

ОЦЕНКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕЙВЛЕТОВ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ В КОГЕРЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВИХРЯ

А.М. Логвинов, Ю.Е. Поленова, Г.А. Травин

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, пр. Победы, 85
pruslan@list.ru

Цель этого исследования заключается в оценке использования биортогонального вейвлет-преобразования второго поколения для пространственного разложения в когерентном моделировании вихря турбулентных течений. Свойства биортогонального вейвлет-преобразования второго поколения и ортогонального вейвлет-преобразования Добеши с тем же самым числом вырожденных моментов сравниваются в априорных тестах, используя прямое спектральное численное моделирование (ПСЧМ) на базе данных изотропных областей турбулентности: 256^3 и 512^3 ПСЧМ сильной гомогенной турбулентности ($Re_\lambda = 168$) и 256^3 и 512^3 ПСЧМ затихающей гомогенной турбулентности ($Re_\lambda = 55$). Определено, что биортогональное вейвлет-преобразование второго поколения может использоваться для последовательного извлечения вихря. Результаты априорных тестов показали, что вейвлеты второго поколения обладают лучшим сжатием с остаточной областью близкой к гауссовой. Однако было найдено, что использование вейвлетов второго поколения приводит к совокупной длине масштаба для некогерентной части, большей чем при использовании ортогональных вейвлетов. Предложен способ преодоления этой трудности.

Ключевые слова: биортогональные вейвлет-преобразования, вейвлет-преобразования Добеши, вихрь, априорные тесты.

Введение

Новый адаптивный метод коллокации вейвлетами второго поколения для ПСЧМ турбулентных течений был развит в 2000-м году Васильевым, Бауманом и другими учеными [8, 12]. Адаптивный метод коллокации вейвлетами подходит для больших чисел турбулентности Рэйнолда, что делает вейвлеты (которые ограничены в пространстве и масштабе) естественными кандидатами для решения этих задач, поскольку они адаптируют числовое разрешение прерывистой структуры турбулентности в мелких масштабах. Следовательно, метод вейвлетов позволяет вычислять турбулентные течения с очень сокращенным количеством мод с небольшой потерей точности. Кроме того, вычислительные затраты алгоритма независимы от размерности задачи и составляют $O(N)$, где N — общее число точек коллокации фактически используемых в моделировании.

Эффективность адаптивного метода коллокации вейвлетами может быть значительно увеличена путем комбинирования его с недавно развитым подходом когерентного моделирования вихря (КМВ) [5], который тесно связан со стандартным методом моделирования большого вихря (МБВ). В отличие от МБВ, в котором скоростная область делится на большие и небольшие области, в КМВ скоростная область анализируется в когерентных (отфильтрованных) и некогерентных (остаточных) областях. Отфильтрованные масштабы, представляющие когерентную негауссову часть потока, получают в цифровой форме из фильтрующего уравнения движения турбулентности, в то время как результат остаточных масштабов, которые представляют некогерентную гауссову часть потока, нуждается в моделировании. Успех применения КМВ зависит от того, насколько близка остаточная область к гауссову белому шуму и как много степеней свободы требуется для представления отфильтрованной области. В 1993 г. Донохо показал, что пороговая обработка коэффициентов вейвлетов представляет со-

бой оптимальный метод для отделения гауссова белого шума от сигнала. Таким образом, может быть проведена фильтрация в области вейвлетов пороговой обработкой их коэффициентов, которую можно рассматривать как нелинейную фильтрацию в зависимости от каждой реализации потока. Такая фильтрация вейвлетами достигается выполнением следующих шагов:

1. Выполнение прямого вейвлет-преобразования от ω .
2. Обнуление коэффициентов вейвлетов, амплитуда которых ниже заданного априорно порога, т.е. $\|\tilde{\omega}\|_2 \leq \varepsilon$, где $\tilde{\omega}$ — вейвлет-преобразование от ω .
3. Применение обратного вейвлет-преобразования.

В результате этой операции отфильтрованная область турбулентности может быть представлена небольшим числом коэффициентов вейвлетов. Ожидаемые преимущества КМВ по описанному методу заключаются, во-первых, в использовании вейвлет-базисов для значительного сжатия области турбулентности, требующей моделирования только малой части степеней свободы (те, которые содержат существенное количество энергии и энтропии), и во-вторых, можно по-видимому смоделировать исключаемые степени свободы более точно, чем в МБВ, так как они ближе к гауссову белому шуму чем получаемые из линейных низкочастотных фильтров МБВ. Первая работа [5], посвященная двумерному КМВ, демонстрирует его существенный потенциал. Ожидается, что применение КМВ к трехмерным турбулентным течениям по рассмотренным в работе методам, обеспечит существенное увеличение скорости вычислений и точности.

Конечная цель нашей работы состоит в развитии трехмерного КМВ, пригодного для моделирования реальных научных и технических задач в комплексной области. Будет использован адаптивный вычислитель коллокации вейвлетами для решения в цифровой форме уравнения КМВ на адаптивной сетке. Адаптивный вычислитель коллокации вейвлетами использует второе поколение биортогональных вейвлетов, что позволяет решать задачи в комплексной области. Было бы логично использовать те же самые вейвлеты, как для фильтрации области турбулентности, так и для вычислителя коллокации вейвлетами. Однако использование биортогональных вейвлетов второго поколения для извлечения когерентной области не исследовано до сих пор. Поэтому, цель этого исследования состоит в том, чтобы исследовать в априорных тестах использование этих вейвлетов только для фильтрации области турбулентности для когерентного извлечения вихря.

Вейвлеты второго поколения

Вейвлеты представляют собой базисные функции, ограниченные, как в физическом пространстве (благодаря конечному носителю), так и в спектральном (например, как на рис. 1). Напротив, преобразование Фурье, основанное на функциях синус и косинус, хорошо ограничено в частотной области, но не обеспечивает локализацию в физическом пространстве из-за глобальности его носителя. Благодаря локализации пространство/масштаб вейвлет-преобразование обеспечивает, как пространственную, так и масштабную (частотную) информацию, в то время как преобразование Фурье предоставляет только информацию о частоте.

