УДК 517.994

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ ЭЙЛЕРА И НАВЬЕ-СТОКСА

В.И.СЕМЕНОВ

Кузбасский региональный институт повышения квалификации и переподготовки работников образования

e-mail: visemenov@rambler.ru

Доказаны важные интегральные тождества для соленоидальных векторных полей. Они дают новые априорные оценки к тем оценкам, что доказала О. А. Ладыженская. В частности, мы имеем априорную оценку, которая не зависит от коэффициента вязкости, и существование глобальных решений для уравнений Эйлера. Почему нет явления турбулентности в плоском случае? Это объясняется одним из тождеств. Другие тождества представляют интерес для вывода новых законов сохранения.

Ключевые слова: интегральные тождества, обобщенное решение, априорные оценки, тензор напряженности, уравнения Навье –Стокса и Эйлера.

Введение

В первой части работы изучаются свойства соленоидальных векторных полей. Интегральные тождества для таких полей играют важную роль в выводе законов сохранения и свойств решений начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса и Эйлера. Иллюстрация некоторых приложений интегральных тождеств в динамике жидкости дается в пункте 1 и описывается теоремами 1.1-1.3, 1.4. Важная роль отводится следствию 1.1 с помощью которого обосновывается лучшая сходимость приближенных решений уравнений Навье-Стокса.

Вторая часть работы (пункты 3,4) посвящена начально-краевой задаче для уравнений Навье-Стокса и Эйлера на плоскости:

$$D_t u_k + \sum_{l=1}^{2} u_l u_{k,l} = \nu \Delta u_k + f_k - p_{,k},\ \ k = 1,2, \tag{1.1}$$

$$divu = 0, \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3}$$

где Ω - односвязная область с кусочно-гладкой границей, u - скорость потока, p - функция давления, $f = (f_1, f_2)$ - внешняя сила и $divf = 0$. Символы $D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ $\left(u_{k,lj} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j}\right.$ и т.д.) означают частное или обобщенное дифференцирование, Δ - оператор Лапласа, ν - неотрицательная постоянная (коэффициент вязкости жидкости). Относительно векторного поля φ предполагаем, что оно принадлежит соболевскому классу $W_2^3(\Omega)$, если не оговорено иное. (Определение и свойства этих пространств см. в [13,14].)

Другие стандартные обозначения, которые применяются в работе: матрица Якоби отображения u относительно пространственных переменных обозначается символом ∇u . Ее модуль есть $|\nabla u| = (\sum_{l,j} u_{l,j}^2)^{\frac{1}{2}}$. Употребляемые нормы:

$$||v||_p = (\int_\Omega |v(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, ||u||_{p,q} = (\int_0^t (\int_\Omega |u(t,x)|^p dx)^{\frac{q}{p}} dt)^{\frac{1}{q}},$$

где $t \leq T$. Иногда вместо области Ω в нормах подразумеваем пространство R^2.

Начально-краевая задача на плоскости для уравнений Навье-Стокса изучена О.А. Ладыженской в [1] (см. подробности в [2, глава VI]). Новые интегральные тождества и модификация конструкции О.А. Ладыженской и А.А. Киселева из [3], которую автор применил в пространственной задаче Коши в [4], дают возможность получить новые априорные оценки норм градиентов скоростей в размерности $n = 2$ (см. теорему 3.1). Важность этих оценок заключается в том, что они не зависят от коэффициента вязкости. Из результатов в [2] такие оценки не выводятся. Следствием новых оценок является доказательство существования в целом обобщенного решения для уравнений Эйлера (уравнений Навье-Стокса с нулевым коэффициентом вязкости) на плоскости (теорема 4.1). Этот факт также из результатов в [2] не следует. Найденное решение уравнений Эйлера принадлежит классу $L_{4,4}$ - классу, в котором имеет место теорема единственности решений уравнений Навье-Стокса (см. [23, 24]).

Всюду в работе повторяющийся индекс в произведении означает суммирование этих произведений в границах изменения индекса или индексов. Например, $u_i u_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} u_i u_{j,i}$, $u_{i,j} u_{j,i} = \sum_{i,j=1}^{n} u_{i,j} u_{j,i}$, $u_i u_{j,i} \Delta u_j = \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_{j,i} \Delta u_j$, и т. д.

Скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначаем стандартно: (f, g).

1. Основные интегральные тождества

Пусть $u, v, w: R^n \to R^n$ - произвольная тройка финитных соленоидальных векторных полей класса $C_0^2(R^n)$. Полагаем

$$c_{ki}(u) = u_{k,i} - u_{k,i}, \quad k, i = 1,2, \dots, n. \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Для каждой тройки $u, v, w: R^n \to R^n$ финитных соленоидальных векторных полей класса $C_0^2(R^n)$ справедливо интегральное тождество:*

$$\int (w_{i,j} + w_{j,i}) c_{ki}(v) c_{kj}(u) dx = - \int w_i (c_{ki}(u) \Delta v_k + c_{ki}(v) \Delta u_k) dx.$$

Доказательство. Интеграл из левой части равенства леммы обозначим символом I, а из правой части - символом J. Преобразуем I, применяя формулу интегрирования по частям. Тогда из (1.4) после изменения индексов суммирования имеем

$$I = -J - \int (w_i c_{ki,j}(v) c_{kj}(u) + w_i c_{ki,j}(u) c_{kj}(v)) dx. \tag{1.5}$$

Используя равенство $c_{ki,j} = c_{kj,i} - c_{ij,k}$, вновь преобразуем (1.5) по формуле интегрирования по частям. Тогда

$$I = -J - \int w_i (c_{ij,k}(v) c_{kj}(u) + c_{ij,k}(u) c_{kj}(\mathrm{v})) dx. \tag{1.6}$$

В (1.6) еще раз выполним интегрирование по частям. Затем в произведениях $w_{i,k} c_{ij} c_{kj}$ индекс суммирования k заменяем индексом j и наоборот. В результате (1.4) и условия соленоидальности имеем

$$I = -J - \int (w_{i,j}c_{ik}(v)c_{jk}(u) + w_{i,j}c_{ik}(u)c_{jk}(v) - w_i c_{ij}(v)\Delta u_j - w_i c_{ij}(u)\Delta v_j)dx.$$

Условие кососимметричности $c_{ij} = -c_{ji}$ используем во всех слагаемых последнего равенства. Отсюда выводим равенство: $I = -J$. Лемма доказана.

Следствие 1.1. *В размерности $n = 2$ для каждой тройки u, v, w финитных соленоидальных векторных полей класса $C_0^2(R^2)$ справедливо интегральное тождество:*

$$\int (w_i c_{ki}(u)\Delta v_k + w_i c_{ki}(v)\Delta u_k)dx = 0.$$

Доказательство. В размерности $n = 2$, в силу условия кососимметричности $c_{ij} = -c_{ji}$, для сумм произведений выполняются равенства: $c_{k1}(u)c_{k2}(v) = 0$, $c_{k1}(u)c_{k1}(v) = c_{k2}(u)c_{k2}(v)$ (повторяющийся индекс означает суммирование). Поэтому условие $divw = 0$ и лемма 1.1 дают утверждение следствия.

Следствие 1.2. *В произвольной размерности n любое финитное соленоидальное векторное поле u класса $C_0^{2r+2}(R^n)$ удовлетворяет интегральному тождеству:*

$$\int (u_{i,j} + u_{j,i})c_{ki}(\Delta^r u)c_{kj}(u)dx = -\int u_i(c_{ki}(u)\Delta_k^{r+1}u_k + c_{ki}(\Delta^r u)\Delta u_k)dx.$$

Доказательство. В качестве тройки полей u, v, w в лемме 1.1 следует взять $u, \Delta^r u, u$. Следствие доказано.

Другая часть интегральных тождеств связана с интегралом импульса (см.[5]). Для достаточно широкого класса соленоидальных полей импульс (интеграл теоремы 1.1) оказывается нулевым. Его обращение в нуль есть следствие условия квазиконформности поля скоростей. Требование квазиконформности деформации (не отображения!) здесь естественное, так как в условиях несжимаемости потока оно означает ограниченность компонент тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$.

Интегральные представления векторных полей через тензор напряжений в ограниченной области впервые указаны в [6]. Отсюда в силу теорем вложения С.Л. Соболева [13] следует непрерывность векторных полей с ограниченными компонентами тензора напряжений.

