



УДК 519.6  
DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-2-416-431

## Синтез аналоговых фильтров Гильберта и исследование их характеристик

**Волчков В.П., Антипова А.Н.**

Московский технический университет связи и информатики,  
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а  
E-mail: volchkovvalery@mail.ru, ann.ant2017@yandex.ru

**Аннотация.** Разрабатывается метод синтеза аналоговых фильтров Гильберта с бесконечной и конечной импульсными характеристиками, которые позволяют обеспечить в заданном диапазоне частот практически идеальный поворот фазы на 90 градусов, равномерное усиление входного сигнала и устойчивость фильтров. Приводится вывод аналитических выражений для импульсных и частотных характеристик таких фильтров, исследуются их свойства, строятся соответствующие графики. На основе полученных выражений проведен поэтапный синтез аналогового фильтра Гильберта с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и его моделирование. Экспериментально исследуются особенности и причины возникновения эффекта Гиббса в частотных характеристиках такого КИХ-фильтра. Предлагаются и анализируются эффективные методы борьбы с переходным процессом Гиббса в частотной области и показано, что при специальном выборе весового сглаживания можно получить КИХ-фильтр Гильберта с практически идеальными характеристиками фазовращателя в заданной рабочей полосе частот. Оценивается качество работы КИХ-фильтров Гильберта по разным критериям. Приводятся аналитические выражения для импульсной и частотных характеристик физически реализуемого фильтра Гильберта.

**Ключевые слова:** синтез аналоговых фильтров, фильтр Гильберта, физически реализуемый фильтр Гильберта, идеальный фазовращатель

**Для цитирования:** Волчков В.П., Антипова А.Н. 2022. Синтез аналоговых фильтров Гильберта и исследование их характеристик. Экономика. Информатика, 49(2): 416–431. DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-2-416-431

---

## Synthesis of Analog Hilbert Filters and Research of Their Characteristics

**Valery P. Volchkov, Anna N. Antipova**

Moscow Technical University of Communications and Informatics,  
8a Aviamotornaya St, 111024, Moscow, Russia  
E-mail: volchkovvalery@mail.ru, ann.ant2017@yandex.ru

**Abstract.** A method is being developed for synthesizing analog Hilbert filters with infinite and finite impulse responses, which make it possible to provide, in a given frequency range, an almost perfect phase rotation by 90 degrees, uniform input signal amplification, and filter stability. The derivation of analytical expressions for the impulse and frequency characteristics of such filters is given, their properties are investigated, and the corresponding graphs are constructed. On the basis of the obtained expressions, a stage-by-stage synthesis of an analog Hilbert filter with a finite impulse response (FIR) and its modeling were carried out. The features and causes of the Gibbs effect in the frequency characteristics of such a FIR filter are experimentally investigated. We propose and analyze effective methods for dealing with the Gibbs transient in the frequency domain and show that with a special choice of weight smoothing, it is possible to obtain a Hilbert FIR filter with almost ideal phase shifter characteristics in a given operating frequency band. The quality of the FIR Hilbert filters is evaluated according to various criteria. Analytical expressions are given for the impulse and frequency responses of a physically realizable Hilbert filter.

**Keywords:** synthesis of analog filters, Hilbert filter, physically realizable Hilbert filter, ideal phase shifter

**For citation:** Volchkov V.P., Antipova A.N. 2022. Synthesis of Analog Hilbert Filters and Research of Their Characteristics. Economics. Information technologies, 49(2): 416–431 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-2-416-431

### Описание проблемы и ее актуальность

Фильтр Гильберта представляет собой идеальный фазовращатель, который реализует поворот фазы сигнала на  $\pi/2$  (90 градусов), что имеет важное значение в различных технических приложениях при формировании и обработке сигналов, например, в системах связи, радиолокации и др. Идеальный аналоговый фильтр Гильберта (ИФГ) математически описывается интегральным преобразованием Гильберта:

$$\Gamma(\cdot) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cdot)}{t-\tau} d\tau = (\cdot) * g_{\Gamma}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$
$$g_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $g_{\Gamma}(t)$  – импульсная характеристика (ИХ) фильтра Гильберта, а символ звездочка \* – операция свертки. Ниже приводятся известные выражения для комплексной частотной характеристики (КЧХ), амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) идеального фильтра Гильберта [Айфичер, Джервис, 2008; Смит, 2012; Сергиенко, 2011]:

$$\text{КЧХ: } K_{\Gamma}(jf) = \mathcal{F}(g_{\Gamma}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt = \begin{cases} j, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ -j, & f > 0 \end{cases} = -j \cdot \text{sign}(f), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\text{АЧХ: } K_{\Gamma}(f) = |K_{\Gamma}(jf)| = \begin{cases} 1, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ 1, & f > 0 \end{cases} = |\text{sign}(f)|, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\text{ФЧХ: } \Phi_{\Gamma}(f) = \arg(K_{\Gamma}(jf)) = \begin{cases} \pi/2, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ -\pi/2, & f > 0 \end{cases} = -\frac{\pi}{2} \text{sign}(f), \quad f \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Приведем графики АЧХ и ФЧХ:

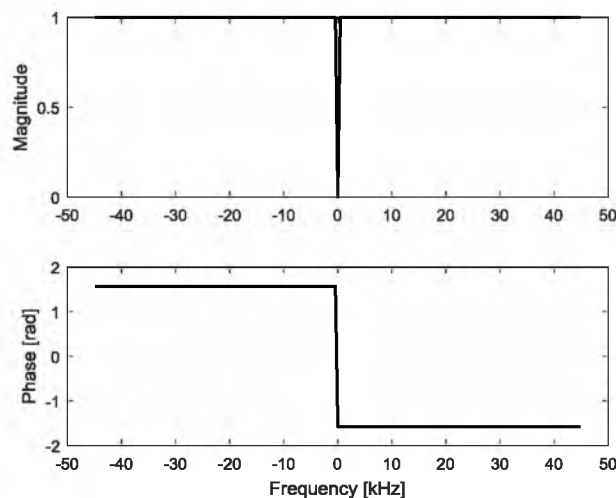


Рис. 1. АЧХ (вверху) и ФЧХ (внизу) идеального фильтра Гильберта  
Fig. 1. Amplitude-frequency (top) and Phase-frequency (bottom) characteristics of an ideal Hilbert filter



Как видно из рис. 1, АЧХ  $K_{\Gamma}(f)$  во всех точках, кроме нулевой частоты, равна единице, т. е. идеальный фильтр Гильберта не меняет амплитудные соотношения в спектре сигнала на всей оси частот. В то же время, согласно ФЧХ  $\Phi_{\Gamma}(f)$  на том же рисунке, спектральные составляющие сигнала в области положительных частот поворачиваются на  $-\pi/2$ , а в отрицательной области частот – на  $\pi/2$ .

Анализ выражений (2)–(4) и соответствующие графики показывают, что идеальный фильтр Гильберта не может быть реализован на практике по следующим причинам:

- импульсная характеристика  $g_{\Gamma}(t) = 1/\pi t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  имеет бесконечную энергию, а значит не может описывать устойчивый фильтр;
- при  $t = 0$  функция  $g_{\Gamma}(t)$  имеет разрыв 2-го рода, устремляясь к бесконечности;
- не выполняется принцип причинности:  $g_{\Gamma}(t) = 0$ , при  $t < 0$ , согласно которому сигнал на выходе фильтра не может появиться раньше его поступления на вход фильтра

Таким образом, для построения физически реализуемого фильтра Гильберта необходимо избавиться от точек разрыва, обеспечить его устойчивость и выполнение принципа причинности. Естественно, платой за это могут служить ухудшение амплитудных и/или фазовых характеристик фильтра Гильберта.

Цель данной статьи – разработать метод синтеза устойчивых аналоговых БИХ- и КИХ-фильтров Гильберта, которые сохраняют основные характеристики идеального фазовращателя (равномерное усиление и поворот фазы на 90 градусов), но только в заданной рабочей полосе частот и с возможностью его физической реализуемости. Другими словами, у реализуемого фильтра Гильберта потери качества должны сводиться лишь к ограничению его частотного диапазона, величиной которого можно управлять.

