

УДК 532.546

## К ВОПРОСУ ОБ ИНТРУЗИИ МОРСКИХ ВОД В ПРИБРЕЖНЫЕ ПРЕСНОВОДНЫЕ ГОРИЗОНТЫ

*Э.Н. Береславский, Д.А. Аракелян*  
*Академия гражданской авиации (ТУ)*

Рассматривается двумерное (в вертикальной плоскости) установившееся течение пресных грунтовых вод в полубесконечном напорном водоносном слое к морю с соленой водой, дно которого составляет произвольный угол с горизонтом. На базе этой модели разработан алгоритм расчета интрузии (т.е. внедрения) морских вод в прибрежные пресноводные пласты. С помощью точных аналитических зависимостей, полученных с использованием метода П.Я. Полубариновой-Кочиной, и численных расчетов приводится гидродинамический анализ структуры и характерных особенностей модулируемого процесса, дается оценка влияния на степень интрузии каждого из определяющих физических параметров модели, а также угла наклона морского дна. Приводятся решения для случая течения, когда угол наклона равен прямому (схема Михайлова), в рамках которого отмечается известное решение П.Я. Полубариновой-Кочиной задачи о фильтрации в бесконечно широкой перемычке, а также предельного случая движения, когда угол наклона равен развернутому (схема Бэра-Дагана).

Обычно в задачах интрузии морских вод в прибрежные водоносные пласты предполагается, что морское дно является горизонтальным [1] или отток пресной воды в прибрежных зонах происходит в горизонтальные дренажные щели [2]. Существенным развитием идей явилась работа [3], где впервые была предложена трактовка границы раздела между пресными и солеными водами как аналога промежутка высачивания и рассмотрено ее вертикальное положение. Эта работа явилась отправной при дальнейших исследованиях задач подобного рода [4-6].

Ниже дан наиболее общий случай, когда движение пресных вод происходит к морю, дно которого составляет с горизонтом произвольный угол  $\nu$  ( $0 < \nu \leq 1$ ).



### 1. Постановка задачи

Пресная вода плотности  $\rho_1$ , движущаяся в полубесконечном напорном водоносном горизонтальном пласте, который расположен на непроницаемом слое каменной соли, поступает в море с более плотной соленой водой плотности  $\rho_2$  ( $\rho_2 > \rho_1$ ), дно которого составляет с горизонтом произвольный угол  $\pi\nu$  ( $0 < \nu \leq 1$ ). В результате первоначально наклонная граница раздела между движущимися пресными и неподвижными солеными водами начинает деформироваться в правой нижней части пласта, смещаясь влево навстречу потоку. Через некоторое время возможно установившееся движение [7-10], когда рассол успокаивается, граница раздела оказывается линией тока для пресной воды, а движение морской воды в сторону суши принимает форму языка, проникающего в пресноводный пласт (фиг. 1).

Будем полагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации  $\chi = const$  и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность водоносного слоя  $T$ , фильтрационный расход  $Q$  и параметр  $\rho = \rho_2 / \rho_1 - 1$  считаются заданными. Влиянием капиллярных и диффузионных явлений на границе раздела, как это принято в задачах подобного рода [1-3,7-10], пренебрегаем.

При таких допущениях, традиционных для рассматриваемого класса течений, математическое моделирование изучаемого процесса сводится к нахождению комплексного потенциала течения  $\omega(z)$  при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} AB : \varphi = \rho y, y = x \operatorname{tg} \pi \nu ; BC : \psi = Q, y = T \\ CD : \psi = 0, y = 0 ; AD : \varphi = \rho y, \psi = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  – гармонические внутри области  $z = x + iy$  взаимно сопряженные функции: потенциал скорости и функция тока, отнесенные к  $\chi$ ,  $Q$  – фильтрационный расход, также отнесенный к  $\chi$ . Задача состоит в определении положения границы раздела  $AD$  и, следовательно, ширины  $l_1$  и высоты  $l_2$  языка соленой воды, вторгшегося в пресноводный пласт.