Лемма 1.2. (См.[4, лемма 1.3.]) *Если непрерывное отображение $w: R^n \to R^n$ принадлежит классу $W_p^1(R^n)$, $p > 1$, то для любых точки x и показателя α, $\alpha > (n-1)(1-1/p)$, $r^{-\alpha}\int_{|x-y|=r} w(y)dS \to 0$, если $r \to \infty$.*

Отметим некоторые свойства соленоидальных квазиконформных деформаций.

Лемма 1.3. *Пусть соленоидальное векторное поле $u: R^n \to R^n, n \geq 2$, принадлежит классу $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$ и имеет ограниченные компоненты тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$ для всех i, j. Тогда имеет место интегральное представление:*

$$u_i(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int \frac{(u_{i,j}(y) + u_{j,i}(y))(x_j - y_j)}{|x-y|^n}dy,\ i = 1,2,\dots,n,$$

где ω_{n-1} - площадь единичной сферы.

Доказательство. Для проверки равенства леммы следует применить теорему Стокса в шаровом слое $\varepsilon \le |y-x| \le r$ для интеграла из правой части равенства леммы. К интегралу, содержащему выражение $u_{j,l}$, теорему Стокса применяем дважды и учитываем условие $div\ u = 0$. Предельный переход, когда $\varepsilon \to 0, r \to \infty$, с применением леммы 1.3 дает требуемое равенство. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n, n > 2$, *принадлежит классу* $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$ *и имеет ограниченные компоненты тензора напряжений* $u_{i,j} + u_{j,i}$ *для всех* i, j. *Тогда векторное поле* u *ограничено.*

Доказательство. Интеграл в интегральном представлении леммы 1.3 разбиваем на два интеграла: по шару $|y-x| < 1$ и его внешности $|y-x| \ge 1$. Интеграл по шару оцениваем, учитывая ограниченность компонент тензора напряжений. Тогда $|\int_{|y-x|<1} (\cdot)dy| \le M \int_{|y-x|<1} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} = M\omega_{n-1}$. Здесь ω_{n-1} - площадь $n-1$ - мерной единичной сферы. Интеграл по внешности шара оцениваем, применяя неравенство Гельдера. В результате имеем $|\int_{|y-x|\ge 1} (\cdot)dy| \le 2||\nabla u||_2 (\int_{|y-x|\ge 1} \frac{dy}{|x-y|^{2(n-1)}})^{1/2} \le C$. Из этих оценок следует ограниченность векторного поля u. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n$ *принадлежит классу* $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$ *и имеет ограниченные компоненты тензора напряжений* $u_{i,j} + u_{j,i}$ *для всех* i, j. *Если* $r \int_{|x|=r} |u(x)|dS \to 0$, *когда* $r \to \infty$ *или* $|u(x)| = o(|x|^{-n})$, *когда* $|x| \to \infty$, *то*

$$\int u(x)dx = 0.$$

Доказательство. Векторное поле u порождает однопараметрическую группу $\{\Phi_t\}$ квазиизометрических отображений пространства (см. [7, § 6, теорема 6]). Тогда имеем соотношения:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = u \circ \Phi_t,\ e^{-mt}|x-y| \le |\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| \le e^{mt}|x-y| \quad (1.7)$$

с некоторой константой m. Из группового свойства $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ имеем равенство:

$$u \circ \Phi_t = (\Phi_t)_{k,l}(x)u_l(x), \quad (1.8)$$

выполняющееся почти всюду. В силу теоремы Лиувилля якобиан $J(x, \Phi_t) = 1$ почти всюду. тогда по формуле замены переменной в силу (1.8) выводим равенства:

$$\int u(z)dz = \int u \circ \Phi_t(x)dx = \int (\Phi_t)_{k,l}(x)u_l(x)dx.$$

По теореме Стокса, из условия $divu = 0$, имеем равенство:

$$\int_{|x|\le r} (\Phi_t)_{k,l}(x)u_l(x)dx = \int_{|x|=r} (\Phi_t)_k(x)u_l(x)\frac{x_l}{r}dS.$$

Так как $\int_{|x|=r}(\Phi_t)_k(0)u_i(x)\frac{x_i}{r}dS = 0$, то из второго соотношения в (1.7) получаем оценки:

$$|\int_{|x|=r}(\Phi_t)_k(x)u_i(x)\frac{x_i}{r}dS| \leq \int_{|x|=r}|(\Phi_t)_k(x)-(\Phi_t)_k(0)||u(x)|dS \leq re^{mt}\int_{|x|=r}|u(x)|dS.$$

Тогда из этой оценки, условия теоремы и предыдущих двух равенств выводим утверждение теоремы.

Можно освободиться от ограничений роста на векторное поле в бесконечно удаленной точке.

Теорема 1.2. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n$ *принадлежит классу* $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$, *имеет ограниченные компоненты тензора напряжений* $u_{i,j} + u_{j,i}$ *для всех* i, j *и ограничено в размерности* $n = 2$. *Тогда*

$$\int u(x)dx = 0.$$

Доказательство. Считаем векторное поле u гладким, иначе рассматриваем усреднения. Компоненты тензора напряжений усреднений ограничены теми константами, которыми ограничены компоненты тензора напряжений векторного поля u. Возьмем произвольную гладкую финитную функцию η, которая равна единице, если $|x| \leq 1$, и обращается в нуль , если $|x| \geq 2$. Векторное поле $v(x) = \eta(x/r)u(x), r > 1$, финитное. Так как векторное поле u ограничено, либо по условию, либо по лемме 1.4, то компоненты тензора напряжений $v_{i,j} + v_{j,i}$ ограничены универсальной константой при всех $r > 1$. Тогда векторное поле порождает однопараметрическую группу $\{\Phi_t\}$ квазиизометрических отображений пространства (см. [7, § 6, теорема 6]). В силу равенства вида (1.8) и финитности v имеем соотношения:

$$\int v \circ \Phi_t(x)dx = \int (\Phi_t)_{k,i}(x)v_i(x)dx = -\int (\Phi_t)_k(x)div\ v(x)dx = 0. \quad (1.9)$$

Так как $div\ v = r^{-1}(\nabla\eta(\cdot/r), u)$, то в силу ограниченности u с некоторой константой M, независящей от r, имеем неравенство $|div\ v| \leq M/r$. Тогда из групповых свойств $\{\Phi_t\}$ для якобианов выводим неравенства:

$$e^{-M|t|/r} \leq J(x, \Phi_t) \leq e^{M|t|/r}. \quad (1.10)$$

В интеграле из левой части (1.9) делаем замену переменной $x = \Phi_{-t}(z)$. В результате имеем

$$\int v \circ \Phi_t(x)dx = \int \eta(z/r)u(z)J(z, \Phi_{-t})dz. \quad (1.11)$$

В силу выбора функции η имеем равенство:

$$\int v \circ \Phi_t(x)dx = \int_{|z|\leq r} u(z)J(z, \Phi_{-t})dz + \int_{r\leq|z|\leq 2r} \eta(z/r)u(z)J(z, \Phi_{-t})dz.$$

По теореме Лебега в силу оценок (1.10) первый интеграл из правой части стремится к значению $\int_{R^n} u(z)dz$, когда $r \to \infty$. Второй интеграл правой части в силу суммируемости u и (1.10) стремится к нулю. Поэтому из (1.9) и (1.11) имеем требуемое равенство леммы. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 1.1 можно распространить на ограниченные области.

Теорема 1.3. *Пусть соленоидальное векторное поле $u: \Omega \to R^n$ для ограниченной выпуклой области Ω принадлежит классу $W_2^1(\Omega)$, имеет ограниченные компоненты тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$ для всех i, j. Если на границе области для вектора нормали n скалярное произведение $(n, u(x)) = 0$, то*

$$\int_\Omega u(x)dx = 0.$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству предыдущей теоремы. Обращение скалярного произведения $(n, u(x))$ в нуль на границе области обеспечивает существование однопараметрической группы $\{\Phi_t\}$ квазиизометрических отображений области Ω на себя.(Существование полугрупп $\{\Phi_t^1\}_{t\geq 0}$, $\{\Phi_t^2\}_{t\geq 0}$ с инфинитезимальными образующими u и $-u$ следует из [8, § 3, теорема 3]. Взаимная обратность отображений Φ_t^1, Φ_t^2 доказывается также, как и теорема 2.2 из [9, § 2]. Теорема доказана.