Отметим, что все синтезируемые ниже фильтры Гильберта обладают важным свойством – их частотные характеристики строго ограничены или практически ограничены сверху некоторой частотой  $f_{\max}$ , т. е. всегда можно выполнить качественный переход от непрерывного времени к дискретному, применив теорему Котельникова. Это значительно упрощает последующий синтез цифровых фильтров Гильберта при сохранении качества идеального фазовращателя в заданной полосе частот.

В литературе нет наглядных материалов по синтезу аналоговых БИХ- и КИХ-фильтров Гильберта с указанными выше свойствами. Существующие программы для фильтра Гильберта из математического пакета MATLAB ориентированы на дискретное время и являются закрытыми, что не позволяет полноценно работать с различными параметрами, влияющими на его характеристики. Поэтому решаемая задача является актуальной.

Ниже излагается метод синтеза и получены аналитические выражения импульсных и частотных характеристик для различных вариантов устойчивого аналогового фильтра Гильберта, которые позволяют обеспечить идеальный поворот фазы на 90 градусов в заданной рабочей полосе частот. Приводятся и исследуются графики ИХ, АЧХ и ФЧХ таких фильтров Гильберта, экспериментально оценивается качество их работы по сравнению с аналогичными характеристиками идеального фильтра Гильберта. Полученные в работе аналитические выражения для аналоговых БИХ- и КИХ-фильтров Гильберта позволяют в дальнейшем эффективно использовать их для синтеза дискретных цифровых фильтров Гильберта, в том числе рекурсивных и нерекурсивных.

### Математическая формализация задачи и ее решение

Решение задачи разобьем на три этапа: 1) вывод аналитических выражений для устойчивого аналогового фильтра Гильберта (УФГ) с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-УФГ) и идеальными частотными характеристиками внутри заданного диапазона; 2) синтез и исследование устойчивого аналогового фильтра Гильберта с конечной им-

пульсной характеристикой (КИХ-УФГ), идеальной ФЧХ и практически идеальной АЧХ;  
 3) синтез физически реализуемого КИХ-УФГ.

**1. Синтез и анализ фильтра БИХ-УФГ.** Для построения устойчивого БИХ-фильтра Гильберта, работающего в заданном диапазоне частот, за основу был взят SQRT-фильтр [Сергиенко, 2011], импульсная характеристика которого математически описывается выражением

$$g_{sqr}(t) = \frac{4\beta\omega_o}{\pi^2 - (4\beta\omega_o t)^2} \left( \cos[\omega_o(1+\beta)t] + \frac{\sin[\omega_o(1-\beta)t]}{4\beta\omega_o t / \pi} \right), \omega_o = 2\pi F_o, t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье от (5), получим КЧХ этого фильтра:

$$K_{sqr}(jf) = \begin{cases} 1, & |f| \leq F_o(1-\beta) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4F_o\beta}(|f| - F_o(1-\beta))\right), & F_o(1-\beta) < |f| \leq F_o(1+\beta) \\ 0, & |f| > F_o(1+\beta) \end{cases} \quad (6)$$

В формулах (5) и (6)  $\omega_o = 2\pi F_o$ , где  $F_o$  – частота среза, на которой  $K_{sqr}(jF_o) = 0,5$ . Ширина полосы пропускания фильтра совпадает с максимальной частотой спектра и равна  $f_{\max} = F_o(1+\beta)$ . Рабочей полосой такого фильтра назовем интервал положительных частот  $[0, F_h]$ ,  $F_h = F_o(1-\beta)$ , в пределах которого  $K_{sqr}(jf) = 1$ , то есть спектральные компоненты входного сигнала проходят без искажений. Коэффициент сглаживания  $\beta \in [0,1]$  позволяет изменять ширину полосы фильтра. Во всей области частот  $K_{sqr}(jf) \geq 0$  – четная вещественная неотрицательная функция, поэтому АЧХ данного фильтра  $K_{sqr}(f) = |K_{sqr}(jf)|$  будет совпадать с (6).

Графики кривых ИХ  $g_{sqr}(t)$  и АЧХ  $K_{sqr}(f)$  для частоты среза  $F_o = 20$  кГц и коэффициента сглаживания  $\beta = 0,1$  представлены на рис. 2, при этих значениях параметров  $f_{\max} = 22$  кГц,  $F_h = 18$  кГц.

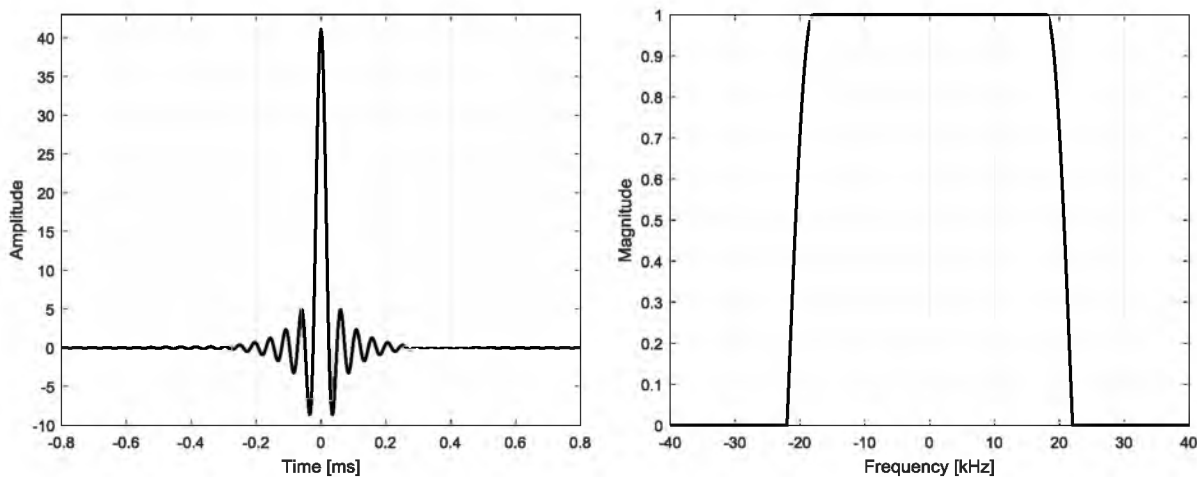


Рис. 2. ИХ SQRT-фильтра (слева), АЧХ SQRT-фильтра (справа)  
 Fig. 2. Impulse response (left), Frequency response (right) of the SQRT-filter

Синтез аналогового БИХ-УФГ фильтра сводится к нахождению аналитического выражения для его импульсной характеристики путем свертки импульсных характеристик SQRT-фильтра (6) и идеального фильтра Гильберта (2)



$$\hat{g}_\Gamma(t) = g_\Gamma(t) * g_{sqr}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Известно [Сергиенко, 2011], что в частотной области данная операция приводит к перемножению КЧХ фильтра Гильберта и SQRT-фильтра, заданных формулами (2) и (6), т. е.

$$\hat{K}_\Gamma(jf) = \mathcal{F}(\hat{g}_\Gamma(t)) = K_\Gamma(jf) \cdot K_{sqr}(jf), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

откуда следуют выражения для АЧХ и ФЧХ фильтра БИХ-УФГ

$$\hat{K}_\Gamma(f) = |\hat{K}_\Gamma(jf)|, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$\hat{\Phi}_\Gamma(f) = \arg(\hat{K}_\Gamma(jf)), \quad f \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Импульсная характеристика (8) может быть получена с помощью обратного преобразования Фурье от КЧХ  $\hat{K}_\Gamma(jf)$

$$\hat{g}_\Gamma(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{K}_\Gamma(jf)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}_\Gamma(jf) e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} \hat{K}_\Gamma(jf) e^{j2\pi ft} df. \quad (11)$$

Так как  $K_\Gamma(jf)$  является чисто мнимой нечетной функцией частоты, а  $K_{sqr}(jf)$  – четная вещественная функция, то согласно (8) их произведение  $\hat{K}_\Gamma(jf)$  – нечетная чисто мнимая функция. Следовательно, по известным свойствам преобразования Фурье импульсная характеристика УФГ  $\hat{g}_\Gamma(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{K}_\Gamma(jf))$  должна быть вещественной и нечетной.