Хотя вейвлет-преобразование с его локализацией пространство/масштаб представляет собой привлекательный метод для решения задач с ограниченными структурами, такими как моделирование турбулентных течений, традиционное вейвлет-преобразование имеет сложности, связанными с краевыми эффектами. Традиционно вейвлеты ψ_k^l определяются как смещения и расширения одного материнского вейвлета

ψ , т.е. $\psi_k^j = \psi_k^j(x) = \psi(2^j x - k)$. Такие вейвлеты первого поколения определены или в бесконечных или в периодических областях [3, 9].

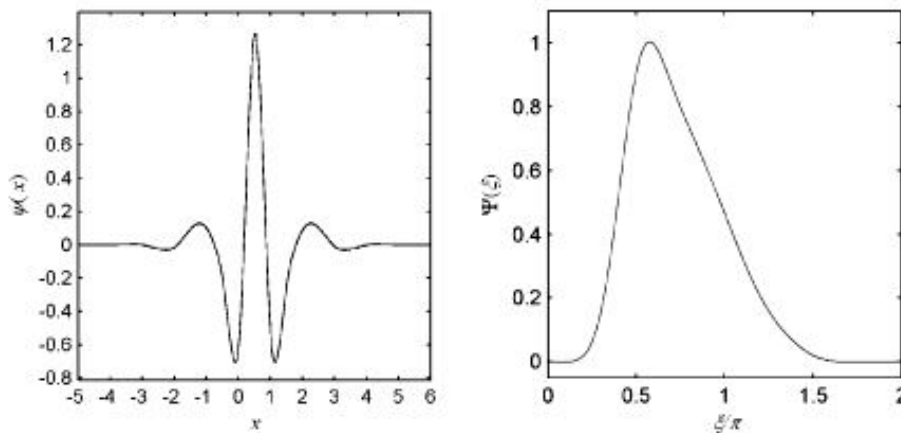


Рис. 1. Смещенный интерполирующий вейвлет ψ и его преобразование Фурье $\Psi(\xi)$

Вейвлеты второго поколения, введенные в [10, 11], являются обобщением вейвлетов первого поколения и предоставляют необходимую свободу при работе с комплексной геометрией, произвольными граничными условиями, и нерегулярными интервалами осуществления выборки. Вейвлеты второго поколения формируют базис Риса для некоторого пространства функций, локальны в пространственной и частотной областях, часто имеют много полиномиальных вырожденных моментов, но не имеют понятий задержки и расширения в отличие от вейвлетов первого поколения. Несмотря на потерю этих двух фундаментальных свойств базисов вейвлетов, вейвлеты второго поколения сохраняют многие полезные свойства вейвлетов первого поколения, включая быстрое $O(N)$ преобразование.

Построение вейвлетов второго поколения основано на схеме подъема, подробно описанной в [10, 11]. Здесь мы только укажем главные их:

1. Вейвлеты построены в пространственной области и могут быть по желанию разработаны для комплексных многомерных областей и нерегулярных интервалов осуществления выборки.
2. Не требуется никакой внешней памяти, и исходный сигнал может быть заменен его вейвлет-преобразованием.
3. Вейвлет-преобразование второго поколения по степени два работает быстрее вейвлетов первого поколения.
4. Обратное вейвлет-преобразование по схеме подъема осуществляется просто изменением направления операций с переменной вычитания и сложения.
5. Программирование алгоритмов вейвлет-преобразования значительно проще.
6. Вейвлеты второго поколения являются естественно подходящими для методов коллокации вейвлетами, превосходя вейвлет-подход Галеркина при обработке общих граничных условий и нелинейностях в уравнениях.

В этом исследовании мы использовали ряд вейвлетов второго поколения по методу, известному в литературе как интерполяционный подъем (ИП) или вейвлеты Донохо [10, 12]. В частности, были проведены априорные тесты с использованием вейвлет-интерполяции по схеме подъема, обозначаемой далее ИПЗ, имеющей пять полиномиальных вырожденных моментов. Вейвлет ИПЗ и его Фурье-преобразование показаны на рис. 1. Более всестороннее рассмотрение разработки вейвлетов этого класса можно найти в [10, 11, 12].



Когерентное моделирование вихря

В КМВ область турбулентности разделяется на две части с использованием пороговой фильтрации вейвлетами:

$$\omega = \omega_s + \omega_z, \quad (1)$$

где ω_s — отфильтрованная часть потока, определенного на адаптивной сетке; ω_z — область локализованных остаточных масштабов (ЛОМ), приведенная к гауссову белому шуму насколько возможно. Термин «локализованные остаточные масштабы» используется с целью подчеркнуть тот факт, что нет никакого конкретного масштаба, связанного с остаточной областью, т.е. спектральное содержимое ЛОМ изменяется во времени и по положению в отличие от гомогенного потока МБВ.

Формулирование КМВ начинается с уравнения движения турбулентности:

$$\frac{d\omega}{dt} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega + (\omega \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nu \nabla^2 \omega. \quad (2)$$

Аналогично МБВ после применения вейвлет-фильтра мы получаем следующее уравнение КМВ, описывающее развитие отфильтрованной области:

$$\frac{d\omega_s}{dt} = -(\mathbf{V}_s \cdot \nabla)\omega_s + (\omega_s \cdot \nabla)\mathbf{V}_s + \nu \nabla^2 \omega_s + \mathbf{f}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{f} = [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega]_s - [(\omega \cdot \nabla)\mathbf{V}]_s - (\mathbf{V}_s \cdot \nabla)\omega_s + (\omega_s \cdot \nabla)\mathbf{V}_s \quad (4)$$

представляет собой ЛОМ, которые должны быть смоделированы. Локализованную природу ЛОМ необходимо рассмотреть в определении моделей остаточного масштаба для использования с КМВ. Было показано, что когда нелинейный фильтр пороговой вейвлет-обработки применяется к изотропной области турбулентности с относительно большим числом Рейнольда, остаточная область статистически ближе к гауссовой, чем при использовании отсекающего Фурье-фильтра с тем же самым числом степеней свободы. Это было показано в [5] для двумерного случая, а мы далее покажем это для трехмерного случая. Таким образом ожидается, что ЛОМ могут быть смоделированы более точно чем при фильтрации Фурье, но это не было доказано и является темой последующих исследований.