Лемма 1.5. *Пусть соленоидальное векторное поле $u: R^n \to R^n$ принадлежит классу $W_2^1(R^n)$, имеет ограниченные компоненты тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$ для всех i, j; $u(x) = o(1/|x|^{n+1})$, когда $x \to \infty$, и интеграл $\int |x||u(x)|dx$ - конечен. Тогда*

$$\int x_j u_k(x)dx = -\int x_k u_j(x)dx$$

для любой пары чисел j, k.

Доказательство. Применяем идею доказательства теоремы 1.1. Пусть $\{\Phi_t\}$-однопараметрическая группа квазиизометрических отображений пространства, порожденная векторным полем u. По формуле замены переменной имеем равенство (якобиан отображений Φ_t равен единице):

$$\int x_j u_k(x)dx = \int (\Phi_t)_j(x) u_k \circ \Phi_t(x)dx.$$

В силу (1.8) имеем:

$$\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_j(x) u_k \circ \Phi_t(x)dx = \int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_j(x)(\Phi_t)_{k,l}(x)u_l(x)dx.$$

В правой части применяем теорему Стокса. Тогда

$$\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_j(x)(\Phi_t)_{k,l}(x)u_l(x)dx =$$

$$-\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_{j,l}(x)(\Phi_t)_k(x)u_l(x)dx + \int_{|x|=r} (\Phi_t)_j(x)(\Phi_t)_k(x)u_l(x)\frac{x_l}{r}dS.$$

В объемном интеграле правой части воспользуемся (1.8). В поверхностном интеграле учитываем, что $\Phi_t)(x) = O(|x|)$, когда $x \to \infty$ (см. второе соотношение (1.7)). Тогда предельное значение поверхностного интеграла при условии, что $r \to$

∞, равно нулю. Поэтому в результате предельного перехода и замены переменной из предыдущих равенств имеем:

$$\int x_j u_k(x)dx = -\int (\Phi_t)_k(x)u_l \circ \Phi_t(x)dx = -\int x_k u_l(x)dx.$$

Лемма доказана.

Остановимся сейчас на неожиданных законах сохранения в задаче Коши для уравнений Навье-Стокса, которые найдены в [10] для пространства и в [11] в общем случае. Они получены в предположении, что решения и все их первые производные убывают в бесконечно удаленной точке быстрее, чем $1/|x|^{n+1}$. На самом деле условия на рост можно ослабить до показателя $n/2$, что является существенным для приложений (см. [5]). Это, во-первых. Во-вторых, здесь важен фактор соленоидальности поля, а не фактор решения.

Пусть соленоидальное векторное поле $u: R^n \to R^n, n \geq 3$, таково, что

$$|u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\gamma},\ |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\gamma+1}},\ |u_{,ij}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\gamma+2}},\ i,j = 1,\ldots,n, \tag{1.12}$$

где C - некоторая постоянная, показатель $\gamma > n/2$. Рассмотрим новое векторное поле

$$v = u_l u_{,l} = w + \nabla P, \tag{1.13}$$

которое разложено на соленоидальную и потенциальную составляющие. Здесь

$$P(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \int_{R^n} \frac{u_{l,j}(y)u_{j,l}(y)dy}{|x-y|^{n-2}},$$

$$w(x) = u_l(x)u_{,l}(x) - \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{R^n} \frac{u_{l,j}(y)u_{j,l}(y)(x-y)dy}{|x-y|^n}, \tag{1.14}$$

где ω_{n-1} - площадь единичной сферы. Интегрирование по частям приводит к формулам:

$$P(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{R^n} \frac{u_{l,j}(y)u_j(y)(x_l-y_l)dy}{|x-y|^n}, \tag{1.15}$$

$$P_{,k}(x) = \frac{1}{n} u_j(x)u_{k,j}(x) - T_{lk}(u_{l,j}u_j)(x), \tag{1.16}$$

где T_{lk} -подходящий сингулярный интегральный оператор. Оценки (1.12), формула (1.15) и неравенство Харди-Литтлвуда-Соболева (см. [12, с.141]) обеспечивают суммируемость функции P в любой конечной степени $p > 1$. Оценки (1.12), формула (1.16) и ограниченность сингулярного интегрального оператора дают суммируемость ∇P в любой конечной степени $p > 1$. Требуя интегрируемость этих отображений в степени $p = 1$, можно усилить результаты из [10] и [11].

Теорема 1.4. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n, n \geq 3$, *удовлетворяет оценкам (1.12), функция P из (1.14) суммируема,* $P(x) = o(1/|x|^n)$, *когда* $x \to \infty$, *и интеграл* $\int |x||\nabla P(x)|dx$ *- конечен. Тогда. Тогда имеют место равенства:*

$$\int u_j u_k dx = \frac{\delta_{jk}}{n}||u||_2^2,\ j,k = 1,\dots,n,$$

где δ_{jk} - символ Кронекера.

Доказательство. Отметим, что имеет место равенство:

$$\int u_j(x)u_k(x)dx = -\int x_k u_l(x)u_{j,l}(x)dx, \tag{1.17}$$

которое следует из оценок (1.12) и формулы интегрирования по частям. Применяем разложение (1.13) и заметим, что векторное поле w удовлетворяет условиям леммы 1.5. Ограниченность его первых производных следует из оценок (1.12), равенства

$$w_{,m}(x) = (u_l u_{,l})_{,m}(x) - \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{R^n}\frac{(u_{l,j}u_{j,l})_{,m}(y)(x-y)dy}{|x-y|^n},$$

в котором интеграл ограничен. Ограниченность интеграла показывается его разбиением на два интеграла по шару $|x-y|<1$ и его внешности с последующими оценками при помощи (1.12). Поэтому в силу леммы 1.8 имеем равенства:

$$\int x_k w_j(x)dx = -\int x_j w_k(x)dx,\ j,k = 1,\dots,n. \tag{1.18}$$

Из теоремы Стокса выводим:

$$\int_{|x|\le r} x_k P_{,j}(x)dx = -\int_{|x|\le r}\delta_{jk}P(x)dx + \int_{|x|=r}P(x)\frac{x_j x_k}{r}dS.$$

Тогда предельный переход дает равенство:

$$\int x_k P_{,j}(x)dx = -\int \delta_{jk}P(x)dx. \tag{1.19}$$

Таким образом из (1.17),(1.13) и (1.19) выводим:

$$\int u_j(x)u_k(x)dx = -\int x_k w_j(x)dx - \int \delta_{jk}P(x)dx,\ j,k = 1,\dots,n.$$

Сделаем перестановку индексов j,k в этих равенствах и выполним сложение пар таких равенств с фиксированными индексами j,k. Применим (1.18) и получим

$$2\int u_j(x)u_k(x)dx = -2\int \delta_{jk}P(x)dx,\ j,k = 1,\dots,n.$$

Следовательно, $||u||_2^2 = -n\int P(x)dx$. Тогда предыдущие равенства дают утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1.1. В размерности $n = 2$, используя фактор решения, в [20] дается простое и красивое доказательство этого факта.

2. Оценки приближений начально-краевой задачи в ограниченной области на плоскости для уравнений Навье-Стокса

Опишем изменение конструкции, предложенной в [3] и развитой в [2], применительно к плоской ограниченной односвязной области Ω (односвязность важна на завершающем этапе доказательства существования слабого решения). Рассмотрим финитные соленоидальные векторные поля $\varphi\colon \Omega \to R^2$ класса C^∞. Замыкание этого класса по норме соболевского пространства $W_2^3(\Omega)$ обозначаем символом $J_0^3(\Omega)$. Пространство $J_0^3(\Omega)$ сепарабельное, как подпространство соболевских пространств $W_p^l(\Omega), 1 < p < \infty$. Поэтому существует счетная совокупность $(\psi^n)_{n=1,\dots}$ бесконечно дифференцируемых векторных полей, подчиняющихся условиям:

1) $div\ \psi^n = 0$;

2) замыкание линейной оболочки совокупности по норме $W_2^3(\Omega)$ совпадает с пространством $J_0^3(\Omega)$.