Для взятия интеграла (11) разобьем интервал частот  $[-f_{\max}, f_{\max}]$ , где (8) отлична от нуля, на четыре области:  $\Omega_1 = [-F_o(1+\beta), -F_o(1-\beta)]$ ,  $\Omega_2 = [-F_o(1-\beta), 0]$ ,  $\Omega_3 = [0, F_o(1-\beta)]$ ,  $\Omega_4 = [F_o(1-\beta), F_o(1+\beta)]$ , выполним интегрирование по каждому из этих отрезков, а затем полученные результаты сложим. В результате после преобразований получим

$$\begin{aligned} \hat{g}_\Gamma(t) = & \frac{4F_o\beta}{\pi(1+8F_o\beta t)} \left( \cos(2\pi F_o t(1-\beta)) + \sin(2\pi F_o t(1+\beta)) \right) - \\ & - \frac{4F_o\beta}{\pi(1-8F_o\beta t)} \left( \cos(2\pi F_o t(1-\beta)) - \sin(2\pi F_o t(1+\beta)) \right) + \\ & + (1 - \cos(2\pi F_o t(1-\beta))) / \pi t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

Детальный анализ аналитического выражения (12) показывает, что функция  $\hat{g}_\Gamma(t)$  является непрерывной за исключением одной точки  $t=0$ , где она имеет устранимый разрыв. Доопределяя ее при  $t=0$  пределом  $\hat{g}_\Gamma(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \hat{g}_\Gamma(t) = 0$ , получаем непрерывную нечетную

функцию на всей вещественной оси. Причем энергия ИХ  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\Gamma^2(t) dt < \infty$  конечна, т. е. соответствующий фильтр БИХ-УФГ действительно является устойчивым.

На рис. 3 для сравнения представлены графики ИХ фильтра (12) (слева) и ИХ идеального фильтра Гильберта (1) (справа). Видно, что процедура свертки (7) ведет к ограничению значений в точке  $t=0$  и возникновению колебательности на ветвях гиперболы  $g_\Gamma(t)$ . Последнее обусловлено колебательным характером ИХ  $g_{sqr}(t)$  (см. рис. 2 слева), входящим в свертку.

На рис. 4 приведены графики АЧХ  $\hat{K}_\Gamma(f)$  (слева) и ФЧХ  $\hat{\Phi}_\Gamma(f)$  (справа) фильтра БИХ-УФГ, вычисленные по формулам (8)–(10) при тех же параметрах SQRT-фильтра:  $F_o = 20$  кГц,  $\beta = 0,1$ ;  $f_{\max} = F_o(1+\beta) = 22$  кГц,  $F_h = F_o(1-\beta) = 18$  кГц.

Сравнительный анализ частотных характеристик фильтров БИХ-УФГ и ИФГ (см. рис. 4 и рис. 1) показывает, что в пределах интервала частот  $[-F_h, F_h]$  они совпадают, причем меняя параметры фильтра  $F_o, \beta$  можно управлять шириной  $F_h$  этого диапазона.

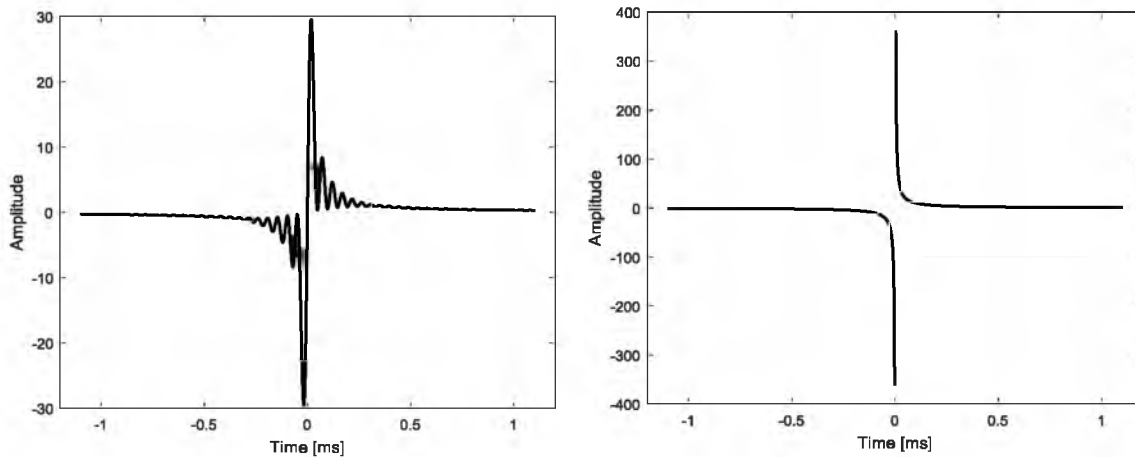


Рис. 3. ИХ фильтра БИХ-УФГ (слева), ИХ фильтра ИФГ (справа)  
Fig. 3. Infinite impulse responses of stable Hilbert filter (left) and ideal Hilbert filter (right) with infinite impulse response

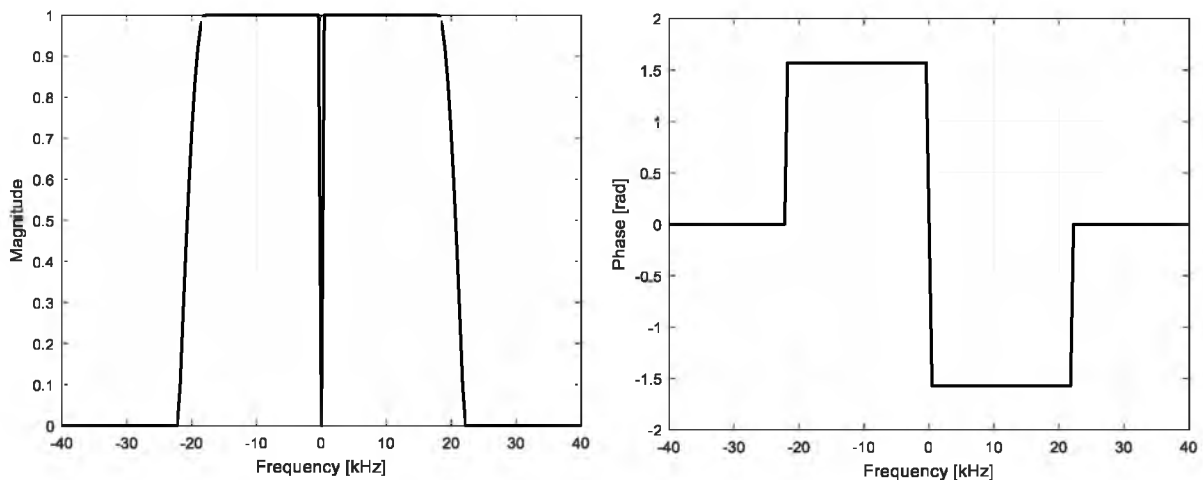


Рис. 4. АЧХ (слева) и ФЧХ (справа) фильтра БИХ-УФГ  
Fig. 4. Amplitude-frequency (left) and Phase-frequency (right) characteristics of stable Hilbert filter with infinite impulse response

За пределами интервала  $[-F_h, F_h]$  АЧХ  $\hat{K}_\Gamma(f)$  плавно спадает до нуля в точках  $\pm f_{\max}$ . На краях кривой ФЧХ  $\hat{\Phi}_\Gamma(f)$  вблизи точек  $\pm f_{\max}$  могут наблюдаться искажения фазы в виде вычислительных ошибок, которые обусловлены стремлением АЧХ к нулю и невозможностью оценить фазу при нулевом усилении  $\hat{K}_\Gamma(\pm f_{\max}) = 0$ . Результаты эксперимента на рис. 4 показывают – из-за устойчивости фазы к масштабным изменениям и finитности КЧХ (9) кривая  $\hat{\Phi}_\Gamma(f)$  сохраняет правильные значения фазы вплоть до точек  $\pm f_{\max}$ , где наблюдается резкий спад ФЧХ до нуля (см. рис. 4). Сохранение значения 0 на более высоких частотах объясняется процедурой  $\text{arg}(\cdot)$ , которая автоматически доопределяется нулем когда ее аргумент равен 0.

