УДК : 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О НЕКОТОРЫХ ПРИНЦИПАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А.М. МЕЙРМАНОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

В настоящей работе предлагается новый принцип моделирования фильтрации жидкостей со свободными границами в пористых средах, основанный на точном моделировании процесса на микроуровне с дальнейшей аппроксимацией модели с помощью усреднения. В случае абсолютно твердого пористого тела полученная таким образом модель является известная задача Маскета о совместной фильтрации двух несжимаемых вязких жидкостей различной плотности и различной вязкости. Для упругого пористого скелета предельный режим описывается либо системой уравнений Терцаги - Био для двухскоростного континуума, либо частным случаем этой системы для односкоростного континуумя либо нелокальной системой уравнений вязкоупругости для односкоростного континуума. Все вышеперечислные системы дополняются уравнением переноса для индикаторной функции, определяющей положение границы раздела двух жидкостей.

Ключевые слова: Уравнения Стокса и Ламэ, двухмасштабная сходимость, задача Маскета.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача о моделировании физических процессов в упругой деформируемой среде Ω, перфорированной системой каналов и пор (упругие пористые среды), заполненных жидкостью или газом. Твердая компонента такой среды Ω_s называется *скелетом грунта*, а область Ω_f, занятая жидкостью-*поровым пространством*. Более точно, мы рассмотрим задачу о совместной фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей. Будем считать, что в каждый момент времени $t > 0$ жидкость с вязкостью μ^+ и плотностью ρ^+ занимает область Ω_f^+, а жидкость с вязкостью μ^- и плотностью ρ^- занимает область Ω_f^-. При этом указанные области разделены поверхностью $\Pi(t)$ так, что

$$\Omega_f = \Omega_f^+(t) \cup \Pi(t) \cup \Omega_f^-(t).$$

Такого рода задачи носят название *задач со свободными (неизвестными) границами*, поскольку в них, наряду с решениями дифференциальных уравнений, необходимо найти и области, в которых определены рассматриваемые дифференциальные уравнения.

В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = L\boldsymbol{w}$$

дифференциальные уравнения математической модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\mathbf{w}$ в области $\Omega \in R^3$ при $t > 0$ имеют вид [1]:

$$\alpha_\tau \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P} + \bar{\rho} \boldsymbol{F}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь и всюду ниже используются обозначения

$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + (1 - \bar{\chi})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\mathbb{I},$$

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \quad \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \quad \bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1 - \bar{\chi})\rho_s,$$

$\mathbb{I}$ – шаровой тензор, $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$- характеристическая функция порового пространства $\Omega_f \subset \Omega$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$- заданный безразмерный вектор удельных массовых сил, p – давление в сплошной среде,

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – постоянная Ламэ твердого скелета, L – характерный размер рассматриваемой области, τ – характерное время процесса, ρ_f и ρ_s – безразмерные плотности жидкости и твердого скелета соответственно, отнесенные к плотности воды ρ_0 и g – ускорение силы тяжести. При этом все указанные величины, кроме плотности ρ_f и вязкости μ жидкости являются заданными, в то время как плотность ρ_f и вязкость μ жидкости подлежат определению. Поскольку каждая из рассматриваемых жидкостей является несжимаемой, то уравнением для определения величин ρ_f и μ является стандартное транспортное уравнение

$$\frac{d}{dt}\rho_f \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \frac{d}{dt}\mu = 0,$$

которое с помощью уравнения неразрывности (1.2) примет вид

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \boldsymbol{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{u}) = 0. \tag{1.3}$$

Дифференциальное уравнение (1.1) понимается в смысле теории распределений и означает, что вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет уравнению Ламэ

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \alpha_\lambda \Delta\, \boldsymbol{w} - \nabla p + \rho_s \boldsymbol{F}$$

в твердой компоненте Ω_s ($\bar{\chi} = 0$), а вектор скорости $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет уравнению Стокса

$$\rho_f \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \alpha_\mu \Delta\, \boldsymbol{u} - \nabla p + \rho_f \boldsymbol{F}$$

в жидкой компоненте Ω_f $(\bar{\chi} = 1)$. При этом на общей границе $\Gamma = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$ "твердый скелет - поровое пространство" вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет условию непрерывности

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma, \qquad t \geq 0,$$

и закону сохранения количества движения в форме

$$[\mathbb{P} \cdot \boldsymbol{n}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma, \qquad t \geq 0,$$