Применим ортогонализацию Сонина-Шмидта по фундаментальной системе $(\psi^n)_{n=1,\dots}$ и построим счетную систему элементов $(b^n)_{n=1,\dots}$, которая обладала бы свойством ортогональности лапласианов в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. скалярное произведение

$$(\Delta b^n, \Delta b^m) = \int_\Omega \Delta b_l^n \Delta b_l^m dx = \delta_{ij}, \tag{2.1}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Тогда каждое отображение b^n есть конечная линейная комбинация отображений (ψ^k). Пусть

$$\Delta b^n = a^n. \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности, считаем первым элементом векторное поле $a^1 = \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{P}\Delta\varphi||_2}$, где соленоидальное векторное поле $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ определяет начальное условие в задаче (1.1)-(1.3). (К фундаментальной системе всегда можно присоединить первым элементом любой элемент.)

Замечание 2.1. На самом деле можно не требовать условия $\varphi \in C^\infty$. Все рассуждения, предшествующие замечанию 2.1, и рассуждения в доказательствах лемм 2.1-2.3 остаются в силе, если ограничиться требованием $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$.

Последовательные приближения v^n определяем, слегка изменив конструкцию

О.А.Ладыженской [2 с.197]. Полагаем

$$\Delta v^n(t,x) = \sum_{q=1}^n c_{qn}(t) a^q(x). \tag{2.3}$$

Тогда приближенное решение v^n строится, как гидродинамический потенциал

$$v^n(t,x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^n c_{qn}(t) \int_\Omega a^q(y) \ln|x-y| dy. \tag{2.4}$$

Функции c_{qn} есть решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(D_t v^n, a^q) - \nu(\Delta v^n, a^q) + \int_\Omega v_l^n v_{k,l}^n a_k^q dx = (f, a^q),\ q = 1,2 \dots, n, \tag{2.5}$$

с начальными условиями: $c_{qn}(0) = ||\Delta\varphi||_2 \delta_{qn}$, где δ_{qn} - символ Кронекера. Тогда

$$\Delta v^n(0,x) = \Delta\varphi(x),\ v^n(0,x) = \varphi(x). \tag{2.6}$$

Выясним промежуток существования гладкого решения системы (2.5). Каждое уравнение из (2.5) умножаем на функции c_{qn} , а затем их суммируем. В результате имеем:

$$(D_t v^n, \Delta v^n) - \nu||\Delta v^n||_2^2 + \int_\Omega v_l^n v_{k,l}^n \Delta v_k^n dx = (f, \Delta v^n).$$

Так как $\int_\Omega v_l^n v_{k,l}^n \Delta v_k^n dx = \int_\Omega v_l^n c_{kl}(v^n)\Delta v_k^n dx$, то из следствия 1.1 и формулы интегрирования по частям выводим соотношение:

$$(D_t \nabla v^n, \nabla v^n) + \nu||\Delta v^n||_2^2 = (\nabla f, \nabla v^n). \tag{2.7}$$

Отсюда имеем очевидную оценку: $\frac{d}{dt}||\nabla v^n||_2^2 \le 2||\nabla f||_2||\nabla v^n||_2$ или $\frac{d}{dt}||\nabla v^n||_2 \le ||\nabla f||_2$ Интегрируя по отрезку $[0, t]$, выводим неравенство:

$$||\nabla v^n||_2 \le ||\nabla \varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt. \tag{2.8}$$

Существование гладких решений системы (2.5) на некотором промежутке $[0, t_0)$ гарантируется теоремами существования и гладкости решений для обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя оценка показывает, что эти решения продолжаются на каждый отрезок $[0, T]$, где смешанная норма $||\nabla f||_{2,1}$- конечная.

Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть плоская область Ω произвольная и смешанная норма $P\nabla f P_{2,1}$ на прямом произведении $[0,T] \times \Omega$ конечная. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ для приближений v^n, построенных по формулам (2.3)-(2.5), справедливы оценки:*

1) $||\nabla v^n||_2 \le ||\nabla \varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt$;
2) $||\Delta v^n||_{2,2}^2 \le \nu^{-1}||\nabla \varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2\nu}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla \varphi||_2^2)$;
3) $||\nabla v^n||_{4,4} \le C/\sqrt[4]{\nu}$,

где смешанные нормы вычислены на множестве $[0, t] \times \Omega$, и константа C зависит только от $T,\ f,\ \varphi$.

Доказательство. Справедливость первой оценки установлена выше. Докажем вторую оценку. Интегрируем (2.7) по отрезку $[0, t]$ и оцениваем правую часть неравенством Коши-Буняковского. Используя первую оценку, выводим:

$$\frac{1}{2}||\nabla v^n||_2^2 + \nu||\Delta v^n||_{2,2}^2 \le ||\nabla \varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla \varphi||_2^2).$$

Отсюда имеем оценку 2). Оценка 3) есть оценка леммы 1 из [2, c.19], потому что в этом случае имеем неравенства $||\nabla v_i^n||_4^4 \le 4||\nabla v_i^n||_2^2 \sum_j ||v_{,ij}^n||_2^2$, $i = 1,2$. Так как $\sum_{i,j} ||v_{,ij}^n||_2^2 = ||\Delta v^n||_2^2$, то из оценок 1) и 2) следует оценка 3). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть плоская область Ω ограничена. Предположим, что норма* $||\nabla f(0,\cdot)||_2$ и смешанные нормы $||\nabla f||_{2,1}$, $||\nabla D_t f||_{2,1}$ на прямом произведении $[0, t] \times \Omega$ для каждого $t \le T$ конечные. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ для приближений v^n, построенных по формулам (2.3)-(2.5), справедливы оценки:

1) $||v^n||_2 \le C(\Omega)(||\nabla \varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt)$;

2) $||\nabla D_t v^n||_2 \le (||\nabla f(0,\cdot)||_2 + ||\nabla T^1||_2 + \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt) e^{\sqrt{t}||\nabla v^n||_{4,4}^2}$,

где постоянная $C(\Omega)$ зависит только от области, $T^1(x) = \nu\Delta\varphi(x) - \varphi_l \varphi_{k,l}(x)$, и смешанная норма вычислена на множестве $[0,t] \times \Omega$.

Доказательство. В ограниченной области для финитных векторных полей выполняется неравенство:

$$||v^n||_2 \le C(\Omega)||\nabla v^n||_2, \tag{2.8'}$$

где постоянная $C(\Omega)$ оценивается сверху через первое собственное число оператора Лапласа (см. [13, с.135]). Тогда оценка 1) следует из первого неравенства леммы 2.1.

Докажем вторую оценку. В равенствах (2.5) заменим интеграл $\int_\Omega v_l^n v_{k,l}^n a_k^q dx$ интегралом $\int_\Omega v_l^n c_{kl}(v^n) a_k^q dx$, поскольку они равны. Затем равенства дифференцируем по аргументу t. После этого каждое из них умножим соответственно на $c'_{qn}(t)$ и сложим. В результате имеем:

$$(D_{tt}v^n, D_t\Delta v^n) - \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 + \int_\Omega (D_t v_l^n c_{kl}(v) + v_l^n c_{kl}(D_t v))\Delta D_t v_k^n dx = (D_t f, \Delta D_t v^n).$$

Отсюда, в силу следствия 1.1 выводим равенство:

$$(D_{tt}v^n, D_t\Delta v^n) - \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 + \int_\Omega D_t v_l^n c_{kl}(v)\Delta D_t v_k^n dx = (D_t f, \Delta D_t v^n).$$

Выполним интегрирование по частям и запишем это равенство в следующем виде:

$$(D_{tt}\nabla v^n, D_t\nabla v^n) + \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 = \int_\Omega D_t v_l^n c_{kl}(v)\Delta D_t v_k^n dx + (\nabla D_t f, \nabla D_t v^n).$$

Правую часть оценим, используя неравенства Гельдера и Коши -Буняковского. Тогда, учитывая формулу (1.4), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||D_t\nabla v^n||_2^2 + \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 \le 2||D_t v^n||_4 ||\nabla v^n||_4 ||\Delta D_t v^n||_2 + ||\nabla D_t f||_2 ||\nabla D_t v^n||_2.$$

Рассматривая это неравенство, как квадратное неравенство относительно нормы $||\Delta D_t v^n||_2$, заключаем, что его дискриминант должен быть неотрицательным. Поэтому имеем оценку:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||D_t\nabla v^n||_2^2 \le \frac{1}{\nu}||D_t v^n||_4^2 ||\nabla v^n||_4^2 + ||\nabla D_t f||_2 ||\nabla D_t v^n||_2. \tag{2.9}$$