**2. Синтез и анализ фильтра КИХ-УФГ.** Полученные выше аналитические выражения для устойчивого БИХ-фильтра Гильберта позволяют судить о его потенциальных возможностях. Однако при практической реализации часто приходится ограничивать длину импульсной характеристики фильтра.

На первый взгляд кажется, что если ИХ фильтра  $\hat{g}_\Gamma(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  является непрерывной четной функцией, то ограничив ее по времени конечным интервалом  $[-T/2, T/2]$  достаточной длины  $T$  можно легко получить практически те же частотные характеристики, что и у БИХ фильтра. Однако это справедливо, только если спектр  $\hat{K}_\Gamma(jf) = \mathcal{F}(\hat{g}_\Gamma(t))$  – гладкая непрерывная функция частоты. В противном случае переход к конечной реализации  $\hat{g}_{\Gamma,T}(t) = \{\hat{g}_\Gamma(t), t \in [-T/2, T/2]\}$  приводит к искажению ее частотной характеристики в виде переходного затухающего колебательного процесса в точках разрыва – эффекту Гиббса. В данном случае (см. рис. 4) у функции  $\hat{K}_\Gamma(jf)$  в точке  $f = 0$  имеется разрыв 1-го рода. Поэтому в спектре  $\hat{K}_{\Gamma,T}(jf) = \mathcal{F}(\hat{g}_{\Gamma,T}(t))$  при  $f = 0$  наблюдается эффект Гиббса и возникает проблема его подавления. Отметим, что решение данной проблемы для непрерывного времени в дальнейшем гарантирует отсутствие эффекта Гиббса и для дискретной конечной реализации  $\hat{g}_{\Gamma,T}[i] = \hat{g}_{\Gamma,T}(t_i) = \hat{g}_{\Gamma,T}(i/2f_{\max})$ ,  $t_i \in [-T/2, T/2]$ , которая может быть использована на этапе разработки цифровых фильтров Гильберта (ЦФГ).

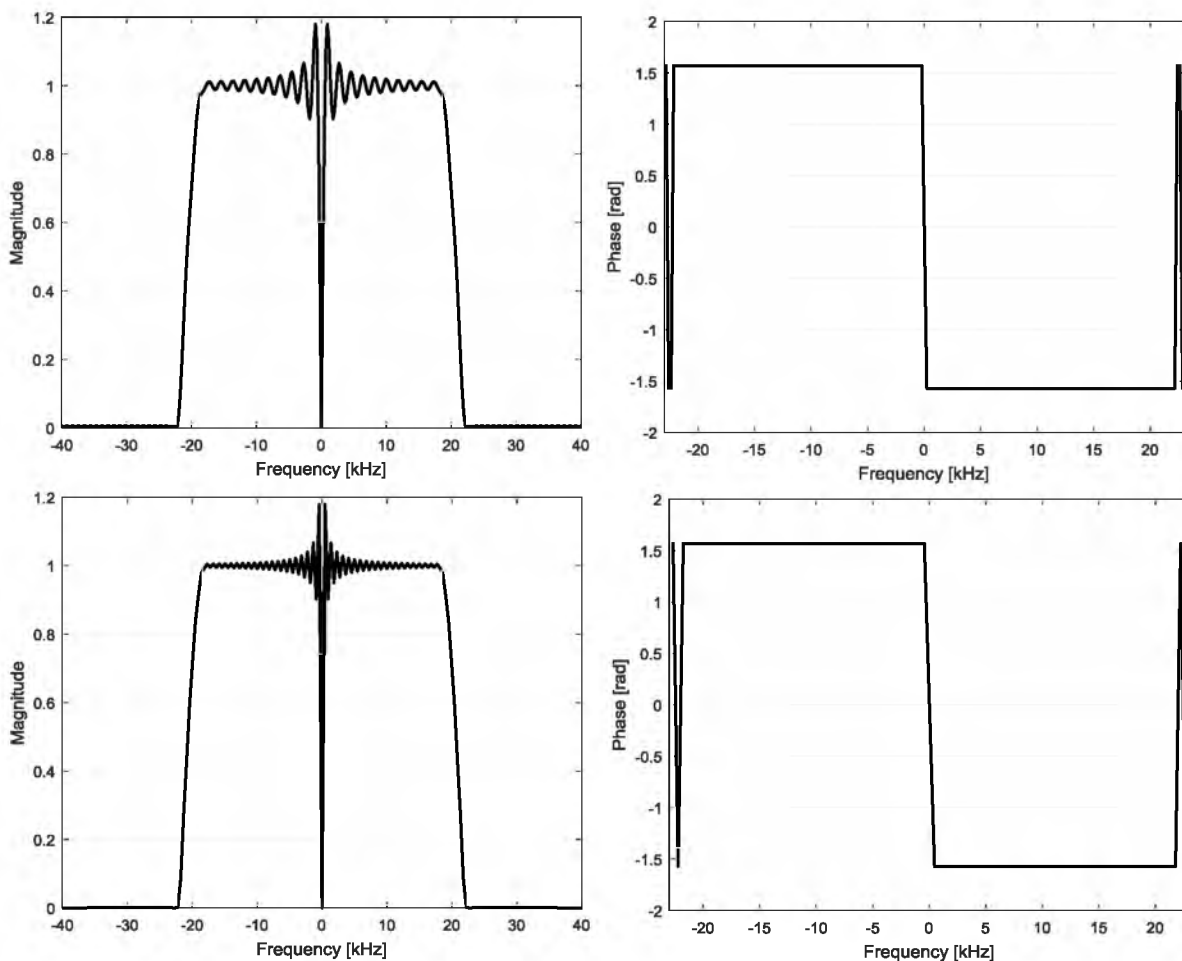


Рис. 5. АЧХ (слева) и ФЧХ (справа) фильтра КИХ-УФГ. Верхние графики соответствуют  $T = 2,2$  мс, нижние  $T = 4,4$  мс

Fig. 5. Amplitude-frequency (left) and Phase-frequency (right) characteristics of stable Hilbert filter with finite impulse response. The upper graphs correspond to  $T = 2,2$  ms, the lower graphs to  $T = 4,4$  ms

На рис. 5 представлены графики АЧХ (слева) и ФЧХ (справа) аналогового фильтра Гильберта с ограниченной по времени ИХ  $\hat{g}_{\Gamma,T}(t)$  (КИХ-УФГ), вычисленные по формулам

$$\hat{K}_{\Gamma,T}(f) = |\hat{K}_{\Gamma,T}(jf)| = |\mathcal{F}(\hat{g}_{\Gamma,T}(t))|, \quad f \in \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\hat{\Phi}_{\Gamma,T}(f) = \arg(\hat{K}_{\Gamma,T}(jf)), \quad f \in \mathbb{R} \quad (14)$$

для двух значений длительности  $T: T_1 < T_2$  при тех же параметрах БИХ-УФГ фильтра, которые приводились выше. Все расчеты, включая преобразование Фурье  $\mathcal{F}(\cdot)$  в (13), выполнялись с использованием системы инженерных расчетов Матлаб. Видно, что АЧХ (см. рис. 5 слева) сильно искажены эффектом Гиббса, который проявляется в виде затухающего колебательного переходного процесса в частотной области, максимального вблизи частоты  $f = 0$  и спадающего к краям диапазона  $[-f_{\max}, f_{\max}]$ ,  $f_{\max} = 22$  кГц. Протяженность  $\varepsilon_f > 0$  переходного процесса Гиббса

$$\varepsilon_f > 0: |\hat{K}_{\Gamma,T}(\varepsilon_f) - \hat{K}_{\Gamma,T}(\varepsilon_f)| = \mu \in 0,01 \div 0,001, \quad (15)$$

определяемая как частота, при которой функция  $\hat{K}_{\Gamma,T}(f)$  в области точки  $f = 0$  падает до значения  $\hat{K}_{\Gamma,T}(\varepsilon_f) = (1 - \mu)$ , зависит от длительности реализации  $T$ . А именно, чем больше  $T$ , тем меньше  $\varepsilon_f$ . Причем с ростом  $T$  одновременно увеличивается частота колебаний переходного процесса, но его максимальное значение  $\max \hat{K}_{\Gamma,T}(f)$  остается прежним.