Решение уравнения фильтрации турбулентности на адаптивной сетке может быть получено с использованием любого соответствующего метода решения. Двумерный метод КМВ реализован в [5] с использованием адаптивного алгоритма вейвлет-неопределенности [6]. В нашей работе мы осуществили трехмерный метод КМВ, используя адаптивный метод коллокации вейвлетами, описанный в [12], который, как было показано в указанной работе, хорошо работает в двумерных потоках и может быть расширен на трехмерный случай с небольшой модификацией. Этот вычислитель использует биортогональные ИП вейвлеты второго поколения, обсуждавшиеся выше, и пригоден для решения задач в комплексной области.

Адаптивный метод коллокации вейвлетами идеально подходит для КМВ турбулентных течений, так как каждый вейвлет однозначно связан с точкой коллокации. Таким образом, адаптация сетки может быть основана на том же самом критерии как в когерентном извлечении вихря, т.е. в любой момент времени вычислительная сетка состоит из точек, соответствующих вейвлетам, коэффициенты которых выше оптимального порога КМВ, а точки коллокации, коэффициенты вейвлетов которых при

операции вейвлет-фильтрации были обнулены, не сохраняются. С такой стратегией адаптации решение получается на сетке, которая «отслеживает» когерентные вихри.

Метод КМВ требует, по крайней мере, двух основных операций на каждом временном шаге:

1. Применение пороговой вейвлет-фильтрации для определения адаптивной сетки.
2. Нахождение численными методами решения уравнения (3) на адаптивной сетке.

Использование одинаковых вейвлетов на этих двух шагах было бы наиболее эффективно с точки зрения вычислений. Это является причиной нашего интереса к исследованию использования биортогональных вейвлетов второго поколения для когерентного извлечения вихря.

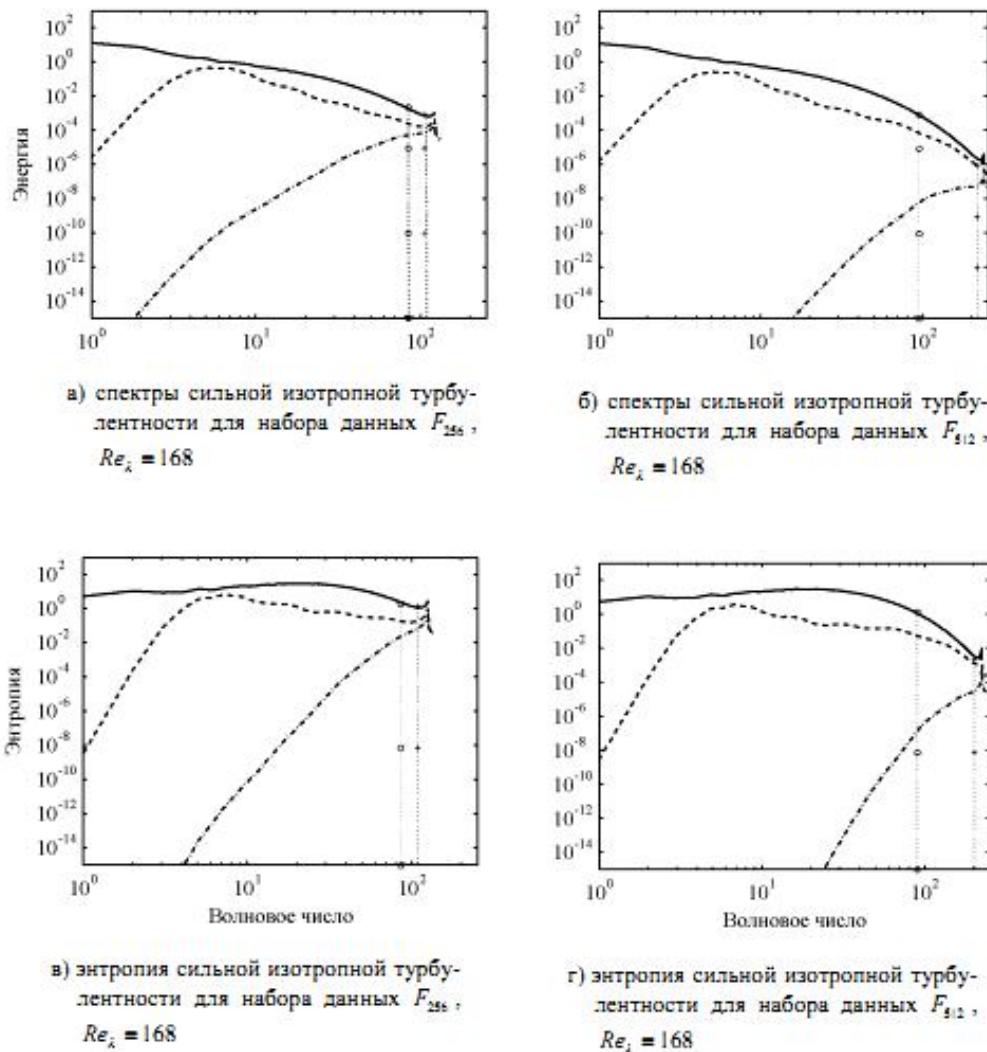


Рис. 2. Спектры энергии и энтропии сильной гомогенной турбулентности для наборов данных F_{256} и F_{512} . Спектр всей области: (—). Спектр области ЛОМ после оптимального сжатия вейвлетом DW6: (—) и ИПЗ: (----). Отсекающий фильтр Фурье со сжатием, эквивалентным оптимальному вейвлет-фильтру DW6: (-+--+), и оптимальному вейвлет-фильтру ИПЗ (---o---)

Хотя в этой статье мы не обсуждаем решение уравнения фильтрации турбулентностей вейвлетами (3), хотелось бы указать, что, так как уравнения КМВ решаются на

адаптивной сетке, мы не можем использовать спектральные методы решения уравнения Пуассона, связывающее область турбулентности со скоростной областью. Развитие эффективного, основанного на коллокации вейвлетами, метода решения уравнения Пуассона на адаптивной сетке в настоящее время является предметом исследования.