Так как (см. лемму 2 из [2, с.19] и [13, с.135]) $||D_t v^n||_4^2 \le 2||D_t v^n||_2 ||\nabla D_t v^n||_2 \le 2C(\Omega)||\nabla D_t v^n||_2^2$, то из (2.9) имеем

$$\frac{d}{dt}||D_t\nabla v^n||_2 \le \frac{2C(\Omega)}{\nu}||\nabla D_t v^n||_2 ||\nabla v^n||_4^2 + ||\nabla D_t f||_2.$$

Обозначим $z(t) = ||D_t\nabla v^n||_2$, $c(t) = 2C(\Omega)\nu^{-1}\int_0^t ||\nabla v^n||_4^2 dt$. Тогда последнее неравенство равносильно соотношению:

$$\frac{d}{dt}(z(t)e^{-c(t)}) \leq ||\nabla D_t f||_2 \cdot e^{-c(t)}.$$

Заменим экспоненту в правой части единицей и проинтегрируем по отрезку $[0,t]$. Тогда

$$z(t)e^{-c(t)} - z(0) \leq \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt. \qquad (2.10)$$

Оценим значение $z(0)$. В равенствах (2.5) считаем $t = 0$. Умножим их на $c'_{qn}(0)$ и сложим. В результате из (2.6) имеем

$$(D_t v^n(0,\cdot), \Delta D_t v^n(0,\cdot)) - (T^1, \Delta D_t v^n(0,\cdot)) = (f(0,\cdot), \Delta D_t v^n(0,\cdot)).$$

Выполним интегрирование по частям. Тогда получим

$$||D_t v^n(0,\cdot)||_2^2 = (\nabla T^1, \nabla D_t v^n(0,\cdot)) + (\nabla f(0,\cdot), \nabla D_t v^n(0,\cdot)).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского выводим оценку: $z(0) = ||D_t v^n(0,\cdot)||_2 \leq ||\nabla T^1||_2 + ||\nabla f(0,\cdot)||_2$. Из неравенства (2.10) и определения функции $c = c(t)$ имеем вторую оценку леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть плоская область Ω ограничена. Предположим, что норма* $||\nabla f(0,\cdot)||_2$ и смешанные нормы $||\nabla f||_{2,1}$, $||\nabla D_t f||_{2,1}$ на прямом произведении $[0,t] \times \Omega$ конечные для каждого числа $t \leq T$. Тогда последовательность приближений $(v^n)_{n=1,2,...}$, построенная по формулам (2.3)-(2.5), при положительном коэффициенте ν ограничена в пространстве $W_4^1([0,T] \times \Omega)$.

Доказательство. Ограниченность норм $||v^n||_{4,4}$,$||D_t v^n||_{4,4}$, $||\nabla v^n||_{4,4}$ на множестве $[0,T] \times \Omega$ следует из лемм 2.1, 2.3, мультипликативного неравенства леммы 1 из [2, с.19] и неравенств вида $(2.8')$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. Можно отказаться от требования, чтобы область Ω была звездной относительно некоторого круга. На самом деле здесь важным является факт применимости теоремы вложения С.Л. Соболева в цилиндре $[0,T] \times \Omega$. Справедливость теорем вложения С.Л. Соболева на более широкий класс областей установлена в [14, с.81].

Пусть приближение v^n из формул (2.3)-(2.5). Рассмотрим гидродинамический потенциал

$$P^n(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega v^n_{i,j}(t,y)v^n_{j,i}(t,y)\ln|x-y|dy. \qquad (2.11)$$

Произведение $v^n_{i,j}v^n_{j,i} \in L_p([0,T] \times \Omega)$ при каждом показателе p, $1 \leq p \leq 2$, в ограниченной области Ω. Тогда из равенства

$$P^n_{,k}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{v^n_{i,j}(t,y)v^n_{j,i}(t,y)(x_k-y_k)dy}{|x-y|^2} \qquad (2.11')$$

и неравенства Харди-Литтлвуда-Соболева [12, с.141] для потенциалов Рисса имеем оценку:

$$||\nabla P^n||_q \leq A||\nabla v^n||_{2p},$$

где $A = A(p)$ - универсальная константа, а показатели p, q таковы, что $p > 1$ и $1/q = 1/p - 1/2$. Выбираем показатель $p = 4/3$. Тогда из предыдущего неравенства и неравенства логарифмической выпуклости норм в пространствах L_p имеем соответственно оценку:

$$||\nabla P^n||_4 \leq A||\nabla v^n||_2^{1/2}||\nabla v^n||_4^{1/2}.$$

Тогда в условиях леммы 2.1 из оценки 1) выводим неравенство для смешанных норм:

$$||\nabla P^n||_{4,4} \leq AC(T,\varphi,f)||\nabla v^n||_{4,4}. \tag{2.12}$$

Отсюда следует такое утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть плоская область Ω ограничена, и смешанная норма $P\nabla fP_{2,1}$ на прямом произведении $[0,t]\times\Omega$ конечная для каждого числа $t \leq T$. Тогда последовательность приближений $(P^n)_{n=1,2,...}$, построенная по формуле (2.11), имеет следующие свойства:*

1) удовлетворяет неравенству (2.12) при положительном коэффициенте вязкости ν;

2) ограничена в пространстве $L_2([0,T]\times\Omega)$ при неотрицательном коэффициенте вязкости ν;

3) существует константа $C = C(q)$, $1 < q < 2$, такая, что $||\nabla P^n||_q \leq C(q)||\nabla v^n||_2^2$ для неотрицательного коэффициента вязкости ν.

Доказательство. Неравенство (2.12) доказано выше. Последовательность $(P^n)_{n=1,2,...}$ относительно t равномерно ограничена в $L_2(\Omega)$. Действительно, для произвольной непрерывной финитной функции ξ из (2.11) имеем неравенство:

$$|\int_\Omega P^n(t,x)\xi(x)dx| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Omega |\nabla v^n(t,y)|^2 \int_\Omega |\xi(x)\ln|x-y||dxdy.$$

Применим неравенство Гельдера к внутреннему интегралу в правой части. В следствие ограниченности области Ω, с некоторой константой C имеем неравенство:

$$|\int_\Omega P^n(t,x)\xi(x)dx| \leq C\int_\Omega |\nabla v^n(t,y)|^2 dy||\xi||_2.$$

Из оценки 1) леммы 2.1, произвольного выбора функции ξ и теоремы Рисса выводим неравенство: $||P^n||_2 \leq C_1$, где константа C_1 не зависит от n. Оценка 3) доказывается аналогично с применением равенства (2.11′). Лемма доказана.

3. Свойства решений начально-краевой задачи в ограниченной области для уравнений Навье-Стокса

Считаем сейчас, что коэффициент вязкости $\nu > 0$, и ограниченная область Ω есть звездная область относительно некоторого круга. Тогда цилиндр $[0,T]\times\Omega$ есть звездная область в пространстве. В силу теоремы вложения С.Л. Соболева и леммы 2.3 последовательность приближений $(v^n)_{n=1,2,...}$ с условиями из лемм 2.1 и 2.2

компактно вкладывается в пространство $C([0,T]\times\overline{\Omega})$. Пусть $(v^{n_m})_{m=1,2,...}$ - подпоследовательность, которая равномерно сходится, и

$$v(t,x)=\lim_{m\to\infty} v^{n_m}(t,x). \tag{3.1}$$

Не ограничивая общности, считаем, что подпоследовательность $(v^{n_m})_{m=1,2,...}$ сходится слабо к векторному полю v в пространстве $W_4^1([0,T]\times\Omega)$, а подпоследовательность градиентов $(\nabla P^{n_m})_{m=1,2,...}$, где функция P^n определена формулой (2.11), сходится слабо в $L_{4,4}([0,T]\times\Omega)$ к векторному полю ∇P. В силу оценки 2) леммы 2.1 можно также считать, что вторые производные $v^{n_m}_{,lj}$ сходятся слабо к $v_{,lj}$ в пространстве $L_2([0,T]\times\Omega)$. (Для вторых производных отображений v^n с подходящим сингулярным интегральным оператором T_{lj} выполняется равенство: $v^n_{,lj}=\alpha_{lj}\Delta v^n+T_{lj}(\Delta v^n)$.) Таким образом, имеем место

