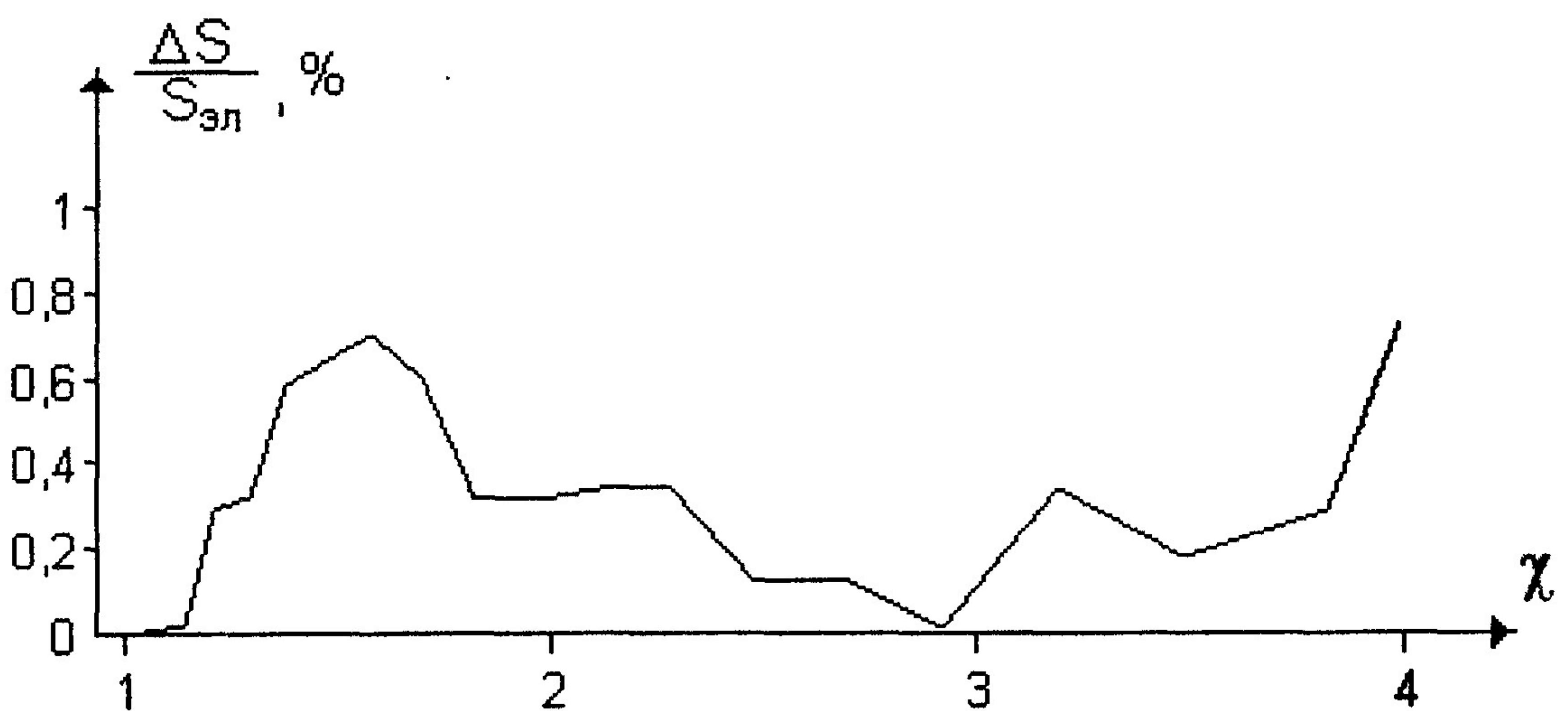


Рис. 7

Видно, что в интересующем нас диапазоне деформации площадь поверхности двухосного эллипсоида отличается от площади поверхности соответствующего сферокатеноида не более, чем на 0,8%. Это позволяет в дальнейшем моделировать реальные деформированные газовые пузырьки вытянутым двухосным эллипсоидом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канн, К.Б. Капиллярная гидродинамика пен / К.Б. Канн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
2. Фиников, С.П. Дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. М.: Изд-во МГУ, 1961.
3. Сивухин, Д.В. Курс общей физики / Д.В. Сивухин. Т. 2. М.: Наука, 1979.
4. Фильчаков, П.Ф. Справочник по элементарной математике / П.Ф. Фильчаков. Киев: Наук. думка, 1973.
5. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1966.
6. Дубровин, Б.А. Современная геометрия / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. М.: Наука, 1986.
7. Ляшко, И.И. Справочное пособие по математическому анализу / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук. Киев: Вища школа, 1984.

**DEFORMATION OF SINGLE GAS BUBBLE.
1. THE MODEL BUBBLE**

A.M. Logvinov, K.B. Kann

Belgorod State University

The model gas bubble (sferocatenoid) strain under an operation of local loading is considered. The admissible range of a strain is estimated. Comparison of surface of a distorted model bubble and a surface of the prolated biaxial ellipsoid shows, that the difference does not exceed 0.8 %.