### 2. Построение решения

Для решения задачи используем метод П.Я. Полубариновой-Кочиной [7], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса. Вводится вспомогательная переменная  $\zeta$  и функции:  $z(\zeta)$  конформно отображающая верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на область  $z$  (соответствие точек указано на фиг. 2), комплексная скорость  $w = d\omega/dz$ , а также производные

$$Z = dz/d\zeta, \Omega = d\omega/d\zeta. \quad (3.1)$$



Применяя метод П.Я. Полубариновой-Кочиной, получаем искомые функции:

$$Z = Me^{\pi v} \frac{Y_1(\zeta)}{\Delta(\zeta)}, \quad \Omega = A\rho \operatorname{tg} \pi v \frac{e^{\pi v} Y_1(\zeta) - iAY_2(\zeta)}{\Delta(\zeta)} \quad (3.2)$$

где  $M > 0$  – масштабная постоянная моделирования,

$$A = \frac{\operatorname{tg} \pi v \Gamma^2(1-v)}{\Gamma(1.5-v)\Gamma(0.5-v)}$$

Можно проверить, что функции (3.1), определенные на основании соотношения (3.2), удовлетворяют граничным условиям (2.1), сформулированным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись представлений (3.2) для различных участков границы области  $\zeta$  с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области  $\zeta$  приводит к замыканию контура области движения  $z$  и тем самым служит контролем вычислений. В результате получим выражения

$$T = \frac{M\pi F(v, 0.5, v+0.5, 1-1/a)}{a^v(a-1)^{1-v}}, \quad Q = \frac{MB\rho\pi F(v, 0.5, 1, 1/a)}{a^v(a-1)^{1-v}} \quad (3.3)$$

$$l_1 = M \int_{-\infty}^0 \frac{F(v, 0.5, v+0.5, \zeta/\zeta-1)}{(a-\zeta)(1-\zeta)} d\zeta, \quad (3.4)$$

$$l_2 = MB \int_{-\infty}^0 \frac{F(v, 0.5, 1, 1/1-\zeta)}{(a-\zeta)(1-\zeta)} d\zeta$$

где  $B = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(v+0.5)}{\Gamma(v)}$

Контролем счета являются другие выражения для величин  $T$  и  $Q$ :

$$T = l_2 - M \sin \pi v \int_0^1 \frac{F(v, v, v+0.5, 1-\zeta)}{\Delta(\zeta)} d\zeta \quad (3.5)$$

$$Q = \frac{M\rho\sqrt{\pi}B}{\Gamma(1.5-v)\Gamma(v)} \int_0^1 \frac{\zeta^{0.5-v} F(0.5, 0.5, 1.5-v, \zeta)}{\Delta(\zeta)} d\zeta$$

### 3. Расчет схемы течения и анализ численных результатов

На рис. 1 и 3 изображены картины течения, рассчитанные при  $v = 0.25$ ,  $T = 1.5$ ,  $Q = 0.007$ ,  $\rho = 0.01$  и  $v = 0.75$ ,  $T = 1$ ,  $Q = 0.01$ ,  $\rho = 0.01$  соответственно. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров  $v$ ,  $\rho$ ,  $Q$ , и  $T$  на величины  $l_1$  и  $l_2$  приведены в табл.1 ( $0 < v < 0.5$ ) и табл.2 ( $0.5 \leq v \leq 1$ ). В каждом из четырех блоков таблиц (они разделены вертикальными линиями) варьируется (в допустимом диапазоне) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются (базовый вариант):  $v = 0.25$ ,  $T = 1.5$ ,  $Q = 0.007$ ,  $\rho = 0.01$  (табл.1) и  $v = 0.75$ ,  $T = 1$ ,  $Q = 0.01$ ,  $\rho = 0.01$  (табл.2). На рис. 4 сплошными линиями представлены зависимость величин  $l_1$  (кривая 1) и  $l_2$  (кривая 2) от  $v$  при  $0 < v < 0.5$ , а штриховыми – при  $0.5 \leq v \leq 1$ .



Анализ данных таблиц и графика приводит к следующим выводам.

Прежде всего отметим, что увеличение мощности водоносного слоя, плотности соленых вод и угла наклона морского дна и уменьшение расхода увеличивают размеры языка соленой воды.