В то же время анализ графиков на рис. 5 (справа) показывает, что переходный процесс, вызванный эффектом Гиббса, практически не влияет на поведение фазочастотной характеристики  $\hat{\Phi}_{\Gamma,T}(f)$  (14). Так, в пределах полосы частот  $[-f_{\max}, f_{\max}]$ , кривая  $\hat{\Phi}_{\Gamma,T}(f)$  точно совпадает с ФЧХ  $\hat{\Phi}_{\Gamma}(f)$  (10) БИХ фильтра Гильберта. Как уже отмечалось выше, указанная нечувствительность фазы к изменению АЧХ объясняется ее инвариантностью к любым масштабным изменениям коэффициента передачи фильтра. Однако за пределами этой полосы уже наблюдаются пульсации фазы, вызванные спадом АЧХ практически до нуля и, как следствие, вычислительными ошибками. Пульсации лишь отображают факт, что при ограничении длительности ИХ  $\hat{g}_{\Gamma,T}(t)$  ее спектр  $\hat{K}_{\Gamma,T}(jf)$  уже не является строго финитным и его даже мизерные всплески за пределами  $[-f_{\max}, f_{\max}]$  вызывают «релейные срабатывания» оператора  $\arg(\cdot)$ .

Отметим, что причина появления эффекта Гиббса и характер поведения соответствующего переходного процесса в частотной области становятся более понятными, если учесть, что ограничение по длительности отрезком  $[-T/2, T/2]$  равносильно умножению  $\hat{g}_{\Gamma}(t)$  на прямоугольное весовое окно  $\Pi_T(t)$ , т. е.

$$\hat{g}_{\Gamma,T}(t) = \Pi_T(t) \cdot \hat{g}_{\Gamma}(t), \quad \Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (16)$$

По известному свойству преобразования Фурье такое умножение во временной области приводит к свертке спектров в частотной области

$$\hat{K}_{\Gamma,T}(jf) = \mathcal{F}(\hat{g}_{\Gamma,T}(t)) = \mathcal{F}(\Pi_T(t)) * \mathcal{F}(\hat{g}_{\Gamma}(t)) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} * \hat{K}_{\Gamma}(jf). \quad (17)$$

Спектр прямоугольного окна  $P_{\Pi}(f) = \mathcal{F}(\Pi_T(t))$  имеет вид медленно затухающей колебательной функции  $\sin(\pi f T) / \pi f T$ , у которой ширина  $1/T$  лепестков с ростом  $T$  уменьшается, а значит частота колебаний в спектре увеличивается. Поэтому при свертке  $P_{\Pi}(f)$  с функцией  $\hat{K}_{\Gamma}(jf)$  в окрестности  $-\varepsilon_f \leq f \leq \varepsilon_f$  (т. е. справа и слева от точки разрыва  $f = 0$ )





возникает похожий затухающий переходный процесс с резким подъемом вблизи нуля и последующим спадом до 1. Отметим, что максимум  $\max \hat{K}_{\Gamma,T}(f)$  переходного процесса определяется площадью под кривой  $P_{\Pi}(f)$ , которая не зависит от  $T$ . Поэтому эффективно бороться с эффектом Гиббса увеличением длительности  $T$  прямоугольного окна  $\Pi_T(t)$  не удастся – максимальный всплеск переходного процесса остается прежним при любых значениях  $T$ .

Ниже для подавления эффекта Гиббса предлагается использовать частотное сглаживание КЧХ  $\hat{K}_{\Gamma,T}(jf)$  с помощью специальных весовых окон  $w_T(t)$ , рассчитанных на выбранную длительность  $T$ . Фактически это равносильно замене в (16), (17) прямоугольного окна  $\Pi_T(t)$  на другое временное окно  $w_T(t)$ , которое обладает более подходящими спектральными характеристиками. В результате получаем взвешенную ограниченную на отрезке  $[-T/2, T/2]$  импульсную характеристику КИХ-фильтра

$$\tilde{g}_{\Gamma,T}(t) = w_T(t) \cdot \hat{g}_{\Gamma}(t) \quad (18)$$

$$\tilde{K}_{\Gamma,T}(jf) = \mathcal{F}(\tilde{g}_{\Gamma,T}(t)) = \mathcal{F}(w_T(t)) * \mathcal{F}(\hat{g}_{\Gamma}(t)) = W_T(f) * \hat{K}_{\Gamma}(jf). \quad (19)$$

Наилучшего результата подавления можно достичь, если весовое окно  $w_T(t)$  имеет очень узкий хорошо локализованный по частоте спектр  $W_T(jf)$ , а его ширина  $F_w \approx 1/T$  значительно меньше ширины спектра импульсной характеристики  $\hat{g}_{\Gamma}(t)$  фильтра БИХ-УФГ, т. е.  $F_w \ll f_{\max}$ . В этом случае процедура свертки (19) почти не влияет на ширину полосы БИХ-УФГ, а частотная характеристика  $\tilde{K}_{\Gamma,T}(f)$  остается практически финитной функцией с максимальной частотой спектра  $\tilde{f}_{\max} \approx f_{\max}$ .

Условию хорошей локализации по частоте удовлетворяют не все весовые окна. Среди наиболее подходящих для рассматриваемой задачи выделим два окна.

1. Окно Кайзера

$$w_1(t) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - (2t/T)^2})}{I_0(\alpha)}, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (20)$$

где  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $\alpha > 1$  – параметр, позволяющий управлять шириной главного лепестка весового окна и уровнем боковых лепестков. Чем больше  $\alpha$ , тем шире главный лепесток и меньше уровень боковых лепестков. Для наших целей в зависимости от  $T$  следует выбирать  $\alpha > 4$ .

2. Окно Чебышева

$$w_2(t) = \begin{cases} \mathcal{F}_t^{-1}(W_2(f)) / \mathcal{F}_0^{-1}(W_2(f)) & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (21)$$

$$W_2(f) = \begin{cases} \frac{\cos(N \arccos(\gamma \cos(\pi f / 2f_{\max})))}{\text{ch}(N \text{ arch}(\gamma))}, & |f| \leq f_{\max} \\ 0, & |f| > f_{\max} \end{cases} \quad \begin{matrix} N = 2 \lfloor T \cdot f_{\max} \rfloor + 1, \\ \gamma = \text{ch} \left( \frac{\text{arch}(10^{\eta})}{N} \right) \end{matrix} \quad (22)$$

где  $\mathcal{F}_t^{-1}(\cdot)$  – обратное преобразование Фурье, отвечающее моменту времени  $t$ ;  $\lfloor \cdot \rfloor$  – оператор взятия целой части;  $\eta$  [дБ] – максимальный уровень боковых лепестков окна в децибелах. Для наших целей в зависимости от  $T$  следует выбирать  $\eta > 40$  [дБ].

Все окна являются четными функциями и нормированы по амплитуде  $w_1(0) = w_2(0) = 1$ . Параметры  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  окна позволяют подстроить частотную характеристику

КИХ-фильтра Гильберта (19) так, чтобы получить подходящую длительность  $\varepsilon_f > 0$  переходного процесса в частотной области при максимальном уровне подавления эффекта Гиббса по амплитуде.