Лемма 3.1. *Пусть область Ω ограниченная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то векторное поле $v\in W_4^1([0,T]\times\Omega)$, имеет вторые обобщенные производные $v_{,lj}$ и удовлетворяет неравенствам:*

1) $||\nabla v||_2\le||\nabla\varphi||_2+\int_0^t||\nabla f||_2dt;$
2) $||\Delta v||_{2,2}^2\le\nu^{-1}||\nabla\varphi||_2||\nabla f||_{2,1}+\frac{1}{2\nu}(||\nabla f||_{2,1}^2+||\nabla\varphi||_2^2);$
3) $||\nabla v||_{4,4}\le C/\sqrt[4]{\nu};$
4) $||v||_2\le C(\Omega)(||\nabla\varphi||_2+\int_0^t||\nabla f||_2dt);$
5) $||\nabla D_tv||_2\le(||\nabla f(0,\cdot)||_2+||\nabla T^1||_2+\int_0^t||\nabla D_tf||_2dt)\exp(C^2\sqrt{t/\nu});$

где смешанные нормы вычислены на множестве $[0,t]\times\Omega$, константа C зависит только от T, f, φ, постоянная $C(\Omega)$ зависит только от области, $T^1(x)=\nu\Delta\varphi(x)-\varphi_l(x)\varphi_{k,l}(x)$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.3, оценок лемм 2.1 , 2.2 и полунепрерывности норм слабых пределов.

Лемма 3.2. *Пусть область Ω ограниченная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то почти всюду выполняются равенства:*

$$(D_tv,a^q)-\nu(\Delta v,a^q)+\int_\Omega v_lv_{k,l}a_k^qdx=(f,a^q),\ q=1,2\ ...,$$

где векторные поля a^q из (2.2).

Доказательство. Равенства (2.5) умножим на произвольную гладкую финитную функцию $\eta\in C_0^\infty([0,T])$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Фиксируем натуральное число q. Для всех элементов подпоследовательности $(v^{n_m})_{m=1,2,...}$, ранее выбранной, с номерами $n_m\ge q$ имеем равенства:

$$\int_0^T\eta(t)(D_tv^{n_m},a^q)dt-\nu\int_0^T\eta(t)(\Delta v^{n_m},a^q)dt+\int_0^T\int_\Omega\eta(t)v_l^{n_m}v_{k,l}^{n_m}a_k^qdxdt$$

$$= \int_0^T \eta(t)(f, a^q)dt, \ q \le n_m. \tag{3.2}$$

Равномерная сходимость последовательности $(v^{n_m})_{m=1,2,...}$ и ее слабая сходимость в пространстве $W_4^1([0,T] \times \Omega)$ обеспечивают слабую сходимость последовательности $(v_l^{n_m} v_{,l}^{n_m})_{m=1,...}$ в пространстве $L_2([0,T] \times \Omega)$. Ее слабый предел равен $v_l v_{,l}$, где v из (3.1). Поэтому предельный переход в (3.2) дает равенства:

$$\int_0^T \eta(t)(D_t v, a^q)dt - \nu \int_0^T \eta(t)(\Delta v, a^q)dt + \int_0^T \int_\Omega \eta(t) v_l v_{k,l} a_k^q dxdt = \int_0^T \eta(t)(f, a^q)dt$$

при каждом фиксированном значении q. Так как функция η выбиралась произвольным образом, то отсюда следует справедливость равенств леммы. Лемма доказана.

В силу замечания 2.1 в зависимости от выбора фундаментальной системы (ψ^k) имеет место

Следствие 3.1. *Пусть область Ω ограниченная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то для каждого соленоидального векторного поля $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ (или $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$) почти всюду на отрезке $[0,T]$ выполняется равенство:*

$$(D_t v, \Delta\psi) - \nu(\Delta v, \Delta\psi) + \int_\Omega v_l v_{k,l} \Delta\psi_k dx = (f, \Delta\psi).$$

Доказательство. Для элементов фундаментальной системы (ψ^k) равенство следует из леммы 3.2 и формулы (2.2). Для произвольного поля ψ из условия следствия требуемое равенство вытекает из определения фундаментальной системы. Следствие доказано.

Пусть

$$H = D_t v - \nu\Delta v + v_l v_{,l} - f + \nabla P, \tag{3.3}$$

где P есть слабый предел подпоследовательности функций из (2.11), существующий в силу леммы 2.4. Тогда векторное поле H - соленоидальное, как слабый предел соленоидальных полей. Покажем, что при определенных ограничениях на область Ω векторное поле H будет градиентом гармонической функции. Разложение пространств L_2 в прямую сумму градиентных и соленоидальных полей указано в [15] (см. также [16, с. 333]). Однако, приемлемое для нас разложение имеется в [2, с. 41-44] (см. также [17, с. 51]). Опираясь на это разложение, докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. *Пусть область Ω ограниченная, односвязная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то для соленоидального векторного поля H из (3.3) почти всюду на отрезке $[0,T]$ выполняется равенство $H = \nabla Q$, где функция $Q = Q(t,x)$ - гармоническая при почти каждом фиксированном значении t.*

Доказательство. Фиксируем какой-либо круг B, содержащийся в области Ω. В этом круге справедливо (см. [2, с. 41-44]) разложение: $H = \overset{\circ}{H} + \nabla Q$, где $\overset{\circ}{H}$ - соленоидальное векторное поле с носителем в этом круге, Q - локально суммируемая функция с квадратично суммируемым градиентом. Пусть функция $\xi \in C_0^\infty(B)$. Тогда имеем обращение в нуль скалярного произведения $(\nabla\xi, \nabla Q) = 0$. Следовательно, функция Q - гармоническая. С другой стороны, для произвольного соленоидального векторного поля $\psi \in C_0^\infty(B)$ из следствия 3.1 и (3.3) имеем равенство $(H, \Delta\psi) = 0$ или $(\mathring{H}, \Delta\psi) = 0$. Если поле H достаточно гладкое по x, то этой гладкостью обладает и поле $\mathring{H}$. Поэтому $(\Delta\mathring{H}, \psi) = 0$. Так как поле ψ - произвольное, то $\Delta\mathring{H} = \nabla q$ (см.цитируемый выше результат из [2, с. 41-44])). Тогда скалярное произведение $(\Delta\mathring{H}, \mathring{H}) = 0$. Применим разложение $\mathring{H}$ по собственным функциям оператора Лапласа. Отсюда выводим: $\mathring{H} = 0$.

Снимем предположение о гладкости H. Так как равенство следствия 3.1 выполняется для произвольного поля $\psi \in C_0^\infty(B)$, то оно будет выполняться и для усреднения поля H. Тогда и в этом случае, в результате предельного перехода по параметру усреднения, получаем необходимое равенство в круге B. Так как круг выбран произвольно, то, из условия односвязности области Ω, гармоническую функцию Q можно продолжить на всю область Ω.

Лемма доказана.

Уточним сейчас результат О.А. Ладыженской, касающийся решений начально-краевых задач в ограниченной области на плоскости. Уточнения касаются равномерных оценок норм в $L_2(\Omega)$ градиентов решений. Ценность такой оценки состоит в том, что она не зависит от коэффициента вязкости. Приведем и другие, более точные оценки.

Теорема 3.1. *Пусть область Ω ограниченная, односвязная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что в задаче (1.1)-(1.3) коэффициент $\nu > 0$, соленоидальное векторное поле $\varphi \in \mathring{W}_2^3(\Omega)$, соленоидальное векторное поле f удовлетворяет на отрезке $[0, T]$ условиям лемм 2.1 и 2.2 и имеет конечную смешанную норму $PfP_{2,1}$. Тогда существует единственное обобщенное решение v задачи (1.1)-(1.3), которое принадлежит пространству $W_4^1([0, T] \times \Omega)$, имеет вторые обобщенные производные $v_{,ij}$ и удовлетворяет неравенствам:*

1) $||\nabla v||_2 \le ||\nabla\varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt;$
2) $||\Delta v||_{2,2}^2 \le \nu^{-1}||\nabla\varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2\nu}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla\varphi||_2^2);$
3) $||\nabla v||_{4,4} \le C/\sqrt[4]{\nu};$
4) $||v||_2 \le ||\varphi||_2 + \int_0^t ||f||_2 dt;$
5) $||\nabla D_t v||_2 \le (||\nabla f(0,\cdot)||_2 + ||\nabla T^1||_2 + \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt)\exp(C^2\sqrt{t/\nu});$

где смешанные нормы вычислены на множестве $[0, t] \times \Omega$, векторное поле $T^1(x) = \nu\Delta\varphi(x) - \varphi_l(x)\varphi_{k,l}(x)$, константа C зависит только от T, f, φ.