Так, при  $\nu = 0.25$  с уменьшением параметров  $\rho$ ,  $Q$  и  $T$  в 1.24 раза величины  $l_1$  и  $l_2$  увеличиваются на 791% и 987% соответственно. При этом относительные размеры языка могут быть весьма значительными: при  $\nu = 0.25$ ,  $\rho = 0.01$ ,  $Q = 0.01$  и  $T = 1.921$  имеем  $l_1 = 1.9076$ ,  $l_2 = 1.5715$  (табл.2), т.е. высота и ширина языка могут достигать 82% и 99% от мощности пласта.

Существенное влияние на степень интрузии оказывает величина угла  $\nu$ , причем наиболее значительные изменения наблюдаются при малых значениях  $\nu$ ,  $\rho$  и  $T$ , значениях угла  $\nu$ , близких к 0.5, и больших значениях  $Q$ . Так при  $T = 1.5$ ,  $Q = 0.007$ ,  $\rho = 0.0089$  и  $\nu = 0.1667$  получаем  $l_1 = 0.0262$ ,  $l_2 = 0.0107$ , а при  $\nu = 0.49$  –  $l_1 = 1.6670$ ,  $l_2 = 1.0184$ , т.е. изменение параметра  $\nu$  в 3 раза приводит к увеличению размеров языка соответственно в 63.6 и 95.2 раза. Можно заметить также, что в случае  $0 < \nu < 0.5$  ширина языка превосходит его высоту в 1.53-2.48 раз, причем, как правило, выполняется и неравенство  $\frac{l_2}{\sin \pi \nu} < l_1$ , т.е. длина участка  $OA$  меньше ширины языка. При  $0.5 \leq \nu \leq 1$ , наоборот, почти всегда длина участка  $OA$  больше ширины  $l_1$ , а при малых значениях параметров  $\rho$ ,  $T$  и больших  $Q$  уже высота языка  $l_2$  превосходит его ширину, причем разница может достигать 36%: при  $T = 0.658$  имеем  $l_1 = 0.2619$ ,  $l_2 = 0.3571$  (табл.2),  $\frac{l_2}{\sin \pi \nu} = 0.5051$ , так что  $OA \approx 1.9l_1$ .

Примечательно, что, как и ранее [4-6], в случае малых значений параметров  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $T$  и больших значений  $\nu$ ,  $Q$  выполняется приближенное равенство  $\frac{l_2}{\sin \pi \nu} \approx l_1$ , т.е. длины участков  $OD$  и  $OA$  почти совпадают.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Бэр, Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. М.: Мир, 1971. 452 с.
2. Полубаринова-Кочина, П.Я. О линзе пресной воды над соленой водой / П.Я. Полубаринова-Кочина // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 418-420.
3. Михайлов, Г.К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью / Г.К. Михайлов // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 945-948.
4. Береславский, Э.Н. Исследование отжима потока в некоторых течениях в прибрежных водоносных слоях / Э.Н. Береславский // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 836-848.
5. Береславский, Э.Н. О расчете фильтрации грунтовых вод в прибрежных напорных пластах / Э.Н. Береславский // Изв.РАН.МЖГ. 2004. № 3. С. 101-110.
6. Береславский, Э.Н. Математическое моделирование интрузии морских вод в прибрежные пресноводные горизонты / Э.Н. Береславский // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 5. С. 625-629.
7. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. М.: Наука, 1997. 664 с.
8. Полубаринова-Кочина, П.Я. О фильтрации в анизотропном грунте / П.Я. Полубаринова-Кочина // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101-104.
9. Полубаринова-Кочина, П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
10. Михайлов, Г.К. Движение жидкостей и газов в пористых средах / Г.К. Михайлов, В.Н. Николаевский // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 585-648.

**TO QUATION FOR INTRUSION SEA WATER INTO  
A FRESH SUBSOIL WATER LAYERS**

*E.N. Bereslavsky, D.A. Arakelajn*

*Belgorod State University*

Within the frameworks of the two-dimensional theory of steady filtration, we studied the mathematical model of fresh subsoil waters running through a water bearing layer under pressure to the sea (a basin, ditch or reservoir), which bottom forms a free angle with the horizon, with salty water. For studying this problem formulated and used P.J. Polubarinova-Kochina's method to solve the edge task of the analytical functions theory. On the basis of this model we elaborated an algorithm of calculation of intrusion in such cases when streams of subsoil water unload in the sea at lateral inflow with the help of received exact analytical dependencies and numerical calculations we analyzed the pressing degree. The hydrodynamical structure is described and prominent features of the modeled current are revealed.

