УДК 513.731, 514.752

О СФЕРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ $V_p \subset E_{p+2}$

В.А.ЕСИН

Белгородский государственный университет

e-mail: esin@bsu.edu.ru

В работе рассматривается сферическое отображение поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта данной нормали и распределение, инвариантно связанное с таким отображением.

Ключевые слова: сферическое отображние, аффинная связность.

Присоединим к поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ подвижной репер

$$R = (x, e_i, e_\alpha), \qquad (i, j.k = 1,..., p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2)$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ в точке $x \in V_p$, а векторы e_α образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta \tag{1.1}$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений поверхности, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \, (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha) \tag{1.2}$$

где b_{ij}^α – второй основной тензор поверхности. Функции $\gamma_{ij} = e_i e_j$ – компоненты метрического тензора, γ^{ij} – контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k, \quad d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\omega_k^j - \gamma^{jk}\omega_k^i \tag{1.3}$$

Дифференцирование тождеств $e_i e_\alpha = 0$ и $e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ приводит к соотношениям

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0 \tag{1.4}$$

Пусть на $V_p \subset E_{p+2}$ задано поле нормальных векторов n. Орт e_{p+2} репера направим по n,тогда форма ω_{p+1}^{p+2} будет главной [1]:

$$\omega_{p+1}^{p+2} = c_i \omega^i \tag{1.5}$$

а величины b_{ij}^{p+1}, b_{ij}^{p+2} будут координатами двухвалентных тензоров.

Ковектор c_i задает распределение, которое обозначим Δ_{p-1}

Рассмотрим гиперсферическое изображение $\bar{V}_p$ поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта e_{p+2} данной нормали. Имеем

$$de_{p+2} = \omega^i_{p+2} e_i + \omega^{p+1}_{p+2} e_{p+1} = (-\gamma^{ij} b^{p+2}_{jk} e_i + c_k e_{p+1})\omega^k = b_k \omega^k$$

где b_k – векторы, касательные к линиям ω^k гиперсферического изображения $\bar{V}_p$. Векторы $b_{p+2} = e_{p+2}$, $b_{p+1} = c_i b^{ij}_{p+2} e_j + e_{p+1}$ образуют ортогональный базис нормальной плоскости гиперсферического изображения $\bar{V}_p$ (здесь $b^{ij}_{p+2} b^{p+2}_{jk} = \delta^i_k$). Таким образом, на поверхности возникает векторное поле $\xi_{p+2} = c_i b^{ik}_{p+2} e_k$. Аналогично можно рассмотреть векторное поле $\xi_{p+1} = c_i b^{ik}_{p+1} e_k$.

Пусть $a_\alpha = e_\alpha + \xi_\alpha$. Плоскость, натянутую на векторы a_α, обозначим $\overline{N}_2(x)$ (оснащение $\overline{N}_2(x)$).

Отнесем поверхность $\bar{V}_p \subset E_{p+2}$ к реперу $\bar{R} = (x, e_i, a_\alpha)$. В этом репере

$$de_i = \theta^j_i e_j + \theta^\alpha_i a_\alpha = (\theta^j_i + \theta^\alpha_i c_k b^{kj}_{p+1}) e_j + \theta^\alpha_i e_\alpha \qquad (1.6)$$

С другой стороны в репере R

$$de_i = \omega^j_i e_j + \omega^\alpha_i e_\alpha \qquad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) в частности следует, что

$$\theta^j_i = \omega^j_i - \omega^\alpha_i c_k b^{kj}_\alpha = \omega^j_i - b^\alpha_{it} c_k b^{kj}_\alpha \omega^t. \qquad (1.8)$$

Связность на V_p, индуцируемая оснащением $\bar{N}_2(x)$ будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда $D\theta^i_i = 0$ [3]. С учетом (1.8) это приводит к равенству

$$D(b^\alpha_{it} b^{ki}_\alpha c_k \omega^t) = D(2c_t \omega^t) = 0 \qquad (1.9)$$

Но (1.9) означает интегрируемость распределения Δ_{p-1}. Таким образом справедлива

Теорема. *Аффинная связность на $V_p \subset E_{p+2}$, индуцируемая оснащением $\bar{N}_2(x)$, будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда распределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо.*

Для поверхности $V_2 \subset E_4$, отнесенной к сопряженной сети ($b^3_{12} = b^4_{12} = 0$) имеем

$$\xi_3 = c_1 b_3^{11} e_1 + c_2 b_3^{22} e_2 = \frac{c_1}{b_{11}^3} e_1 + \frac{c_2}{b_{22}^3} e_2, \quad \xi_4 = c_1 b_4^{11} e_1 + c_2 b_4^{22} e_2 = \frac{c_1}{b_{11}^4} e_1 + \frac{c_2}{b_{22}^4} e_2$$

Векторные поля ξ_3 и ξ_4 задают на V_2 сеть (ξ_3, ξ_4). Тогда сложное отношение

$$W = (\xi_3, \xi_4, e_1, e_2) = \frac{b_{11}^3 b_{22}^4}{b_{22}^3 b_{11}^4}$$

Ясно, что W=-1 тогда и только тогда, когда

$$b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{22}^3 b_{11}^4 = 0 \tag{1.10}$$

Но (1.10) означает, что e_3 и e_4 являются главными направлениями присоединенной кривой [4] поверхности $V_2 \subset E_4$. Таким образом, справедлива

Теорема. *Сеть (ξ_3, ξ_4) будет гармонической для сопряженной сети поверхности $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда, когда векторы e_3, e_4 имеют главные направления относительно присоединенной кривой.*

Список литературы

1. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий.- М., Высшая школа, 1989, 222с.
2. Есин В.А. К геометрии распределений на $V_p \subset E_{p+2}$. Тезисы сообщений 9 всесоюзной геометрической конференции. Кишинев, 1988, с.112-113.
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности.- М., Наука, 1976, 432с.
4. Фаликова И.Д. О некоторых сетях на поверхности V_2 в E_4. Ученые записки МГПИ, Москва, 1977, с197-211.

ABOUT SPHERICAL MAPPING OF THE $V_p \subset E_{p+2}$ SURFACE

V.A.ESIN

Belgorod State University

e-mail: esin@bsu.edu.ru

In this work a spherical mapping of the $V_p \subset E_{p+2}$ surface is considered by mean its unit normal vector and distribution invariantly related with this mapping.

Key words: spherical mapping, affine connectivity.