Доказательство. Пусть v - слабый предел из (3.1). Тогда в силу леммы 3.3 из равенства (3.3) следует, что для $u = v$ почти всюду справедливо равенство (1.1) с функцией $p = P - Q$, где функция P из (2.11), функция Q из леммы 3.3. В силу леммы 3.1 и ее оценок векторное поле v есть слабое решение задачи (1.1)-(1.3) (см. определение в [2, с.178]).

Отметим некоторые свойства функции давления p. Для приближений v^{n_m} в ограниченной области Ω справедливо неравенство: $||D_t v^{n_m}||_2 \le C(\Omega)||\nabla D_t v^{n_m}||_2$.

Тогда оценка 2) леммы 2.2 дает относительно m и t равномерную ограниченность норм

$||D_t v^{n_m}||_2$. Отсюда для слабого предела v имеем ограниченность норм $||D_t v||_{2,2}$. Тогда из равенства (3.3) и леммы 3.3 в силу оценок леммы 3.1 следует, что градиент $\nabla(P-Q)$ принадлежит пространству $L_2([0,T]\times\Omega)$, как конечная линейная комбинация элементов этого пространства. (Принадлежность слагаемого $v_l v_{,l}$ этому пространству следует из условия $v\in W_4^1([0,T]\times\Omega)$ по лемме 3.1.) Полагаем сейчас в равенствах (1.1) $u=v$, $p=\mathrm{P}-Q$ в силу равенства (3.3) и леммы 3.3. Умножим каждое из них соответственно на координату v_k, сложим и проинтегрируем по области Ω. В результате имеем:

$$(D_t v,v)-\nu(\Delta v,v)+\int_\Omega v_l v_{k,l} v_k\,dx=(f,v)-(\nabla(P-Q),v).$$

Третье слагаемое слева и второе слагаемое справа обращаются в нуль. Скалярное произведение $(\Delta v,v)\le 0$. Поэтому из неравенства Коши-Буняковского имеем оценку: $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v||_2^2\le||f||_2||v||_2$. Отсюда интегрированием по отрезку $[0,t]$ получаем оценку 4). Остальные оценки есть оценки леммы 3.1.

Единственность решения в классе $L_{p,q}$ доказана в [18]. Единственность в классе слабых решений Лере-Хопфа в размерности $n=2$ показана в [2, с.182]. Теорема доказана.

4. Свойства решений начально-краевой задачи в ограниченной области для уравнений Эйлера

Рассмотрим сейчас начально-краевую задачу для уравнений Эйлера, т.е. ситуацию, когда в (1.1) коэффициент вязкости $\nu=0$. Опираясь на оценку 1) теоремы 3.1, энергетическое неравенство и обобщенную теорему Арцела (см. [19, с.110]), докажем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть область Ω ограниченная, односвязная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что в задаче (1.1)-(1.3) коэффициент $\nu=0$, соленоидальное векторное поле $\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$, соленоидальное векторное поле f удовлетворяет на отрезке $[0,T]$ условиям лемм 2.1 и 2.2, и его норма PfP_2 равномерно ограничена на $[0,T]$. Тогда существует обобщенное решение v^0 задачи (1.1)-(1.3), которое принадлежит пространству $L_{4,4}([0,T]\times\Omega)$, имеет обобщенные производные $v_{,i}^0$, $i=1,2$, и удовлетворяет неравенствам:*

1) $||\nabla v^0||_2\le||\nabla\varphi||_2+\int_0^t||\nabla f||_2dt$;
2) $||v^0||_2\le||\varphi||_2+\int_0^t||f||_2dt$.

Для доказательства используем следующие вспомогательные утверждения.

Пусть X и Y - два компактных метрических пространства, $C(X,Y)$ - множество всех непрерывных отображений компакта X в компакт Y. Расстояние в $C(X,Y)$ определим формулой:

$$\rho(f,g)=\sup_{t\in X}\rho(f(t),g(t)).$$

Лемма 4.1. (Обобщенная теорема Арцела [19, с. 110].) *Для относительной компактности множества $V \subset C(X,Y)$ необходимо и достаточно, чтобы входящие в V отображения были равностепенно непрерывны, т.е. чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $\rho(t_1,t_2) < \delta$ вытекает $\rho(v(t_1),v(t_2)) < \varepsilon$ каковы бы ни были v из V, t_1 и t_2 из X.*

Лемма 4.2. *Пусть v - решение задачи (1.1)-(1.3) из теоремы 3.1, где коэффициент $\nu \in (0,1]$, и нормы $PfP_2 \leq M < \infty$ для всех $t \in [0,T]$. Тогда каковы бы ни были t и $t+h$ такие, что $t, t+h \in [0,T]$, всегда выполняется неравенство: $Pv(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)P_2^2 \leq C|h|$, в котором универсальная константа $C = C(\varphi, f, T)$ не зависит от ν.*

Доказательство. Из равенства (1.1) и теоремы 3.1 выводим соотношение:

$$(D_t v(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)) - \nu(\Delta v(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)) +$$

$$+\int_\Omega v_l(t+h,x)v_{k,l}(t+h,x)(v_k(t+h,x) - v_k(t,x))dx = (f(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)).$$

Отсюда выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dh}||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_2^2 + \nu(\nabla v(t+h,\cdot), \nabla(v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot))) =$$

$$= \int_\Omega v_l(t+h,x)v_{k,l}(t+h,x)\big(v_k(t+h,x) - v_k(t,x)\big)dx =$$

$$= (f(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)). \qquad (4.1)$$

Скалярные произведения в (4.1) оценим неравенством Коши-Буняковского и оценками 1), 4) из теоремы 3.1. Тогда

$$|(\nabla v(t+h,\cdot), \nabla(v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)))| \leq 2(||\nabla\varphi||_2 + \int_0^T ||\nabla f||_2 dt)^2,$$

$$|(f(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot))| \leq 2M(||\varphi||_2 + \int_0^T ||f||_2 dt).$$

Интеграл в (4.1) обозначим символом J и оценим его неравенством Гельдера. Тогда

$$|J| \leq ||v(t+h,\cdot)||_4 ||\nabla v(t+h,\cdot)||_2 ||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_4.$$

Нормы в L_4 оценим мультипликативным неравенством из [2, с.19, лемма 1]. В результате получаем

$$||v(t+h,\cdot)||_4 \leq \sqrt{2}||v(t+h,\cdot)||_2^{1/2}||\nabla v(t+h,\cdot)||_2^{1/2},$$

$$||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_4 \leq \sqrt{2}||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_2^{1/2}||\nabla(v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot))||_2^{1/2}.$$

Применим к правым частям двух последних неравенств оценки 1) и 4) из теоремы 3.1. Тогда с некоторой постоянной $C = C(f,\varphi,T)$ имеем неравенство: $|J| \leq$

$C(f,\varphi,T)$. Принимая во внимание предыдущие оценки скалярных произведений в (4.1), из (4.1) выводим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dh}||v(t+h,\cdot)-v(t,\cdot)||_2^2 \le C_1(f,\varphi,T)(\nu+1)$$