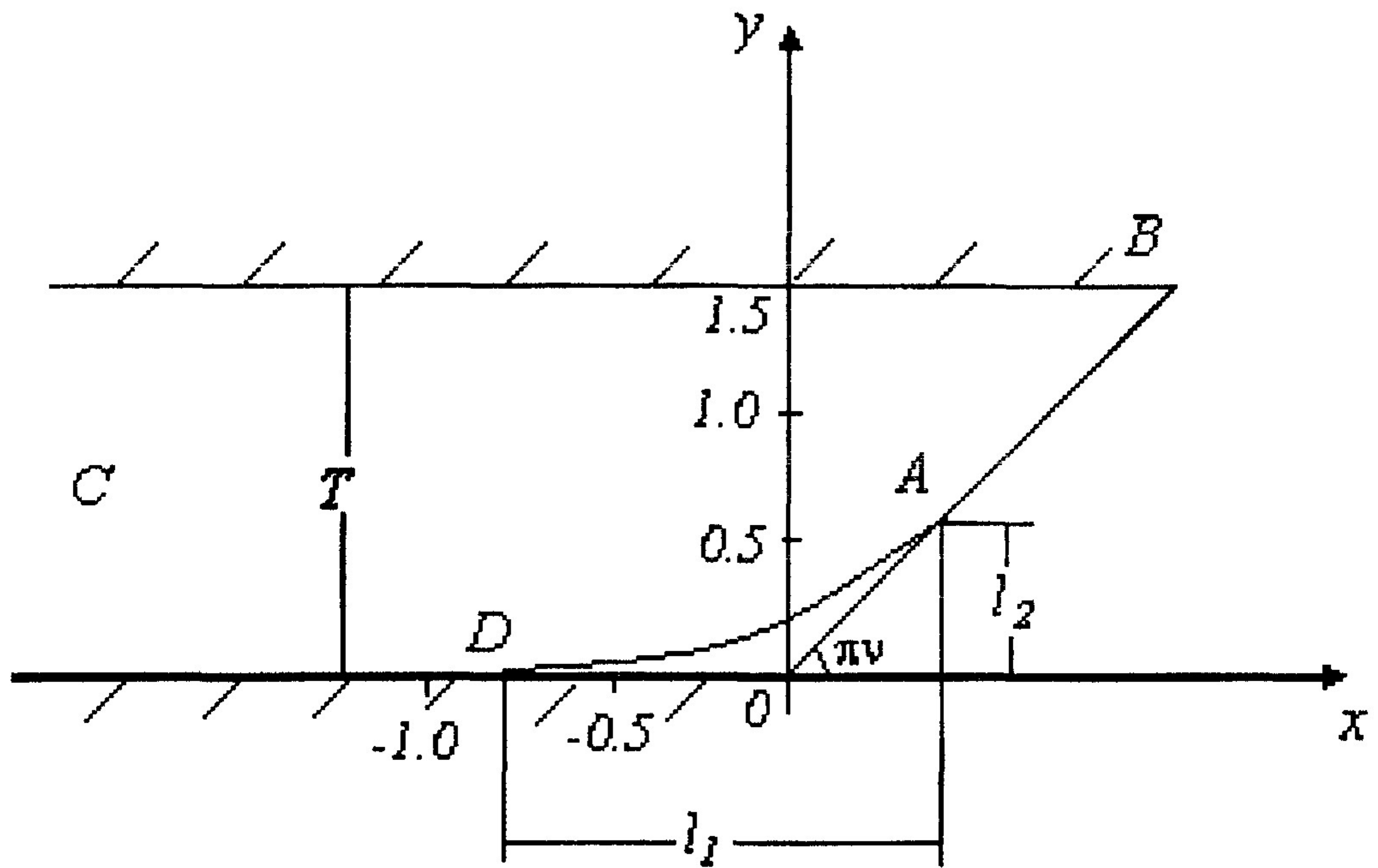


Рис. 1

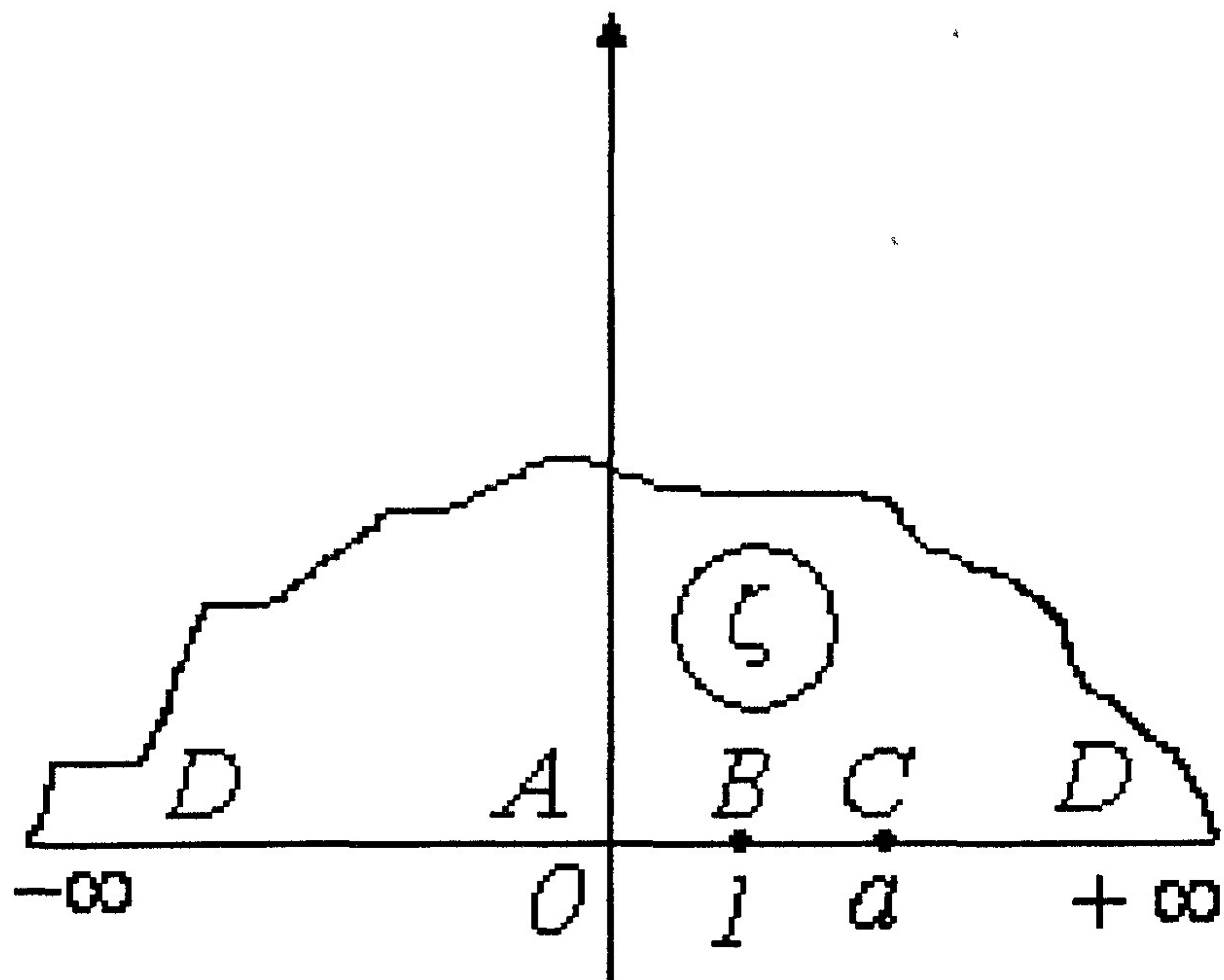


Рис. 2

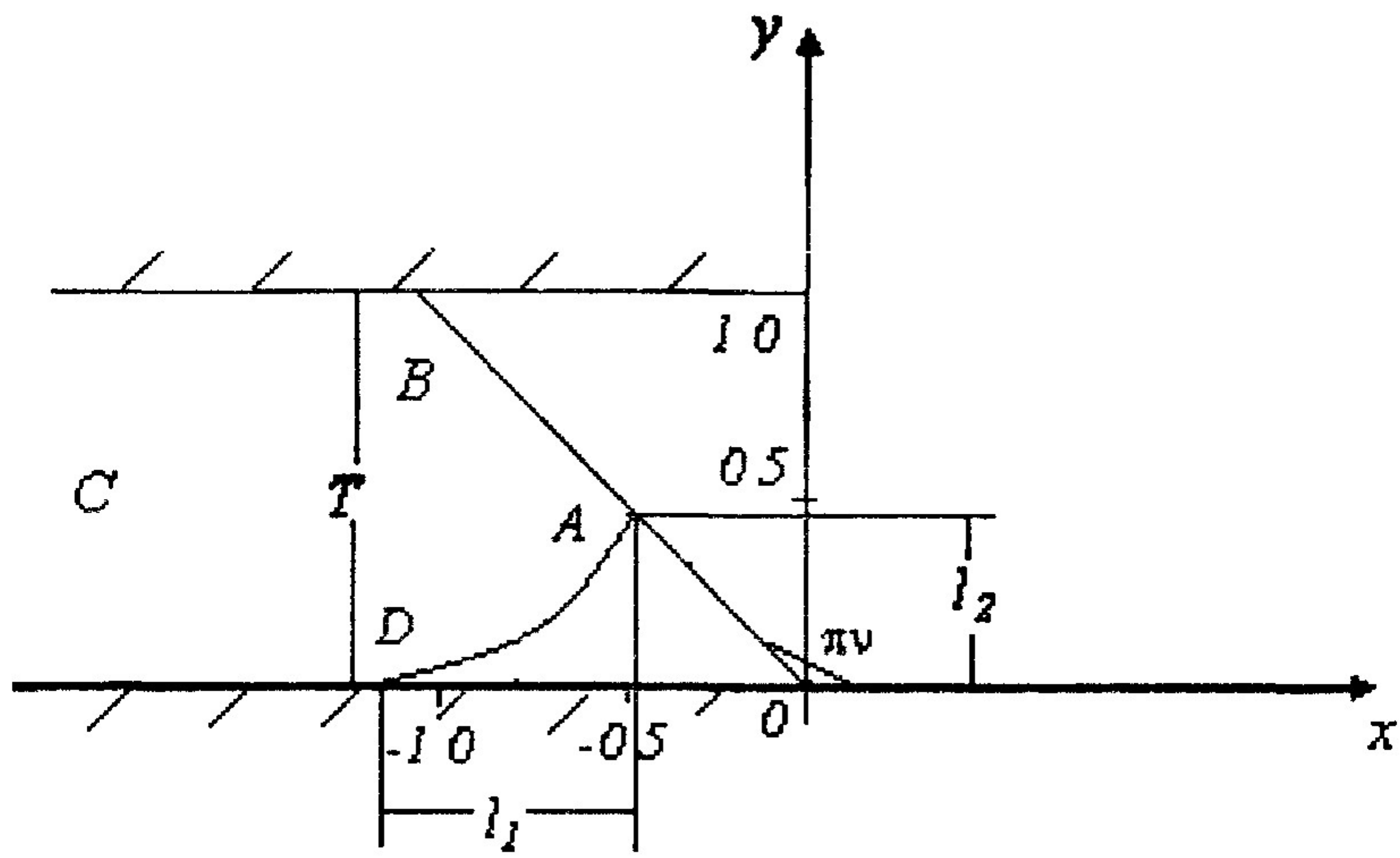


Рис 3

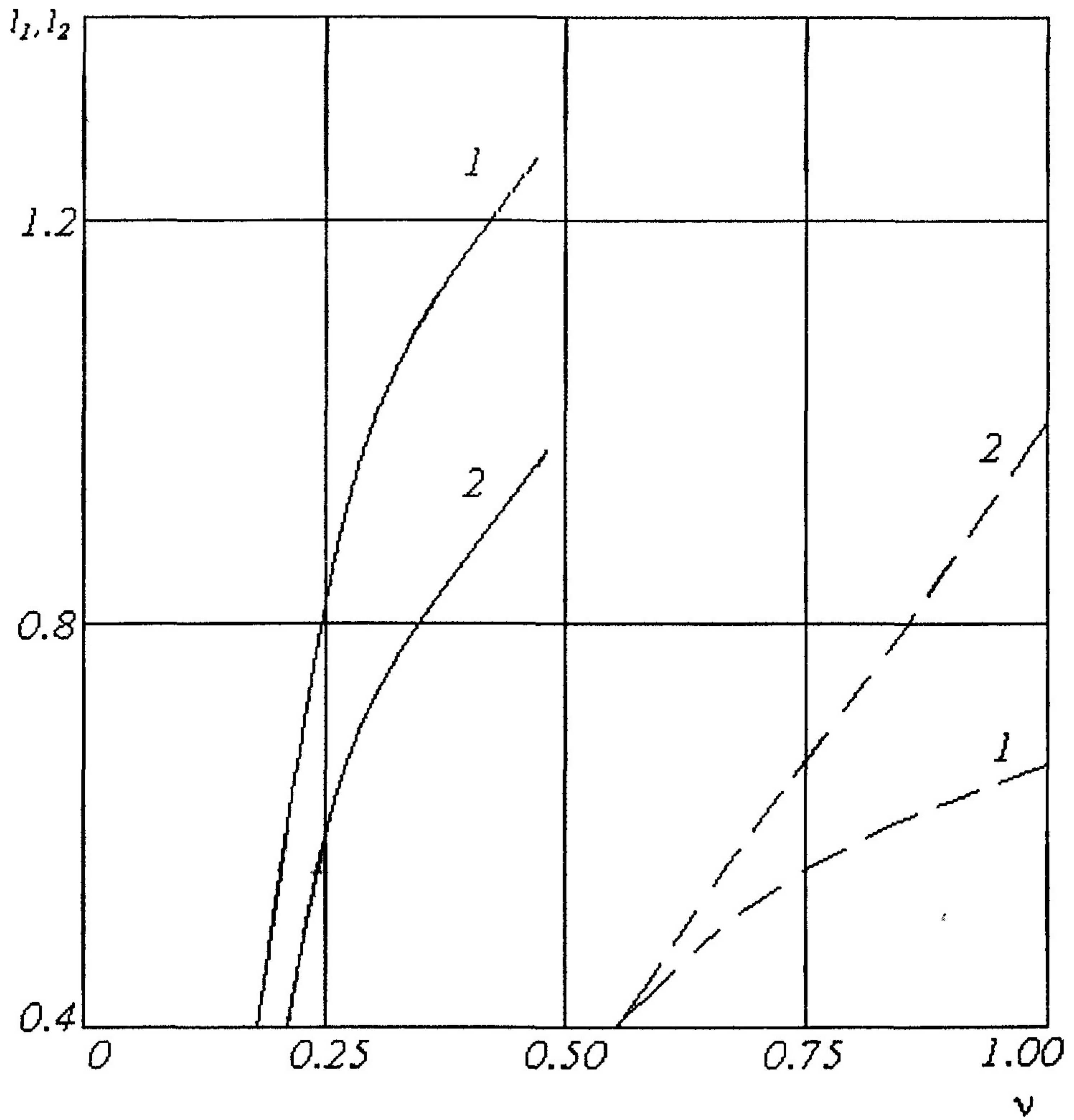


Рис. 4



Таблица 1

$v \cdot 10^3$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$p \cdot 10^4$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$T \cdot 10^3$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$
520	3742	3550	66	5056	6334	52	9938	8182	658	2619	3571
666	5046	5594	83	5287	6492	84	6450	7135	833	3996	5117
750	5564	6667	114	5518	6639	116	4982	6241	1136	7043	7971
833	5971	7723	179	5750	6775	148	4065	5509	1786	16565	14366
1000	6580	1000	417	6075	6952	178	3525	4949	1921	19076	15715

Таблица 2

$v \cdot 10^3$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$p \cdot 10^4$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$T \cdot 10^3$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$
166	1566	632	89	6174	3258	63	11084	5356	1346	5689	2994
250	8642	4372	94	7298	3780	67	9634	4786	1410	6864	3555
333	12036	6857	99	8419	4276	71	8327	4236	1474	8117	4135
410	13721	8437	104	9529	4744	75	7148	3712	1538	9446	4731
490	14799	9682	111	11059	5348	78	6341	3337	1667	12313	5951