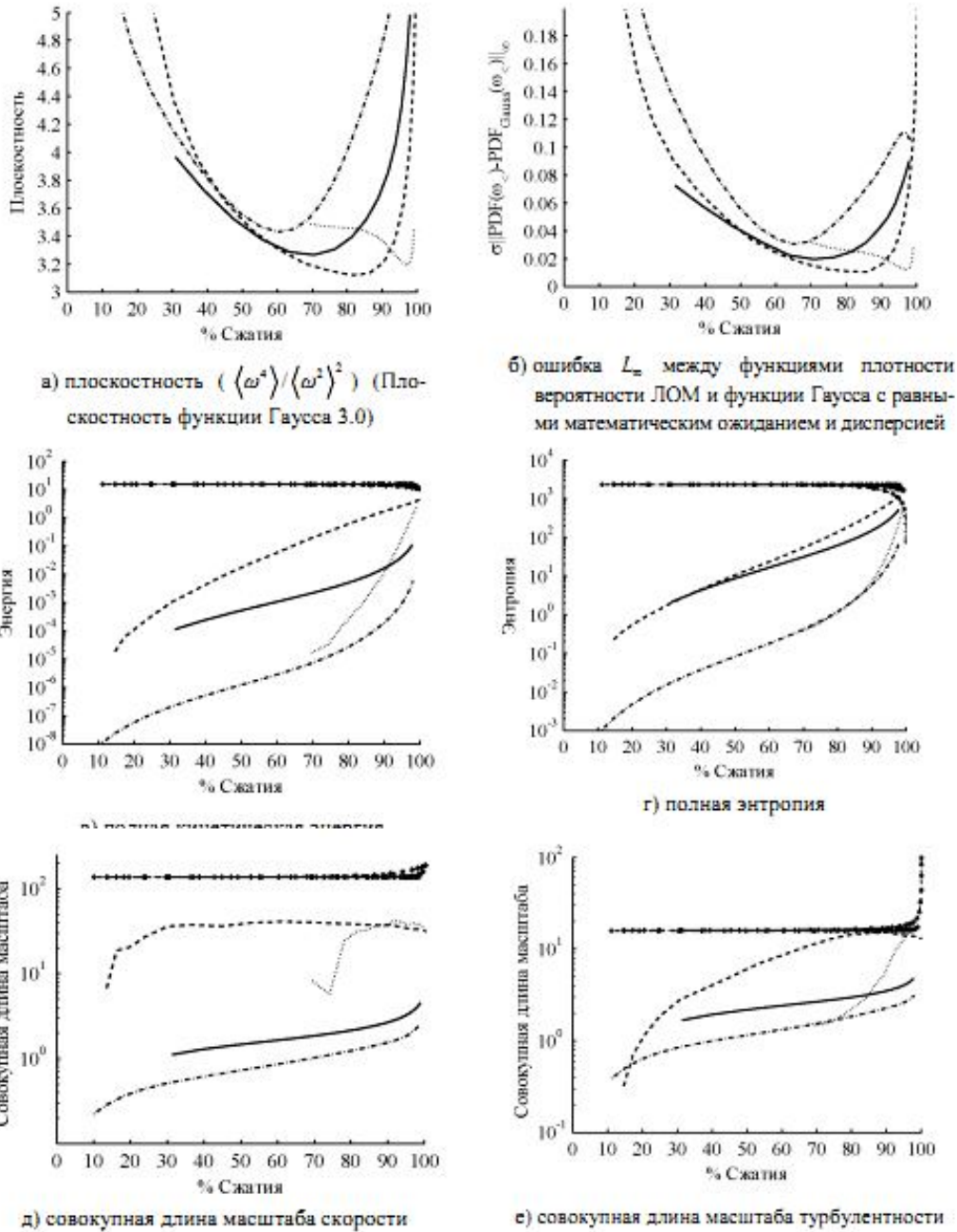


Рис. 3. Статистика отфильтрованных и ЛОМ областей для изотропных турбулентных областей с F_{256} и F_{512} после пороговой фильтрации вейвлетами ИПЗ и DV6. Статистика ЛОМ области F_{256} после обработки вейвлетами DV6 для: (—) и ИПЗ: (----). Статистика ЛОМ области F_{512} после обработки вейвлетами DV6 для: (—) и ИПЗ: (.....). На графиках в–е линии с (+) — те же статистики для отфильтрованных областей

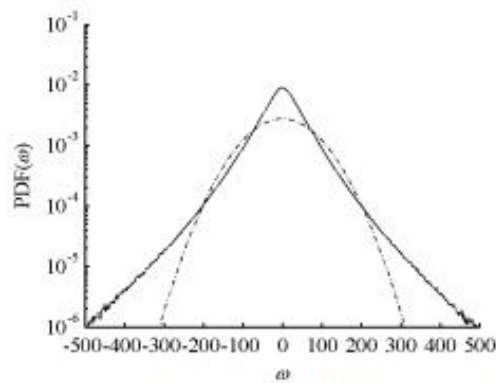
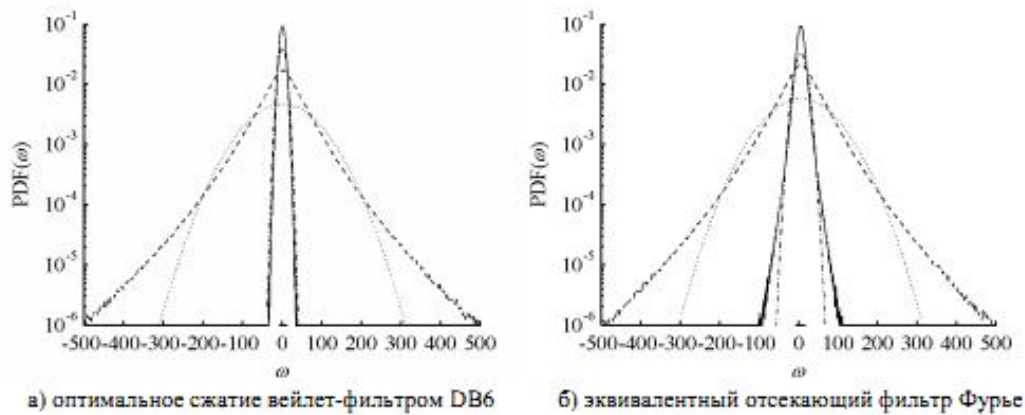
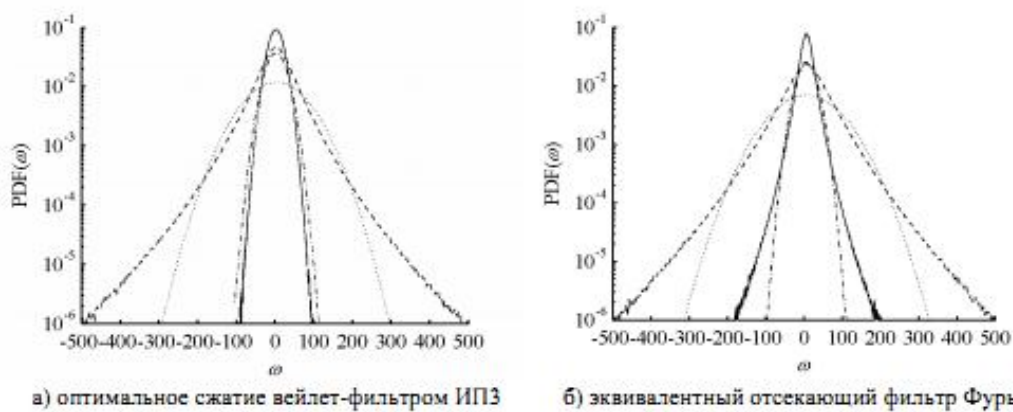


Рис. 4. Функция распределения вероятности, $PDF(\omega)$, для сильной изотропной турбулентности F_{256} : (—). Гауссова функция распределения вероятности с тем же математическим ожиданием и дисперсией (---)



а) оптимальное сжатие вейлет-фильтром DB6 б) эквивалентный отсекающий фильтр Фурье

Рис. 5. Функция распределения вероятности для области сильной изотропной турбулентности F_{256} при сжатии 50% вейвлетами DB6 и отсекающего фильтра Фурье для эквивалентного сжатия. Отфильтрованная область: (---) и связанная с ней гауссова: (.....). Область ЛОМ: (—) и связанная с ней гауссова: (-.-.-).



а) оптимальное сжатие вейлет-фильтром ИП3 б) эквивалентный отсекающий фильтр Фурье

Рис. 6. Функция распределения вероятности для области сильной изотропной турбулентности F_{256} при сжатии 86% вейвлетами ИП3 и отсекающего фильтра Фурье для эквивалентного сжатия. Отфильтрованная область: (---) и связанная с ней гауссова: (.....). Область ЛОМ: (—) и связанная с ней гауссова: (-.-.-).

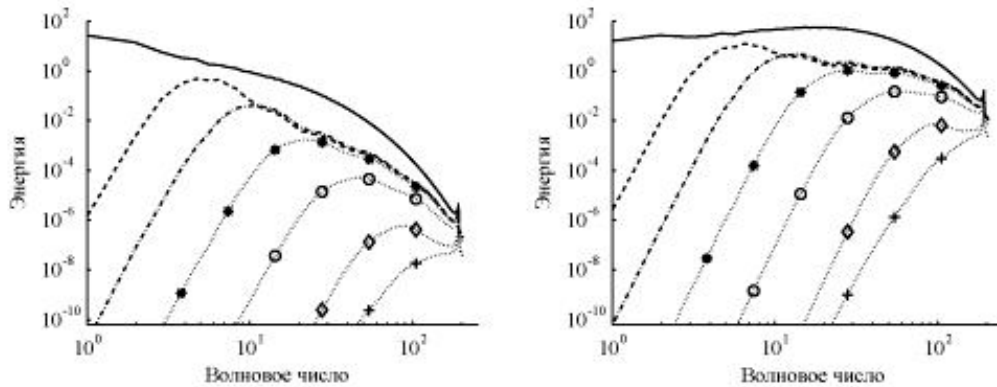


Рис. 7. Спектры энергии и энтропии для сильной изотропной турбулентности набора данных F_{512} , $Re_\lambda = 168$. Спектр всей области: (—). Спектр области ЛОМ после оптимальной декомпозиции вейвлетами DB6 с 6 уровнями (---). Другие кривые соответствуют спектрам области ЛОМ после оптимальной декомпозиции вейвлетами ИП3 для различных уровней разложения. 2 уровня: (··φ·); 3 уровня: (··□·); 4 уровня: (··*·); 5 уровней: (—); 6 уровней: (---)

Полученные результаты

Для использования метода КМВ мы хотим найти оптимальное значение ε таким образом, чтобы декомпозиция области турбулентности вейвлет-фильтра в отфильтрованную область содержала все когерентные вихри со значительной энергией и области ЛОМ, которые так близки к гауссову белому шуму насколько возможно. Один способ найти оптимальное значение ε заключается в использовании теоремы шумоподавления Донохо [4], которая утверждает, что, если в области турбулентности присутствует компонент гауссова шума, и известна его дисперсия, можно найти это значение пороговой обработкой ортогональными вейвлетами. Теорема шумоподавления Донохо гласит, что порог, необходимый для извлечения компоненты гауссова белого шума, равен $\varepsilon_{\text{Donoho}} = \sqrt{2\sigma^2 \log(N)}$, где σ^2 — дисперсия гауссова белого шума, а N — число точек области. Однако, дисперсия компоненты гауссова белого шума области турбулентности не известна. Один из способов найти максимально подобную гауссовой области ЛОМ заключается в выполнении итераций $\varepsilon_{n+1} = \sqrt{2\sigma_n^2 \log(N)}$, где σ_n^2 — дисперсия, определяемая по всей области [5]. Если в ней существует область ЛОМ, которая является гауссовым белым шумом, то итерационный процесс должен сходиться к $\varepsilon_{\text{Donoho}}$. Однако, так как теорема Донохо не относится непосредственно к биортогональным вейвлетам, необходимо найти другой способ определения оптимального ε .