с подходящей новой константой C_1. Интегрируем это неравенство по отрезку $[0,h]$, если $h>0$, и $[h,0]$, если $h<0$. В любом случае получаем неравенство:

$$||v(t+h,\cdot)-v(t,\cdot)||_2^2 \le C_1(f,\varphi,T)(\nu+1)|h|.$$

Учитывая условие леммы, убеждаемся в ее справедливости. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Фиксируем φ и f, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1. Пусть в задаче (1.1)-(1.3) коэффициент $\nu \in (0,1]$. Пусть v - решение задачи (1.1)-(1.3) из теоремы 3.1. При фиксированном $t\in[0,T]$ векторное поле $v(t,\cdot)\in W_2^1(\Omega)$. Из оценок 1) и 4) теоремы 3.1 следует существование константы $C=C(f,\varphi,\mathrm{T})$ такой, что $||v(t,\cdot)||_2 \le C$, $||\nabla v(t,\cdot)||_2 \le C$ при всех $t\in[0,T]$. Следовательно, множество Y всех таких полей $v(t,\cdot)$ ограничено в пространстве $W_2^1(\Omega)$. По теореме вложения Соболева-Кондрашева [13, с.83] множество Y компактно вкладывается в любое пространство $L_q(\Omega)$ с показателем $2\le q<\infty$. Возьмем показатель $q=2$. Пусть $X=[0,T]$. Тогда отображения $t\to v(t,\cdot)$ есть непрерывные отображения множества X в множество Y по лемме 4.2. Более того, семейство отображений $\{v(t,\cdot)\}_{0<\nu\le 1}$ равномерно и равностепенно непрерывно по лемме 4.2. Тогда по лемме 4.1 это семейство является относительно компактным в метрике

$$\rho(f,g)=\sup_{t\in[0,T]}||(f(t,\cdot)-g(t,\cdot)||_2. \tag{4.2}$$

Таким образом, из последовательности решений $(v^n)_{n=1,2,\dots}$ задачи (1.1)-(1.3), каждое из которых соответствует коэффициенту $\nu_n=1/n$, можно извлечь равномерно сходящуюся относительно этой метрики подпоследовательность $(v^{n_k})_{k=1,2,\dots}$. Пусть

$$v^0=\lim_{k\to\infty}v^{n_k}.$$

Тогда, учитывая полунепрерывность норм, из оценок 1)и 4) теоремы 3.1 выводим неравенства:

$$||\nabla v^0||_2 \le ||\nabla\varphi||_2+\int_0^t||\nabla f||_2dt,\quad ||v^0||_2\le||\varphi||_2+\int_0^t||f||_2dt. \tag{4.3}$$

Покажем, что v^0 - слабое решение уравнений Эйлера. Векторные поля v^{n_k} - есть решения задачи (1.1)-(1.3). Поэтому справедливы интегральные тождества:

$$\int_0^T\int_\Omega \mathrm{v}_l^{n_k}D_t\xi_l dxdt-\frac{1}{n_k}\int_0^T\int_\Omega\nabla v_l^{n_k}\nabla\xi_l dxdt+\int_0^T\int_\Omega v_l^{n_k}v_j^{n_k}\xi_{j,l}dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\varphi_l(x)\xi_l(0,x)dxdt,\ k=1,\dots,$$

где $\xi=\xi(t,x)$ - произвольное гладкое соленоидальное поле, которое обращается в нуль на границе области Ω и при $t\ge T$. Так как $\rho(v^{n_k},v^0)\to 0$ (см. (4.2)), когда

$k \to \infty$, то предельный переход в последнем равенстве в силу оценок (4.3) дает интегральное тождество:

$$\int_0^T \int_\Omega v_l^0 D_t \xi_l dxdt + \int_0^T \int_\Omega v_l^0 v_j^0 \xi_{j,l} dxdt = \int_0^T \int_\Omega \varphi_l(x) \xi_l(0,x) dxdt.$$

Следовательно, v^0 - слабое решение. Оно удовлетворяет нулевому граничному условию в обобщенном смысле, поскольку $v^n|_{\partial\Omega} = 0$, и, отображения v^n непрерывные. Векторное поле v^0 удовлетворяет начальному условию: $||v^0(t,\cdot) - \varphi||_2 \to 0$, если $t \to 0$. Это следует из равномерной и равностепенной непрерывности в среднем (см. лемму 4.2) множества полей $\{v(t,\cdot)\}_{0<v\le 1}$ и непрерывности решений v. Наконец, из мультипликативного неравенства [2, с.19, лемма 1] и (4.3) имеем равномерную относительно t оценку:

$$||v^0(t,\cdot)||_4 \le \sqrt{2}||v^0(t,\cdot)||_2^{1/2}||\nabla v^0(t,\cdot)||_2^{1/2} \le C(f,\varphi,T).$$

Отсюда получаем включение $v^0 \in L_{4,4}([0,T] \times \Omega)$. Вместе с оценками (4.3) имеем утверждение теоремы. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. На самом деле слабое решение v^0 имеет равномерно ограниченные нормы $||v^0||_p$ относительно $t \in [0,T]$ при любом конечном значении показателя $p \ge 2$, что является следствием общего мультипликативного неравенства (см. [21, с. 80-84])

$$||v^0||_p \le \beta||v^0||_2^{1-\alpha}||\nabla v^0||_2^\alpha$$

и равномерных оценок (4.3).

6. Заключительные замечания

В размерностях $n \ge 3$ имеем принципиально иную ситуацию, на которую влияет существенным образом интеграл

$$\int_\Omega u_l u_{k,l} \Delta u_k dx,$$

который может быть отличным от нуля (см. следствие 1.1). Его влияние на свойства решений уравнений Навье-Стокса и явление турбулентности в пространстве рассматривалось автором в [4, 22, 23]. По мнению автора с помощью интеграла $\int_\Omega \varphi_l \varphi_{k,l} \Delta\varphi_k dx$ для начальной скорости можно действительно изучить свойства решений уравнений Эйлера в пространстве и некоторые физические особенности идеальной жидкости.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Решение "в целом" краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных// ДАН СССР. 1958.Т. 123. С.427-429.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд. второе. - М: Наука, 1970.
3. Киселев А.А., Ладыженская О.А. О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т.21. С. 655-680.
4. Семенов В.И. О свойстве гладкости решений уравнений Навье - Стокса в нелинейной нестационарной задаче Коши в пространстве. Препринт. Кемерово: Кузбассвузиздат, 2007, с.1-40.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.:Мир. 1973.
6. Решетняк Ю.Г. Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром// Сиб.мат.журн. 1970. Т.11. №3. С.414-428.

7. Семенов В.И. Квазиконформные потоки в пространствах Мебиуса//Мат. сборник. 1982. Т.119(161). №3. С.325-339.

8. Семенов В.И. Полугруппы некоторых классов отображений//Сиб. мат. журн. 1977. Т.18,№4. С. 877-889.

9. Семенов В.И. Об однопараметрических группах квазиконформных гомеоморфизмов в эвклидовом пространстве//Сиб. мат. журн. 1976. Т.17,№1. С. 177-193.

10. Доброхотов М.Ю., Шафаревич А.И. О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. №4. С.38-42.

11. Brandolese L. On the localisation of symmetric and asymetric solutions of the Navier-Stokes equations in R^n// Comp. Rend. Acad. Sci. ||aris. Ser. I. 2001. V.332. P.125-130.

12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973.

13. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. 1962.

14. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.-М.:Наука, 1983.

15. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики//Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1954. Т.18.№1, С.3-50.

16. Соболев С.Л. Избранные труды. Т.1.-Новосибирск: Изд-во Института математики, 2003.

17. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость//УМН. 2003. Т.58. №2. С. 45-78.

18. Ладыженская О.А. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса// Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т.5. С. 169-185.

19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1968.

20. Пухначев В.В. Интегралы движения несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство// Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т.45. №2. С.22-27.

21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.-М.: Наука, 1967.

22. Семенов В.И. Необходимые и достаточные условия существования в целом гладких решений уравнений Навье - Стокса в нелинейной нестационарной задаче Коши в пространстве//(в печати).

23. Семенов В.И. Детерминизм динамики жидкости и уравнения Навье-Стокса//(в печати).

24. Prodi G. Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes// Annali di Mat. 1959. V.48. P. 173-182.

25. Serrin J. The initial value problem for the Navier-Stokes equations// Nonlinear Problems/ ed. R.Langer. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1963. P.69-98.

GENERAL PROPERTIES OF SOLENOIDAL VECTOR FIELDS AND ITS APPLICATIONS TO 2ND EULER AND NAVIER-STOKES EQUATIONS

V.I. SEMENOV

Kuzbass regional institute of professional formation development

e-mail: visemenov@rambler.ru

There are proved important integral identities for solenoidal vector fields. These statements give a new standpoint on a priori estimate that O. Ladyzhenskaya proved. In particular, we have a priori estimate independent of a viscosity and the existence of global solutions for the Euler equations. Why is no there of a turbulence phenomenon for the 2d case? This fact shows one of proving identities. Other identities can be used in conservation laws.

Key words: integral identities, global solution, a priori estimate, stresses tensor, Navier-Stokes and Euler equations.