АЧХ и ФЧХ фильтра Гильберта с весовой обработкой (19) принимают вид

$$\tilde{K}_{\Gamma,T}(f) = |\tilde{K}_{\Gamma,T}(jf)|, \quad \tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f) = \arg(\tilde{K}_{\Gamma,T}(jf)), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

а их графики для окна Чебышева (22) с уровнем боковых лепестков  $\eta = 60$ [дБ] и двух значений длительности  $T : T_1 = 2,2 \text{ мс} < T_2 = 4,4 \text{ мс}$  представлены на рис. 6 (параметры фильтра  $F_0, \beta$  те же). Сравнение их с аналогичными кривыми на рис. 5 показывает, что предложенная весовая обработка позволяет значительно подавить эффект Гиббса, сохранив те же фазо-частотные характеристики. Переходный процесс АЧХ в окрестности точки  $f = 0$  при этом сильно видоизменяется. А именно, в интервале  $0 \leq f \leq \varepsilon_f$  наблюдается плавное нарастание амплитуды от 0 до 1, т. е. время  $\varepsilon_f$  переходного процесса приобретает смысл длительности нарастания переднего фронта кривой  $\tilde{K}_{\Gamma,T}(f)$ . Причем величина  $\varepsilon_f$  по-прежнему зависит от длины  $T$  импульсной характеристики КИХ-фильтра и с ростом  $T$  уменьшается. В частности, при  $T = T_1$  получаем  $\varepsilon_f = 1,01 \text{ кГц}$ , а при  $T = T_2$ ,  $\varepsilon_f = 0,507 \text{ кГц}$ . Поэтому, если мы хотим получить равномерное усиление  $\tilde{K}_{\Gamma,T}(f) \cong 1$  на более низких частотах, мы должны увеличивать длину  $T$ . Выбор же типа окна (Кайзера или Чебышева) и их параметров  $\alpha, \eta$  влияет только на амплитуду оставшихся пульсаций и позволяет получить высокий уровень их подавления.

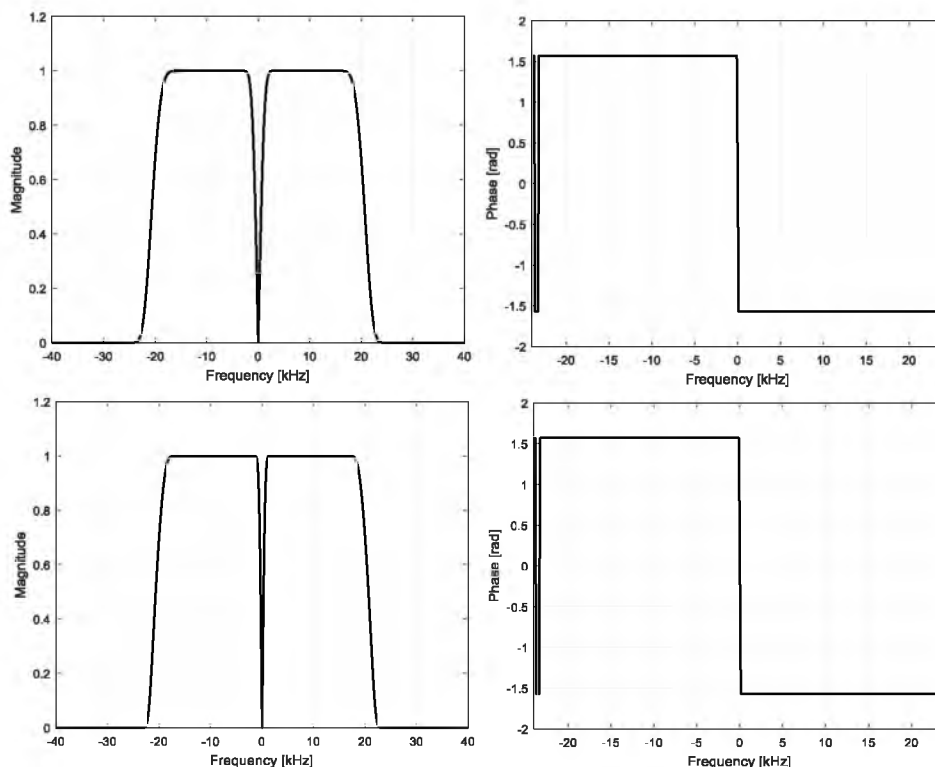


Рис. 6. АЧХ (слева) и ФЧХ (справа) фильтра КИХ-УФГ с окном Чебышева  $\eta = 60$ [дБ].

Верхние графики соответствуют  $T = 2,2 \text{ мс}$ , нижние  $T = 4,4 \text{ мс}$

Fig. 6. Amplitude-frequency (left) and Phase-frequency (right) characteristics of stable Hilbert filter with finite impulse response and Chebyshev window  $\eta = 60$ [dB]. The upper graphs correspond to  $T = 2,2 \text{ ms}$ , the lower graphs to  $T = 4,4 \text{ ms}$

В дальнейшем назовем рабочей полосой КИХ-УФГ фильтра (18)–(19) интервал частот  $[\varepsilon_f, F_h]$ , где согласно рис. 6 АЧХ и ФЧХ практически совпадают с аналогичными частотными характеристиками ИФГ (3), (4). Чтобы более точно оценить качество работы КИХ-УФГ фильтра с весовым окном в диапазоне частот  $[\varepsilon_f, F_h]$ , определим абсолютные и среднеквадратические ошибки (СКО) для АЧХ и ФЧХ формулами:

$$e_K(f_n) = |K_\Gamma(f_n) - \tilde{K}_{\Gamma,T}(f_n)|, \quad e_\Phi(f_n) = |\Phi_\Gamma(f_n) - \tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f_n)| \quad (24)$$

$$E_K = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (K_\Gamma(f_n) - \tilde{K}_{\Gamma,T}(f_n))^2}, \quad E_\Phi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (\Phi_\Gamma(f_n) - \tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f_n))^2}, \quad (25)$$

где  $N = 300$  – число точек в сетке частот  $f_n \in [-F_h, F_h]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