Чтобы доказать существование оптимального значения ε для вейвлетов второго поколения и, возможно, найти эффективный способ его определения, был выполнен ряд параметрических исследований с изменением ε , чтобы достигнуть диапазона сжатия от 0% до 100%. Результаты для биортогонального (ИП) вейвлета второго поколения сравнивались с ортогональным вейвлетом Добеши DB6 [2]. У обоих вейвлетов есть пять вырожденных моментов и эффективная длина фильтра 12. Мы выполнили эти параметрические исследования, используя несколько сильных и затихающих изотропных областей турбулентности из базы данных спектрального ПСЧМ. Детально будут представлены только две соответствующие ограниченные области, представляющие области сильной изотропной турбулентности, — F_{256} и F_{512} ($Re_\lambda = 168$). Мы также рассмотрим две об-

ласти затихающей изотропной турбулентности,— CBC_{256} и CBC_{512} ($Re_\lambda = 55$). Подробную информацию об этих наборах данных можно найти в [7].

Энергия и энтропия спектров наборов данных F_{256} и F_{512} приведены на рис. 2. Рис. 3 отражает различные статистические величины (как функции сжатия) отфильтрованных и ЛОМ областей после пороговой обработки вейвлетами DB6 и ИПЗ. Мы определяем сжатие как $\frac{N_\varepsilon}{N} \times 100\%$, где N_ε — число сохраненных коэффициентов вейвлетов для данного порога ε . Из рис. 3а видно, что в каждом случае для областей существует минимум, интерпретирующийся как оптимальное сжатие области вейвлетами в терминах подобия области ЛОМ гауссовой. На рис. 3б изображена масштабированная ошибка L_x между плотностями распределения вероятности ЛОМ и гауссовым распределением с одинаковыми математическим ожиданием и дисперсией. Можно заметить, что минимумы на рис. 3а и рис. 3б совпадают, показывая, что плоскостность — хороший индикатор подобия области гауссову распределению. По графикам также можно заметить, что оптимальное сжатие обеих областей лучше для вейвлетов ИПЗ, чем для вейвлетов DB6. Однако это не отражает всей картины. На рис. 3в видно, что полная кинетическая энергия в области ЛОМ больше для обеих областей, когда используются вейвлеты ИПЗ, в то время как различие намного меньше, если рассматривать общее значение энтропии на рис. 3г. Существенно, что совокупная длина масштабов областей ЛОМ скорости (рис. 3д) и турбулентности (рис. 3е) значительно больше для вейвлетов ИПЗ. Это указывает на то, что вейвлеты ИПЗ извлекают более подобную гауссовой области ЛОМ с более высокой оптимальной степенью сжатия, но эта область ЛОМ является более когерентной, чем при использовании вейвлетов DB6. Так как цель подхода КМВ заключается в извлечении некогерентного гауссова белого шума, можно отнести такие области ЛОМ к недостаткам использования вейвлетов ИПЗ.

Также интересно отметить, что для вейвлетов ИПЗ оптимальное сжатие значительно больше для набора данных F_{512} по сравнению с F_{256} (см. рис. 2а и рис. 2б). Фактически, число вейвлетов для представления отфильтрованных областей приблизительно одинаково для набора данных F_{256} и F_{512} , а это означает, что дополнительные масштабы аппроксимации практически не вносят никаких дополнительных затрат. Однако это не верно для вейвлет-фильтра DB6.

На рис. 4 изображены функции плотности вероятности турбулентности для набора данных F_{256} и функции Гаусса с одинаковыми математическим ожиданием и дисперсией. Рис. 5 отражает функцию плотности вероятности для набора данных F_{256} отфильтрованных областей турбулентности и областей ЛОМ при оптимальном сжатии вейвлетами DB6 в сравнении с отсекающим фильтром Фурье, имеющим такое же число вырожденных моментов. Различие в гауссовом подобии области ЛОМ двух фильтров может наиболее ясно быть замечено на концах графиков.

При пороговой обработке, как вейвлетами ИПЗ, так и вейвлетами DB6, область ЛОМ более приближена к гауссовой на концах, чем остаточная область, полученная отсекающим фильтром Фурье. В обоих случаях есть значительное отличие в районе ноля между плотностью распределения вероятности области ЛОМ и соответствующим гауссовым распределением; это различие доминирует в ошибке L_x .

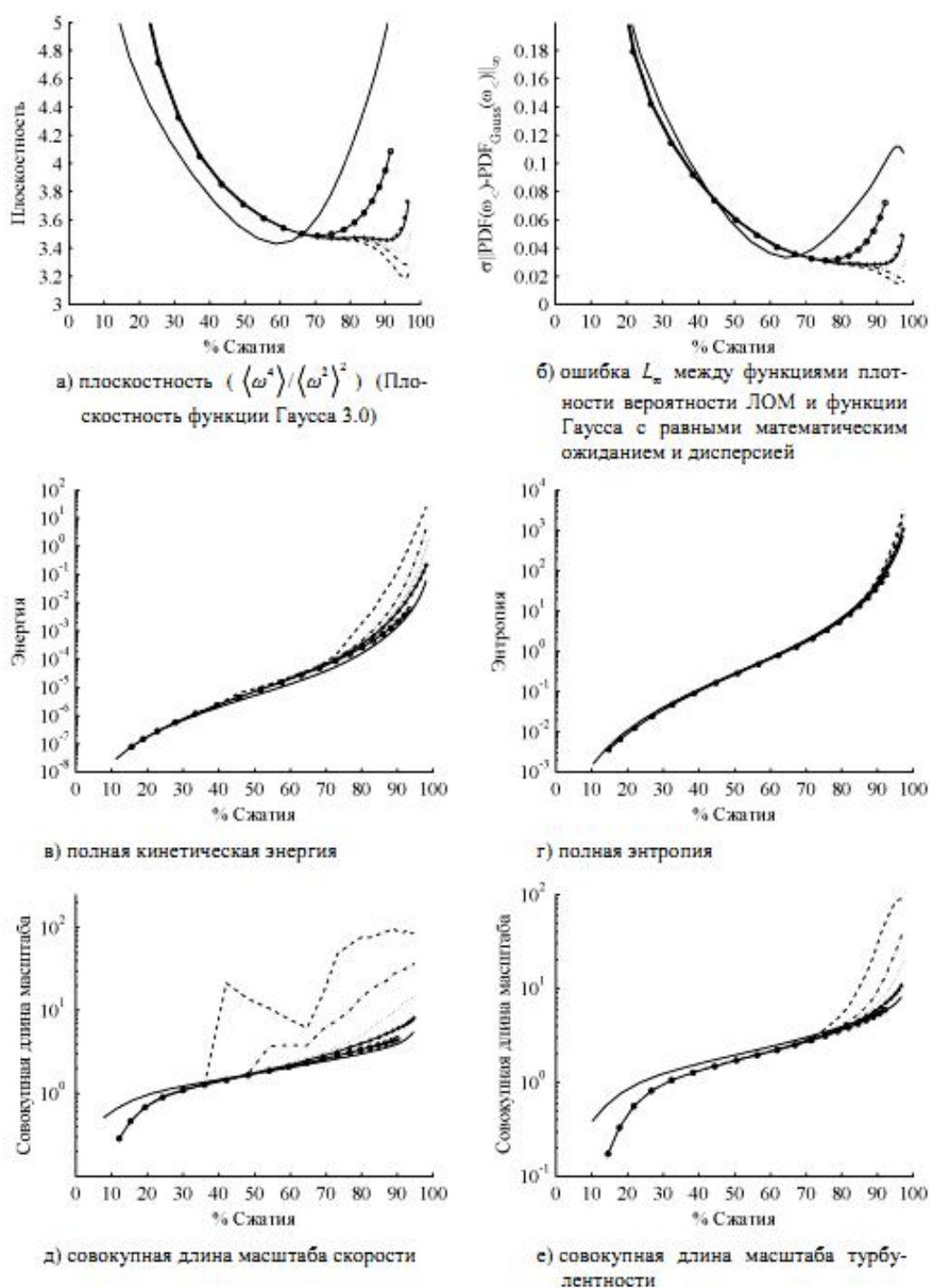


Рис. 8. Статистика отфильтрованных и ЛОМ областей для изотропных турбулентных областей F_{512} , $Re_\lambda = 168$. Статистика области ЛОМ приводится обработки вейвлетами DB6 с 6 уровнями: (—). Другие кривые соответствуют спектрам области ЛОМ после оптимальной декомпозиции вейвлетами ИПЗ для различных уровней разложения. 2 уровня: (—●—); 3 уровня: (—+—); 4 уровня: (—·—); 5 уровней: (—○—); 6 уровней: (—□—)

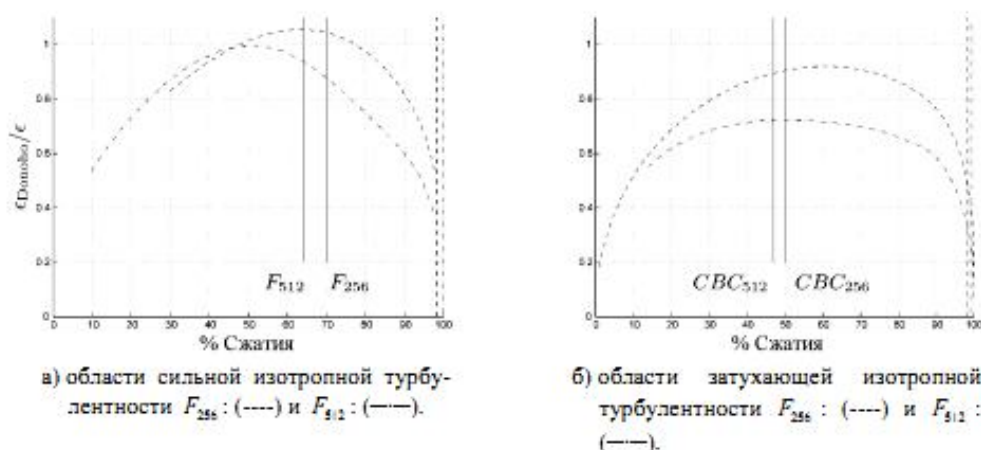


Рис. 9. Пороговая обработка по теореме шумоподавления Донохо, отмасштабированная на основе реальной пороговой обработки вейвлетами DB6. Процент сжатия при минимальной плоскостности отмечен для каждой области сплошными вертикальными линиями. Результирующее сжатие при применении теоремы Донохо ко всей области турбулентности отмечено вертикальными линиями — 256^2 : (---), 512^2 : (—)

Как возможный способ улучшения работы вейвлетов ИПЗ для последовательного извлечения вихря, мы изучили эффект уменьшения числа используемых уровней преобразования. В случае вейвлетов ИПЗ и DB6 для разрешения 512^2 максимальное число уровней, используемых перед началом поддержки масштабирующих функций, для обеспечения наложения на самом грубом уровне, равно 6 [2]. На рис. 7 показаны спектры энергии и энтропии для набора данных F_{512} и областей ЛОМ после оптимального сжатия вейвлетами DB6 с 6 уровнями преобразования, как и на рис. 3. Также показаны спектры энергии и энтропии для областей ЛОМ после оптимального сжатия вейвлетами ИПЗ с 2–6 уровнями разрешения. Заметим, что при уменьшении числа уровней разрешения, используемых в вейвлет-преобразовании ИПЗ, область ЛОМ содержит меньше энергии и приближается к энергии, сохраняемой вейвлет-фильтром DB6. На рис. 8 проводится сравнение тех же самых статистических характеристик, что и на рис. 3, для вейвлет-преобразований с различным числом уровней разрешения для вейвлетов DB6 и ИПЗ. На рис. 8а и рис. 8б можно легко заметить, что с уменьшением числа уровней вейвлет-преобразования область ЛОМ становится менее гауссовой. Можно также заметить, что вейвлет-преобразование ИПЗ с четырехуровневыми результатами в области ЛОМ более гауссова (по сравнению с вейвлет-фильтром DB6) с оптимальной степенью сжатия 96% против 60% для вейвлет-фильтра DB6. Сравнение полной энергии и энтропии (рис. 8в и рис. 8г) для четырехуровневого вейвлет-преобразования ИПЗ с DB6 показывает, что различие в полной кинетической энергии минимально, а полная энтропия почти идентична. Интересная тенденция может быть замечена в совокупной длине масштаба скорости (рис. 8д) и турбулентности (рис. 8е): использование меньшего числа уровней вейвлет-преобразования ИПЗ приводит к меньшей когерентности области ЛОМ.