где $\boldsymbol{n}(x_0)$ – единичный вектор нормали к границе в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0, t) = \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0, t) - \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0, t),$$
$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ x \in \Omega_s}} \varphi(\boldsymbol{x}, t), \quad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ x \in \Omega_f}} \varphi(\boldsymbol{x}, t).$$

Более точно, уравнение (1.1) означает выполнение интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} (\alpha_\tau \bar{\rho} \, (\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mathbb{P} \colon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})) dx dt = 0$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$, финитных в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

В этом тождестве через $\mathbb{A} \colon \mathbb{B}$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е.

$$\mathbb{A} \colon \mathbb{B} = tr\,(\mathbb{B}^* \circ \mathbb{A}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} B_{ji}.$$

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} &\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = \tfrac{\partial w}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ &\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \qquad (1.4)$$

для вектора перемещений сплошной среды и начальным условием

$$\left. \begin{aligned} &\mu(\boldsymbol{x}, 0) = \mu^+, \ \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^+, \ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^+(0), \\ &\mu(\boldsymbol{x}, 0) = \mu^-, \ \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^-, \ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^-(0) \end{aligned} \right\} \qquad (1.5)$$

для плотности и вязкости жидкости. В (1.5) ρ_f^+, ρ_f^-, μ^+ и μ^- положительные постоянные и

$$\Omega_f = \Omega_f^+(0) \cup \Pi(0) \cup \Omega_f^-(0).$$

Поверхность $\Pi(0)$ является начальным положением свободной (неизвестной) поверхности $\Pi(t)$, разделяющей две жидкости различной плотности так, что

$$\rho_f(\boldsymbol{x},t)=\rho_f^+ \ \text{при} \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^+(t), \ \rho_f(\boldsymbol{x},t)=\rho_f^- \ \text{при} \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^-(t),$$

и

$$\mu(\boldsymbol{x},t)=\mu^+ \ \text{при} \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^+(t), \ \mu(\boldsymbol{x},t)=\mu^- \ \text{при} \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^-(t).$$

Совершенно естественно определить области $\Omega_f^+(t)$ и $\Omega_f^-(t)$ как сдвиг вдоль траекторий начальных положений $\Omega_f^+(0)$ и $\Omega_f^-(0)$. Но при этом совсем неочевидно выполнение равенства

$$\Omega_f=\Omega_f^+(t)\cup\Pi(t)\cup\Omega_f^-(t). \qquad (1.6)$$

Это связано с тем, что мы упростили исходную задачу постулировав фиксированную структуру порового пространства (см. [1]). В точной постановке и поровое пространство и твердый скелет являются материальными объемами, то есть сдвигом вдоль траекторий поля скоростей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ своего начального положения. Поэтому для таких областей равенство (1.6) выполнено автоматически. Чтобы корректно определить плотность и вязкость жидкости в принятой нами модели, мы постулируем существование поверхности $\tilde{\Pi}(0)$, разделяющей область Ω на две подобласти $\Omega^+(0)$ и $\Omega^-(0)$ и такой, что

$$\Pi(0)\subset\tilde{\Pi}(0), \quad \Omega_f^+(0)\subset\Omega^+(0), \quad \Omega_f^-(0)\subset\Omega^-(0).$$

Далее вместо начального условия (1.5) рассмотрим начальное условие

$$\left.\begin{array}{l}\mu(\boldsymbol{x},0)=\mu^+, \ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^+, \ \boldsymbol{x}\in\Omega^+(0),\\ \mu(\boldsymbol{x},0)=\mu^-, \ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^-, \ \boldsymbol{x}\in\Omega^-(0)\end{array}\right\} \qquad (1.7)$$

и положим

$$\Omega_f^+(t)=\Omega_f\cap\Omega^+(t), \quad \Omega_f^-(t)=\Omega_f\cap\Omega^-(t),$$

где области $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ есть сдвиг вдоль траекторий поля скоростей сплошной среды начальных положений $\Omega^+(0)$ и $\Omega^-(0)$ соответственно.
Очевидно, что мы можем ограничится только одним уравнением для определения величины ρ_f полагая $\mu=\mu(\rho_f)$ так, что

$$\mu=\mu^+ \ \text{при} \ \rho_f=\rho_f^+ \quad \text{и} \quad \mu=\mu^- \ \text{при} \ \rho_f=\rho_f^-.$$

В дальнейшем нам будет удобнее функциональная зависимость

$$\alpha_\mu=\alpha_\mu^+ \ \text{при} \ \rho_f=\rho_f^+ \quad \text{и} \quad \alpha_\mu=\alpha_\mu^- \ \text{при} \ \rho_f=\rho_f^-.$$

Математическая модель (1.1) - (1.4), (1.7) содержит естественный малый параметр $\boldsymbol{\varepsilon}$, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие предположения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

Предположение 1 *Область $\Omega = (0,1)^3$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ и величина $1/\varepsilon$ есть целое число так, что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s есть "твердая" часть Y, и ее "жидкая" часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ между "жидкой" и "твердой" компонентами есть липшецева поверхность.*

Поровое пространство $\Omega_{f,\varepsilon}$ есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет $\Omega_{s,\varepsilon}$ есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, а липшецева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_{s,\varepsilon} \cap \partial\Omega_{f,\varepsilon}$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Твердый скелет $\Omega_{s,\varepsilon}$ и поровое пространство $\Omega_{f,\varepsilon}$ являются связными множествами.

В этих предположениях

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}), \quad \bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ есть характеристическая функция области Y_f в Y, определяющая поровое пространство. В нашей модели функция $\chi(\boldsymbol{y})$ является заданной.

Пусть дополнительно к сделанным предположениям безразмерные величины α_τ, α_μ и α_λ зависят от малого параметра ε и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu^+(\varepsilon) = \mu_0^+, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu^-(\varepsilon) = \mu_0^-,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu^+}{\varepsilon^2} = \mu_1^+, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu^-}{\varepsilon^2} = \mu_1^-.$$

Для характеристики предельных режимов введем следующие величины. Прежде всего построим продолжение $\boldsymbol{v}$ векторнрго поля $\partial\boldsymbol{w}/\partial t$ из области Ω_f в область Ω_s так, чтобы

$$\bar{\chi}(\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} - \boldsymbol{v}) = 0, \qquad ||\boldsymbol{v}||_{2,\Omega} \leq C||\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}||_{2,\Omega_f}.$$

Векторное поле $\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)=\bar{\chi}\,\boldsymbol{v}$ будем называть *полем скоростей жидкой компоненты*.

Аналогичным образом определяется *векторное поле перемещений твердой компоненты* $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$, как продолжение векторного поля w из области Ω_s в область Ω_f такое, что

$$(1-\bar{\chi})(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_s)=0,\quad ||\boldsymbol{w}_s||_{2,\Omega}\leq C||\boldsymbol{w}||_{2,\Omega_s}.$$

Линейная модель (1.1), (1.2), (1.4) в случае когда рассматривается только одна жидкость (то есть когда $\rho_f^+=\rho_f^-$ и $\mu^+=\mu^-$) была подробно исследована в работах автора [1, 2]. В настоящей работе мы рассматриваем фильтрацию жидкостей, то есть процессы в которых величина α_τ очень маленькая (характерное время процесса τ составляет несколько месяцев). Поэтому вполне разумным является предположение (критерий)

$$\tau_0=0. \tag{1.8}$$

Кроме того будем считать, что

$$\mu_0^+,\ \mu_0^-<\infty,\quad 0<\lambda_0 \tag{1.9}$$

и рассмотрим следующие ситуации:

$$1)\quad \lambda_0=\infty$$

и

$$2)\quad \lambda_0<\infty.$$

Первый случай соответствует абсолютно упругому твердому скелету, когда предельные перемещения твердой компоненты тождественно равны нулю, а предельная скорость жидкой компоненты при

$$\mu_0=0,\ \text{ и }\ 0<\mu_1^+,\ \mu_1^-<\infty$$

удовлетворяет классическому закону фильтрации Дарси.

Следующий случай

$$0<\lambda_0<\infty$$

содержит в себе три различные системы усредненных уравнений, отвечающих различным предельным значениям величины α_μ:

2.1) $\mu_0^+=\mu_0^-=0,\ 0<\mu_1^+,\ \mu_1^-<\infty,$

2.2) $\mu_0^+=\mu_0^-=0,\ \mu_1^+=\mu_1^-=\infty,$

2.3) $0<\mu_0^+,\ \mu_0^-<\infty.$

В первом случае предельным режимом является двухскоростной континуум, описываемый системой уравнений Терцаги-Био (K. Terzaghi, M. Biot) в которой скорость жидкости v_f и перемещения твердой компоненты w_s являются независимыми величинами. Соответствующую математическую модель будем называть *задачей Маскета - Терцаги - Био*. Во втором случае предельным режимом является односкоростной континуум, описываемый той же самой системой уравнений Терцаги-Био, в которой $\boldsymbol{v}_f = m\,\partial \boldsymbol{w}_s / \partial t$. Движение жидкости со свободными границами, описываемое этой системой уравнений будем называть *задачей Маскета для упругого режима фильтрации*. Наконец, в третьем случае предельным режимом является односкоростной континуум, описываемый системой уравнений вязкоупругости. Соответственно движение такого континуума со свободными границами назовем *задачей Маскета для вязкоупругого режима фильтрации*.

Отметим, что нам не известны какие-либо строгие результаты о корректной разрешимости в целом по времени, то есть на произвольном интервале времени $(0,T)$, задачи (1.1) - (1.4), (1.7) при фиксированном $\varepsilon > 0$. Конечно же главная причина, почему это невозможно - отсутствие каких-либо априорных оценок решения, в частности, отсутствие закона сохранения энергии в его стандартной форме. Последнее связано с тем, что мы упростили уравнения движения, заменив в них материальную производную вектора скорости на ее частную производную по времени (перейдя от уравнений Навье - Стокса к уравнениям Стокса). Возвращаться к исходной форме уравнений движения не имеет смысла, поскольку сомножитель α_τ при этой производной стремится к нулю при ε стремящемся к нулю. В итоге инерционные слагаемые пропадают и не участвуют в усредненных (предельных) уравнениях движения. Далее возможны различные сценарии. Можно попытаться изменить уравнения движения, рассмотрев вместо уравнения (1.1) уравнение

$$\tau_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P} + \bar{\rho}\boldsymbol{F}. \qquad (1.10)$$

Однозначная разрешимость измененной задачи при фиксированном $\varepsilon > 0$ устанавливается достаточно просто. Поэтому после предельного перехода при $\varepsilon \searrow 0$ (если это возможно) достаточно совершить еще один предельный переход при $\tau_0 \searrow 0$ (если это возможно). Таким образом, если каждый шаг в описанной процедуре будет строго обоснован, то наряду с выводом математической модели мы автоматически получим существование (по крайней мере одного) решения этой модели.

По второму сценарию предельный переход при $\varepsilon \searrow 0$ совершается для подобластей, занятых только одной жидкостью (в предположении, что такие области существуют), и уже после этого формулируется задача со свободной границей. При этом математические модели, полученные в каждом из сценариев, совпадают. Только во втором случае вопрос о разрешимости математической модели остается открытым.

2. Задача Маскета (The Muskat problem)

В этом разделе мы рассмотрим первый случай, когда $\lambda_0 = \infty$ и воспользуемся вторым сценарием, описанным выше. Итак, в соответствии с результатами [1] единственным нетривиальным случаем является случай, когда

$$\mu_0 = 0, \text{ и } 0 < \mu_1^+, \ \mu_1^- < \infty$$

и в каждой их подобластей, занятой только одной жидкостью, скорость $\boldsymbol{v}_f$ жидкости удовлетворяет системе уравнений фильтрации Дарси, состоящей из закона Дарси в форме

$$\boldsymbol{v}_f = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}_2 \cdot \left(-\nabla p_f + \rho_f \boldsymbol{F}\right), \tag{2.1}$$

и уравнения неразрывности

$$div\, \boldsymbol{v}_f = 0 \tag{2.2}$$

Здесь матрица $\mathbb{B}_2$ определяется из решения стационарной системы уравнений Стокса на элементарной ячейке Y_f:

$$\mathbb{B}_2 = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{U}^i(\boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{e}_i \rangle_{Y_f}, \tag{2.3}$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{U}^i - \nabla Q^i = \boldsymbol{e}_i, \quad div_{\,y} \boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \\ \boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \quad i = 1,2,3, \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

В (2.3) $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ - единичные орты декартовой системы координат, а действие матрицы $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, составленной из произвольных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, на произвольный вектор $\boldsymbol{c}$ определяется формулой

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Безразмерная приведенная вязкость μ_1 зависит от плотности ρ_f так, что

$$\mu_1 = \mu_1^+ \quad \text{при} \quad \rho_f = \rho_f^+$$

и

$$\mu_1 = \mu_1^- \quad \text{при} \quad \rho_f = \rho_f^-.$$

В свою очередь, плотность ρ_f определяется как решение задачи Коши:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \boldsymbol{v}_f) = 0, \\ \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

где

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^+, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^+(0),$$

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^-, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^-(0),$$

и

$$\Omega = \Omega^+(0) \cup \widetilde{\Pi}(0) \cup \Omega^-(0).$$

Задача замыкается краевым условием

$$v_f(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \ t > 0, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ есть вектор единичной нормали к поверхности S в точке $\boldsymbol{x} \in S$.

Проблема (2.1) - (2.6) в научной литературе получила название задачи Маскета (the Muskat problem) [3, 4].

Если в процессе решения задачи определится гладкая (как минимум C^1) поверхность $\widetilde{\Pi}(t)$, разделяющая две различные жидкости, то полученное решение называется *классическим*. Всякое другое решение называется *обобщенным*.

Для случая движения жидкостей под действием силы тяжести ($\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{e}_3$) и диагональной матрицы $\mathbb{B}_2$ ($\mathbb{B}_2 = k\mathbb{I}$) определение классического решения задачи Маскета принимает достаточно простую форму. А именно, ищется поверхность $\widetilde{\Pi}(t)$, разделяющую область Ω на две подобласти $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ так, что давление жидкости p_f является гармонической функцией в каждой из областей $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$:

$$\Delta p_f = 0, \quad x \in \Omega^+(t) \cup \Omega^+(t), \ t > 0, \tag{2.7}$$

непрерывной при переходе через поверхность $\widetilde{\Pi}(t)$:

$$[p_f](\boldsymbol{x}_0,t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \widetilde{\Pi}(t), \ t > 0, \tag{2.8}$$

и такой, что

$$\left[\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_f}{\partial n} + \rho_f g(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n})\right](\boldsymbol{x}_0,t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \widetilde{\Pi}(t), \ t > 0, \tag{2.9}$$

$$-V_n = \frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_f}{\partial n} + \rho_f g(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{x}_0 \in \widetilde{\Pi}(t), \ t > 0, \tag{2.10}$$

где $V_n(\boldsymbol{x}_0,t)$ - скорость перемещения поверхности $\widetilde{\Pi}(t)$ в направлении нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \widetilde{\Pi}(t)$ и $\mu_1 = \mu_1^+$, $\rho_f = \rho_f^+$ при $\boldsymbol{x} \in \Omega^+(t)$, $\mu_1 = \mu_1^-$, $\rho_f = \rho_f^-$ при $\boldsymbol{x} \in \Omega^-(t)$.

Задача замыкается заданием положения свободной границы $\widetilde{\Pi}(t)$ в начальный момент времени:

$$\widetilde{\Pi}(0) = \widetilde{\Pi}_0 \tag{2.11}$$

и краевым условием

$$\left(\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_f}{\partial n} + \rho_f g(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n})\right)(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \ t > 0. \tag{2.12}$$

Локальная разрешимость задачи (2.7) - (2.12) не вызывает особых затруднений [5], в то время как вопрос о существование классического решения на произвольном интервале времени до настоящего времени остается открытым. В отличии от задачи Стефана [6], где существование обобщенного решения доказывается достаточно просто, для задачи Маскета остается открытым и вопрос о существовании обобщенного решения.

3. Задача Маскета-Терцаги-Био

Как было отмечено выше, движение сплошной среды в этой задаче описывается предельным режимом, для которого

$$0 < \lambda_0 < \infty \ \text{ и } \ \mu_0^+ = \mu_0^- = 0, \ 0 < \mu_1^+, \qquad \mu_1^- < \infty$$

и скорость жидкости $\boldsymbol{v}_f$ вместе с вектором перемещения твердой компоненты $\boldsymbol{w}_s$ удовлетворяют в области Ω при $t > 0$ системе уравнений, состоящей из закона сохранения количества движения для твердой компоненты

$$div\ \left(\widetilde{\mathbb{A}}^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \widetilde{\mathbb{B}}_0^s div\ \boldsymbol{w}_s + m\ \widetilde{\mathbb{C}}_0^s p_f - p\ \mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \qquad (3.1)$$

уравнения неразрывности

$$\widetilde{\mathbb{E}}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \tilde{b}\,{}_0^s div\ \boldsymbol{w}_s + m\ \tilde{c}\,{}_0^s\, p_f = 0, \qquad (3.2)$$

для твердой компоненты, уравнения неразрывности

$$div\, \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_f + (1 - m)\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}, \qquad (3.3)$$

и закона Дарси

$$\boldsymbol{v}_f = m\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}_2 \cdot \left(-\nabla p_f + \rho_f \boldsymbol{F}\right) \qquad (3.4)$$

для жидкой компоненты.

Дифференциальные уравнения (3.1) - (3.4) дополняются краевыми условиями

$$\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \ t > 0. \qquad (3.5)$$

$$\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad t > 0, \qquad (3.6)$$

для вектора перемещения твердой компоненты $\boldsymbol{w}_s$ и скорости жидкости $\boldsymbol{v}_f$.

В уравнениях (3.1) - (3.4)

$$\hat{\rho} = m\rho_f + (1 - m)\rho_s, \quad \text{а } m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})dy \equiv \langle\chi\rangle_{Y_f}$$

-пористость среды, то есть доля порового пространства в общем объеме рассматриваемой среды. Матрица $\mathbb{B}_2$ определена выше формулой (2.4), а симметричный и строго положительно определенный тензор четвертого порядка $\widetilde{\mathbb{A}}^s$, матрицы $\widetilde{\mathbb{B}}_0^s$, $\widetilde{\mathbb{C}}_0^s$ и $\widetilde{\mathbb{E}}_0^s$ и постоянные $\tilde{c}\,{}_0^s$ и $\tilde{b}\,{}_0^s$ находятся из решения периодических краевых задач на элементарной ячейке Y_s [1]:

$$\widetilde{\mathbb{A}}^s = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^3 \left((1-m)\mathbb{J}^{ij} + \langle \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij})\rangle_{Y_s}\right) \otimes \mathbb{J}^{ij}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\mathbb{B}}_0^s = \lambda_0 \langle \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_0)\rangle_{Y_s}, \quad \widetilde{\mathbb{C}}_0^s = \frac{\lambda_0}{m}\langle \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1)\rangle_{Y_s}, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_0^s = \sum_{i,j=1}^3 \langle div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij}\rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij}, \tag{3.9}$$

$$\tilde{c}_0^s = \frac{1}{m}\langle div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}_1\rangle_{Y_s}, \quad b_0^s = (1-m) + \langle div_y \boldsymbol{U}_0\rangle_{Y_s}, \tag{3.10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & div_y((1-\chi)(\lambda_0(\mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij}) + \mathbb{J}^{ij}) - \tilde{P}^{ij}\mathbb{I})) = 0, \\ & (1-\chi) div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij} = 0, \ \ i, j = 1,2,3; \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned} & div_y((1-\chi)(\lambda_0\mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_0) - \tilde{P}_0\mathbb{I})) = 0, \\ & (1-\chi)(div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}_0 + 1) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{aligned} & div_y((1-\chi)(\lambda_0\mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1) - \tilde{P}_1\mathbb{I}) - \chi\mathbb{I}) = 0, \\ & (1-\chi) div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Здесь через $\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}$ обозначен тензор четвертого ранга, определяемый по матрицам $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ так, что его свертка с произвольной матрицей $\mathbb{A}$ дается формулой

$$(\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) : \mathbb{A} = \mathbb{B}(\mathbb{C} : \mathbb{A}),$$

а

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i),$$

где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ -ортонормированный базис декартовой системы координат.
Наконец, плотность жидкости ρ_f определяется из решения задачи Коши

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho_f \boldsymbol{u}) = 0, \\ & \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}), \ \ x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

где

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^+, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^+(0),$$

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^-, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^-(0),$$

и

$$\Omega = \Omega^+(0) \cup \widetilde{\Pi}(0) \cup \Omega^-(0).$$

Чтобы понять структуру задачи достаточно рассмотреть модельную постановку, в которой задачу Коши (3.14) замыкает неоднородная система уравнений Стокса

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 \Delta \boldsymbol{w}_s - \nabla p + \hat{\rho} \boldsymbol{F} = 0, \quad div\, \boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S,\end{array}\right\} \tag{3.15}$$

для вектора перемещений $\boldsymbol{w}_s(x,t)$ в твердой компоненте и система уравнений фильтрации

$$\left.\begin{array}{l} div\, \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_f + (1-m)\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}, \\ \boldsymbol{v}_f = m\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1}(-\nabla p_f + \rho_f \boldsymbol{F}) \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_f(x,t)$ жидкой компоненты, дополненная краевым условием (3.6).

4. Задача Маскета для упругого режима фильтрации

В настоящем разделе мы рассмотрим случай, когда

$$0 < \lambda_0 < \infty \ \text{ и } \ \mu_0^+ = \mu_0^- = 0, \ \ \mu_1^+ = \mu_1^- = \infty.$$

Как уже отмечалось выше, предельным режимом здесь является односкоростной континуум, описываемый системой уравнений Терцаги-Био, в которой $\boldsymbol{v}_f = m\ \partial \boldsymbol{w}_s / \partial t$ и $\mu_1 = \infty$. А именно, вектор перемещения $\boldsymbol{w}_s$ и плотность жидкости ρ_f удовлетворяют в области Ω при $t > 0$ системе уравнений

$$div\ \left(\widetilde{\mathbb{A}}^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + m\, \tilde{\mathbb{C}}_0^s p_f - p\mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{4.1}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + m\, \tilde{c}\,{}_0^s p_f = 0, \tag{4.2}$$

$$div\ \boldsymbol{w}_s = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\right) = 0 \tag{4.4}$$

и краевому и начальному условиям

$$\boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{4.5}$$

Модельной постановкой здесь будет уравнение (4.4), дополненное системой уравнений Стокса

$$\lambda_0 \Delta \boldsymbol{w}_s - \nabla p + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad div\, \boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.6}$$

для вектора перемещений $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t)$ и условиями (4.5).

Задача (4.4) - (4.6) является новой и, на наш взгляд, более "регулярной" по сравнению как с задачей Маскета (2.1) - (2.6), так и с задачей Маскета - Терцаги - Био (3.14) - (3.16).

5. Задача Маскета для вязкоупругого режима фильтрации

В этом последнем разделе мы рассмотрим случай, когда

$$0 < \lambda_0 < \infty \quad и \quad 0 < \mu_0^+, \qquad \mu_0^- < \infty.$$

Как следует из результатов [1], предельным режимом здесь является односкоростной континуум, описываемый следующей системой уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \nabla p - \hat{\rho}\boldsymbol{F} = div\ (\widetilde{\mathbb{A}}_2 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial w}{\partial t}) + \widetilde{\mathbb{A}}_3 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \\ \int_0^t \widetilde{\mathbb{A}}_4(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(x,\tau) d\tau), \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

$$div\ \boldsymbol{w} = 0, \ \ \boldsymbol{y} \in \Omega, \qquad t > 0,$$

где $\widetilde{\mathbb{A}}_2$, $\widetilde{\mathbb{A}}_3$ и $\widetilde{\mathbb{A}}_4$ – тензоры четвертого ранга, причем тензор $\widetilde{\mathbb{A}}_2$ является симметричным и строго положительно определенным. Как обычно, точное выражение этих объектов находится при помощи решений периодических краевых задач на элементарной ячейке Y:

$$\widetilde{\mathbb{A}}_2 = \mu_0 m \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} \langle(\mu_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}_0^{ij})\rangle_{Y_f} \otimes \mathbb{J}^{ij},$$

$$\widetilde{\mathbb{A}}_3 = \lambda_0 (1-m) \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} - \lambda_0 \mathbb{A}_0^f + \mu_0 \mathbb{A}_1^f(0),$$

$$\widetilde{\mathbb{A}}_4(t) = \mu_0 \frac{d}{dt} \mathbb{A}_1^f(t) - \lambda_0 \mathbb{A}_1^f(t),$$

$$\mathbb{A}_1^f(t) = \sum_{i,j=1}^{3} (\langle \mu_0 \mathbb{D}(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t})\rangle_{Y_f}(t) + \langle \lambda_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{ij})\rangle_{Y_s}(t)) \otimes \mathbb{J}^{ij},$$

где

$$\left.\begin{array}{c} div\ _y(\chi\mu_0 \mathbb{D}(y, \frac{\partial W^{ij}}{\partial t}) + (1-\chi)\lambda_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{ij}) - P^{ij}\,\mathbb{I}) = 0, \\ div\ _y \boldsymbol{W}^{ij} = 0, \ \boldsymbol{y} \in \mathrm{Y}, \ t > 0, \end{array}\right\} \qquad (5.2)$$

$$\boldsymbol{W}^{ij}(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{W}_0^{ij}(\boldsymbol{y}),\ div_{\ y}\left(\chi\left(\mu_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{ij}) + \mathbb{J}^{ij}\right)\right) = 0,\ \boldsymbol{y} \in Y, \quad (5.3)$$

для $i, j = 1,2,3$

Система дифференциальных уравнений (5.1) в области Ω замыкается задачей Коши

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_f\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0, \\ &\rho_f(\boldsymbol{x},0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

для определения плотности ρ_f и краевым условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S,\ t > 0. \quad (5.5)$$

Как и в задача Маскета безразмерная вязкость μ_0 зависит от плотности ρ_f так, что

$$\mu_1 = \mu_0^+ \quad \text{при} \quad \rho_f = \rho_f^+$$

и

$$\mu_1 = \mu_0^- \quad \text{при} \quad \rho_f = \rho_f^-.$$

В отличии от задачи (3.15) и (3.16) или задачи (4.5), модельной задачей для системы (5.1), (5.5), описывающей поведение вектора скорости сплошной среды $\boldsymbol{u} = \partial w/\partial t$, является нелокальная системя уравнений Стокса

$$\left.\begin{aligned} &div\,(\mu_0\nabla\boldsymbol{u}) - \nabla p + \lambda_0\Delta\boldsymbol{w} + \gamma_0\int_0^t \Delta\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \\ &div\,\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \quad \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S. \end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

Выписанная система является сильно эллиптической в своей главной части и доказательство существования и единственности обощенного решения для задачи (5.4), (5.6) (сформулированного соответствующим образом) не вызывает особых трудностей (см. [7]).

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, проект 08-05-00265.

Список литературы

1. Мейрманов А.М., Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах, Сиб. Мат. Журнал, т. 48 (2007), No. 3, 645 - 667.
2. Мейрманов А.М. Математическое моделирование быстропротекающих процессов фильтрации и акустики в пористых средах, Доклады Академии Наук, т. 417 (2007), No.5, 605 - 608.
3. Muskat, M.Two-fluid system in porous media. The encroachment of water into an oil sand, Physics, 5 (1934), 250 - 264.
4. Siegel M., Caflish R.E., Howison S., Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem, Comm. on Pure and Appl. Math.,v. LVII (2004), 1 - 38.
5. Радкевич Е.В. О спектре задачи Веригина-Маскет, Мат. Сб., т. 184 (1993), No. 9, 41 - 88.
6. Мейрманов А.М. Задача Стефана, Наука, Новосибирск, 1986.
7. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky V. A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions, Interfaces and Free Boundaries 2, (2000), 413 - 424.

SOME PRINCIPALS FOR MODELING OF FREE BOUNDARY PROBLEMS IN LIQUID FILTRATION

A.M. MEIRMANOV

Belgorod State University

e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

We consider new free boundary problems describing a joint filtration of two immiscible incompressible viscous fluids with different viscosities and densities. On the micro-level the mathematical model consists of Stokes equation in the pore space for the liquid velocity, Lame equation for the displacements of the elastic solid matrix, continuity conditions on the joint boundary "liquid-solid" and transport equations for the unknown density and viscosity of the liquid. The problem is very hard to tackle due to its nonlinearity and the fact that its main differential equations involve non-smooth oscillatory coefficients, both big and small, under the differentiation operators. To simplify the model we suggest a homogenization procedure when the dimensionless size of the pores " tends to zero, while the porous body is geometrically periodic. Namely, if the solid skeleton is an absolutely rigid body, we arrive at the well – known Muskat problem, which is still unsolved. For the slyghtly viscose liquids we arrive at a new Terzaghi- Biot-Muskat problem, which consist of the Terzaghi-Biot system for the filtration of a viscous liquid in the elastic solid skeleton coupled with the transport equations for the density and viscosity of the liquid, or at a new Muskat model for elastic filtration, which consist of the homogenized Lame equation for the solid component coupled with corresponding transport equations. Finally, for the very viscose liquids the limiting regime described by the system of visco-elasticity for the displacements of the medium coupled with the transport equations for the density and viscosity of the liquid. For this last problem we prove the existence and uniqueness of the generalized solution.

Key words: Lame and Stokes equations, two-scale convergence, Muskat problem.