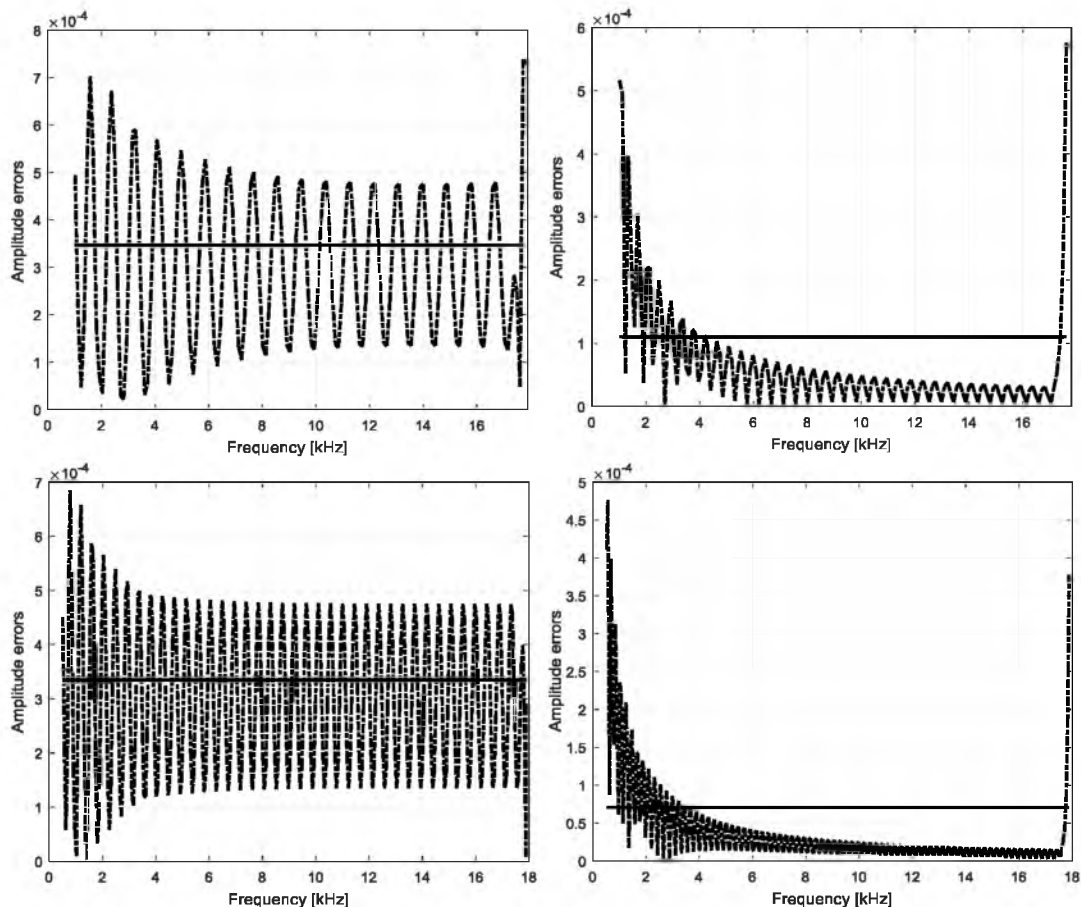


Рис. 7. Амплитудные ошибки для фильтра КИХ-УФГ с окном Чебышева  $\eta = 60$  [дБ] (слева) и с окном Кайзера  $\alpha = 7$  (справа). Верхние графики соответствуют  $T = 2,2$  мс, нижние  $T = 4,4$  мс  
 Fig. 7. Amplitude errors of Hilbert filter with finite impulse response with Chebyshev window  $\eta = 60$  [dB] (left) and Kaiser window  $\alpha = 7$  (right). The upper graphs  $T = 2,2$  ms, the lower graphs  $T = 4,4$  ms

Результаты проведенного эксперимента подтверждают, что ошибки по фазе равны нулю:  $e_\Phi(f_n) = 0$ ,  $f_n \in [-F_h, F_h]$  и  $E_\Phi = 0$  для всех типов окон и их параметров. Т. е. в рабочей полосе частот  $[\varepsilon_f, F_h]$  КИХ-УФГ фильтр (18)–(19) работает как идеальный фазовращатель. Ошибки по амплитуде  $e_K(f_n)$ ,  $E_K$  отличны от нуля и зависят от длительности окна и его параметров.

На рис. 7 слева (сверху вниз) штрих-пунктиром изображены графики ошибок  $e_K(f_n)$  для окна Чебышева ( $\eta = 60$ ). Аналогично, на том же рисунке справа (сверху вниз) изображены кри-

вые ошибок  $e_k(f_n)$  для окна Кайзера ( $\alpha = 7$ ). На всех графиках сплошными горизонтальными линиями указаны соответствующие уровни среднеквадратических ошибок  $E_k$ . Верхние графики построены при  $T = T_1$ , левые границы кривых ошибок совпадают частотой  $\varepsilon_f = 1,01$  кГц. Аналогично, нижним графикам соответствуют значения:  $T = T_2$ ,  $\varepsilon_f = 0,507$  кГц.

Анализ этих графиков показывает, что в рабочем диапазоне частот  $[\varepsilon_f, F_h]$  среднеквадратические ошибки (СКО) по амплитуде небольшие, а их отклонение от 1 составляет менее 0,1 % для всех выбранных типов окон и значений  $T$ . Однако наилучший результат получается у окна Кайзера, где СКО получаются в 3-4 раза меньше. Причем для разных окон амплитудные ошибки по частоте распределены не одинаково – у фильтра с окном Чебышева они распределены более равномерно, чем у фильтра с окном Кайзера.

### 3. Построение физически реализуемого фильтра КИХ-УФГ.

Для того чтобы любой устойчивый фильтр был физически реализуемым, необходимо чтобы его импульсная характеристика  $g(t)$  удовлетворяла условию:

$$g(t) = 0, \quad t < 0. \quad (26)$$

У фильтра КИХ-УФГ (18) импульсная характеристика  $\tilde{g}_{\Gamma, T}(t)$  не удовлетворяет условию (26), но он может быть преобразован к физически реализуемому, если в  $\tilde{g}_{\Gamma, T}(t)$  ввести подходящую задержку  $\tau_o \geq T/2$

$$\bar{g}_{\Gamma, T}(t) = \tilde{g}_{\Gamma, T}(t - \tau_o), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Очевидно, такой выбор  $\tau_o$  гарантирует, что  $\bar{g}_{\Gamma, T}(t) = 0$  при  $t < 0$ , при этом  $\bar{g}_{\Gamma, T}(t)$  является финитной функцией на интервале  $[T/2 - \tau_o, \tau_o + T/2]$ . Таким образом, импульсная характеристика (27) описывает физически реализуемый КИХ-УФГ. График  $\bar{g}_{\Gamma, T}(t)$  для значения  $\tau_o = T/2$  с окном Чебышева ( $\eta = 60$  [дБ],  $T = 2,2$  мс) приведен на рис. 8 слева.

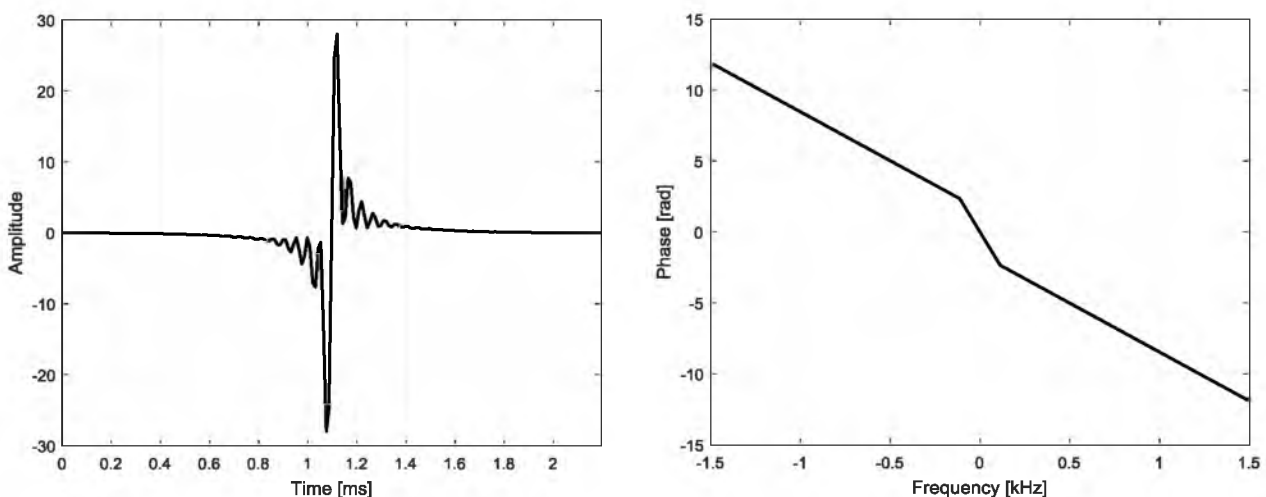


Рис. 8. ИХ (слева) и ФЧХ (справа) физически реализуемого фильтра КИХ-УФГ с окном Чебышева  $\eta = 60$  [дБ] длительностью  $T = 2,2$  мс

Fig. 8. Impulse response (left) and Phase-frequency response (right) of a physically realized Hilbert filter with Chebyshev window  $\eta = 60$  [dB] of duration  $T = 2,2$  ms



Соответствующие частотные характеристики КЧХ, АЧХ и ФЧХ такого фильтра описываются выражениями

$$\tilde{K}_{\Gamma,T}(jf) = \mathcal{F}(\tilde{g}_{\Gamma,T}(t - \tau_o)) = \tilde{K}_{\Gamma,T}(jf) \exp(-j2\pi f \tau_o), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

$$\tilde{K}_{\Gamma,T}(f) = |\tilde{K}_{\Gamma,T}(jf)| = \tilde{K}_{\Gamma,T}(f), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

$$\tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f) = \arg(\tilde{K}_{\Gamma,T}(jf)) = \tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f) - 2\pi\tau_o f, \quad f \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Из (29), (30) следует, что АЧХ  $\tilde{K}_{\Gamma,T}(f)$  совпадает с  $\tilde{K}_{\Gamma,T}(f)$  на рис. 6, а у ФЧХ  $\tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f)$  появляется линейный тренд  $-2\pi\tau_o f$ , накладывающийся на кривую  $\tilde{\Phi}_{\Gamma,T}(f)$ .