Наконец, обсудим применение теоремы шумоподавления Донохо для поиска оптимального сжатия вейвлетами с использованием ортогональных вейвлетов DB6. На рис. 9 показан нормализованный пороговый коэффициент ($\epsilon_{\text{Donoho}}/\epsilon$), полученный по теореме шумоподавления Донохо для области ЛОМ в зависимости от процента сжатия области. Напомним, что ϵ_{Donoho} данной области турбулентности, являющийся функци-



ей дисперсии области ЛОМ, однозначно определяется величиной ε , используемой в вейвлет-фильтре. Сплошные вертикальные линии показывают оптимальное сжатие, определяемое минимальной плоскостностью и ошибкой L_∞ . Можно заметить, что поскольку области ЛОМ никогда не являются полностью гауссовым белым шумом, оптимальное сжатие и точки, где $\varepsilon_{\text{Donoho}} / \varepsilon = 1$ не совпадают. Фактически, для затухающей изотропной турбулентности наборов данных *SBC256* и *SBC512*, имеющих более низкое Re_λ ($Re_\lambda = 55$), $\varepsilon_{\text{Donoho}} / \varepsilon$ никогда не достигает 1. На графике также нанесены вертикальные линии, соответствующие оптимальной степени сжатия, полученной по теореме шумоподавления Донохо для различных полных областей. Можно заметить, что это приводит к намного более высокой степени сжатия, чем в точке максимального подобия гауссову распределению (см. рис. 3).

Заключение

Было проведено сравнение работы биортогонального вейвлета второго поколения и ортогонального вейвлета Добеши с тем же самым числом вырожденных моментов по априорным тестам, используя спектральную базу данных ПСЧМ областей изотропной турбулентности: 256^3 и 512^3 ПСЧМ сильной гомогенной турбулентности ($Re_\lambda = 168$); 256^3 и 512^3 ПСЧМ затихающей гомогенной турбулентности ($Re_\lambda = 55$). Результаты этих априорных тестов показали, что интерполяция методом подъема с использованием биортогонального вейвлета второго поколения в состоянии извлечь более гауссову область ЛОМ с более высокой оптимальной степенью сжатия, чем ортогональные вейвлеты DB6. Однако извлеченная область ЛОМ является более когерентной, чем при использовании ортогональных вейвлетов DB6. Эта проблема может быть преодолена сокращением числа уровней разрешения при вейвлет-преобразовании. Кроме того, было определено, что оптимальное сжатие вейвлетами не совпадает с теоретическим сжатием, определенным по теореме шумоподавления Донохо. Самое вероятное объяснение этого состоит в том, что область ЛОМ никогда фактически не является гауссовым белым шумом.

Литература

1. A. Cohen, I. Daubechies, J. Feauveau, "Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets," *Coram. Pures and Appl. Math.*, 45, pp. 485–560, 1992.
2. I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Comm. Pure and Appl. Math.*, 41, pp. 909–996, 1988.
3. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, no. 61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1992.
4. D. Donoho, "Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1, pp. 100–115, 1993.
5. M. Farge, K. Schneider, N. Kevlahan, "Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis," *Phys. Fluids.*, 11(8), pp. 2187–2201, 1999.
6. J. Frohlich, K. Schneider, "An adaptive wavelet-vaguelette algorithm for the solution of pdes," *J. Comput. Phys.*, 130, pp. 174–190, 1997.
7. J. Jimenez, A.A. Wray, "The structure of intense vorticity in isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, 255, pp. 65–90, 1993.
8. N.K.R. Kevlahan, O.V. Vasilyev, A. Cherhabili, "An adaptive wavelet method for turbulence in complex geometries," In *Proceedings of the 16th IMACS World Congress 2000*, 411–39.pdf, IMACS, 2000.
9. S.G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Paris, 1999.
10. W. Sweldens, "The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets," *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 3(2), pp. 186–200, 1996.
11. W. Sweldens, "The lifting scheme: A construction of second generation wavelets," *SIAM J. Math. Anal.* 29(2), pp. 511–546, 1998.
12. O.V. Vasilyev, C. Bowman, "Second generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations," To appear in *J. Comp. Phys.*, 2000.

EVALUATION OF THE USE OF SECOND GENERATION WAVELETS IN THE COHERENT VORTEX SIMULATION APPROACH

A.M. Logvinov, Y.E. Polenova, G.A. Travin

Belgorod State University, Pobedy, 85, Belgorod, 308015, Russia
pruslan@list.ru

The objective of this study is to investigate the use of the second generation bi-orthogonal wavelet transform for the field decomposition in the Coherent Vortex Simulation of turbulent flows. The performances of the bi-orthogonal second generation wavelet transform and the orthogonal wavelet transform using Daubechies wavelets with the same number of vanishing moments are compared in *a priori* tests using a spectral direct numerical simulation (DNS) database of isotropic turbulence fields: 256^3 and 512^3 DNS of forced homogeneous turbulence ($Re_\lambda = 168$) and 256^3 and 512^3 DNS of decaying homogeneous turbulence ($Re_\lambda = 55$). It is found that bi-orthogonal second generation wavelets can be used for coherent vortex extraction. The results of *a priori* tests indicate that second generation wavelets have better compression and the residual field is closer to Gaussian. However, it was found that the use of second generation wavelets results in an integral length scale for the incoherent part that is larger than that derived from orthogonal wavelets. A way of dealing with this difficulty is suggested.

Key words: bi-orthogonal wavelet transforms, Daubechies wavelets, coherent vortex, *a priori* tests.