### Выводы

1. Получены строгие аналитические выражения для устойчивого аналогового БИХ-фильтра Гильберта с финитной частотной характеристикой, у которого АЧХ и ФЧХ в пределах заданного диапазона частот совпадают с характеристиками идеального фазовращателя.

2. Проведен поэтапный синтез аналогового КИХ-фильтра Гильберта, исследованы причины возникновения эффекта Гиббса в частотных характеристиках и его свойства. Предлагается и анализируется эффективный метод борьбы с переходным процессом Гиббса в частотной области и показано, что при специальном выборе весового сглаживания можно получить КИХ-фильтр Гильберта с практически идеальными характеристиками фазовращателя в заданной рабочей полосе частот.

3. Приводятся аналитические выражения для импульсной и частных характеристик физически реализуемого КИХ-фильтра Гильберта.

### Список литературы

- Айфичер Э., Джервис Б. 2008. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. М., Вильямс, 992.
- Волчков В.П. 2009. Новые технологии передачи и обработки информации на основе хорошо локализованных сигнальных базисов. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15(70): 181–189.
- Волчков В.П., Асирян В.М. 2020. Сжатие изображений с использованием дискретного преобразования Вейля-Гейзенберга. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 47 (2): 412–421
- Волчков В.П., Асирян В.М. 2021. Возможности преобразования Вейля-Гейзенберга в стандарте сжатия jpeg. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 48(1): 188–200.
- Волчков В.П., Мирошниченко А.В. 2018. Вычисление эллиптических функций Якоби для расчета характеристик фильтра Кауэра. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 45(2): 298–311.
- Волчков В.П., Петров Д.А. 2009. Оптимизация ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 1(56): 102–112.
- Волчков В.П., Петров Д.А. 2009. Условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга для OFTDM сигналов. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15(70): 190–199.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2016. Синтез канальных прекодеров для цифровых систем связи с финитным сигнальным базисом. Электросвязь. 4: 41–45.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2017. Оптимальное канальное прекодирование с ограничением уровня пульсаций на краях символического интервала. Электросвязь. 6: 35–39.



- Волчков В.П., Санников В.Г. 2018. Синтез оптимальных предсказанных финитных сигналов на основе желаемого эталона. *Электросвязь*. 5: 26–30.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2019. Синтез ортогональных вещественных сигнальных базисов Вейля-Гейзенберга на основе алгебраического подхода. *Электросвязь*. 5: 24–30.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2020. Синтез банка фильтров на основе комплексного базиса Вейля-Гейзенберга. *Электросвязь*. 5: 98–102.
- Сергиенко А.Б. 2011. *Цифровая обработка сигналов*. 3-е изд. СПб., БХВ-Петербург, 768.
- Смит С. 2012. *Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников*. М., Додэка-XXI, 720.
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2018. Noise stability of transmission of optimum finite signals on the linear communication channel with aliquot poles. 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018). Item #: 40677. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2019. Digital Coherent Modem with Space-Time Transmission and Reception of Optimal Finite Signals. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)", Russia, 2019, pp. 1–5. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814114)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2020. Multi-Carrier Modulations Digital Modem with the narrow-band Optimal Signals and high spectral energy Efficiency. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032586, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213281.
- Volchkov V. et al. 2019. Improving the Noise Immunity of the Modem with the Optimal Finite Signals that do not Cause Intersymbol Interference in a Linear Communication Channel., 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Item #: 48657. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc.
- Volchkov V. et al. 2019. Presentation and Analysis of Continuous Signals in the Space of Complex Exponential Models. 2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)", Russia, 2019, pp. 1–6. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8813941)
- Volchkov V. et al. 2019. Synthesis of Real Weyl-Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization, 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), (doi:10.23919/FRUCT.2019.8711969)
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl-Heisenberg bases. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018). Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018): 135–142.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2020. Syntheses of a Frequency-Time Filter Bank Based on Weyl-Heisenberg Complex Bases. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA)." Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032584, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213251.

## References

- Ifeachor E.C., Jervis B.W. 2008. *Digital Signal Processing. A Practical Approach*. 2nd ed. M., Williams, 992.
- Volchkov V.P. 2009. A new technology of transmitting and processing of information based on well-localized signal basis. *Nauchnye vedomosti belgu. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika*. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies]. 15(70): 181–189.
- Volchkov V.P., Asiryanyan V.M. 2020. Image Compression Using Discrete Weyl-Heisenberg Transform. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies*. 47(2): 412–421.
- Volchkov V.P., Asiryanyan V.M. 2021. Possibilities of the Weyl-Heisenberg transformation in the jpeg compression standard. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies*. 48(1): 188–200.
- Volchkov V.P., Miroshnichenko A.V. 2018. Calculating the Jacobi Elliptic Functions to calculate the characteristics of Caer filter. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies*. 45(2): 298–311.



- Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Orthogonal Weyl-Heisenberg basis optimisation for digital communication systems based on OFDM/OQAM. *Nauchnye vedomosti belgu. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Eco-nomics Information technologies]*. 1(56): 102–112.
- Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Generalized Weyl-Heisenberg bases orthogonality conditions for OFDM signals. *Nauchnye vedomosti belgu. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies]*. 15(70): 190–199.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2016. Synthesis of channel precoder for digital communication systems with finite signal basis. *Electrosvyaz*. 4: 41–45.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2017. Optimal channel precoding with restriction level pulsation at the edges of the symbol interval. *Electrosvyaz*. 6: 35–39.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Synthesis of optimal preemphasis finite signals based on the desired reference. *Electrosvyaz*. 5: 26–30.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2019. Synthesis of orthogonal real signal bases Weyl-Heisenberg based on algebraic approach. *Electrosvyaz*. 5: 24–30.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2020. Synthesis of a filter bank based on Weyl-Heisenberg complex basis. *Electrosvyaz*. 5: 98–102.
- Sergienko A.B. 2011. *Digital Signal Processing*. 3-rd ed. St. Petersburg., BHV-Petersburg, 768.
- Smith S.W. 2012. *Digital Signal Processing. A Practical Guide for Engineers and Scientists*. M., Dodekaxxi, 720.
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2018. Noise stability of transmission of optimum finite signals on the linear communication channel with aliquot poles. 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018). Item #: 40677. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2019. Digital Coherent Modem with Space-Time Transmission and Reception of Optimal Finite Signals. *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Russia, 2019, pp. 1–5. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814114)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2020. Multi-Carrier Modulations Digital Modem with the narrow-band Optimal Signals and high spectral energy Efficiency. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032586, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213281.
- Volchkov V. et al. 2019. Improving the Noise Immunity of the Modem with the Optimal Finite Signals that do not Cause Intersymbol Interference in a Linear Communication Channel., 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502-508. Item #: 48657. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc.
- Volchkov V. et al. 2019. Presentation and Analysis of Continuous Signals in the Space of Complex Exponential Models. *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Russia, 2019, pp. 1–6. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8813941)
- Volchkov V. et al. 2019. Synthesis of Real Weyl-Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization, 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), (doi:10.23919/FRUCT.2019.8711969)
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl-Heisenberg bases. *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018)*. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018): 135–142.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2020. Synthesis of a Frequency-Time Filter Bank Based on Weyl-Heisenberg Complex Bases. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA)." Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032584, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213251.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.



## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Волчков Валерий Павлович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общей теории связи, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

**Антипова Анна Николаевна**, студентка магистратуры факультета сети и системы связи, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Valery P. Volchkov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of General Communication Theory, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

**Anna N. Antipova**, Master's Student of the Faculty of Networks and Communication Systems, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia