УДК 51-73

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУПРОЗРАЧНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

М.А. Сапрыкин

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14

Исследуется процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачном диэлектрике, разогретом настолько, что на перенос тепла в такой твердотельной среде оказывает существенное влияние собственное излучение среды, связанное с переходами тепловых фононов в фотоны. Строится полуфеноменологическая теория, описывающая этот процесс, основанная на уравнениях Максвелла со стохастическими источниками излучения. Корреляционная функция случайного распределения этих источников в среде предполагается зависящей от температуры феноменологическим образом. Получено самосогласованное эволюционное уравнение, описывающее эволюцию тензора энергии-импульса распространяющегося в среде теплового электромагнитного излучения.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, перенос тепла, стохастические процессы, корреляционная функция, тензор энергии–импульса.

Введение

В технологических процессах выращивания монокристаллов методом Чохральского, возникает физическая ситуация, при которой в образце оптически полупрозрачной, диэлектрической твердотельной среды, разогретой до очень высоких температур $(\sim 1000 - 2000\ K)$ возникают значительные градиенты температуры $(\sim 40 - 50\ {}^{K}/_{см})$ [1], [2]. В этих условиях, на перенос тепла от более нагретых участков среды к менее нагретым оказывает существенное влияние радиационно-кондуктивный теплообмен, так как в типичной ситуации, материалы, на основе которых выращиваются монокристаллы, являются оптически полупрозрачными, как в видимом диапазоне света, так и в инфракрасной области спектра, то есть они обладают, в этой области спектра электромагнитного излучения, большой длиной поглощения. В связи с этим, для проведения расчётов устойчивых режимов выращивания монокристаллов, при которых в среде кристалла не возникает критических градиентов температуры, важно разработать количественную теорию, которая бы наиболее адекватно описывала возникающую физическую ситуацию [3]. При описании эволюции распределения температуры в описанной физической ситуации, в уравнение теплопроводности должен быть включён источник, который представляет собой дивергенцию потока энергии электромагнитного поля, переносящего тепло [4],[5]. В свою очередь, этот поток энергии должен вычисляться на основе распределения электромагнитного поля в среде, которое излучается самой средой. Поток энергии определяется квадратичной функцией от значений поля и, поэтому, фазовое состояние поля, вообще говоря, не играет роли в распространении его энергии. В связи с этим, возникает идея сформулировать эволюционное уравнение только для компонент тензора энергии-импульса, которое по своей математической природе должно быть волновым (гиперболическим). Этой задаче посвящена настоящая работа. Искомое уравнение должно содержать распределенные в среде источники излучения энергии. Их физический смысл состоит в том, что они описывают переход тепловой энергии в каждом физически малом объёме среды в электромагнитную энергию. По своей математической природе, они должны быть стохастическими, для того, чтобы адекватно описывать связь излучаемой электромагнитной энергии с тепловым шумом. В следующем разделе мы даём математическое описание таких стохастических источником, а, далее, даётся вывод самого эволюционного уравнения для тензора энергии-импульса электромагнитного поля при наличии стохастических источников излучения.

Уравнения стохастического электромагнитного поля

Пусть в диэлектрической среде имеются источники стохастического электромагнитного поля. Физически, роль таких источников могут выполнять, например, атомы среды, которые постоянно излучают и поглощают фотоны с частотами, составляющими *спектр излучения* этих атомов. Квантовая природа этого излучения наделяет его стохастичностью. Более важным примером, который имеет непосредственное отношение к механизму радиационно-кондуктивного теплообмена в твердом теле, является излучение фотонов колебаниями ионного остова твёрдого тела, и частности, кристаллической решётки. В этом случае, стохастическое электромагнитное поле порождается стохастическими стационарными во времени источниками, в среднем равномерно распределёнными по пространству с характерным, присущем этому набору источников спектром излучения. Интенсивность этого излучения, физически, зависит от локальной температуры в каждом малом объёме твердотельной среды. Спектр излучения фотонов зависит от спектра колебаний остова. В частности, фотоны с длиной волны, превосходящей среднерешёточное расстояние, имеют пренебрежимо малую вероятность излучения, так как этого расстояния не превосходит длина волны тепловых фононов.

Будем характеризовать величину электрической индукции в каждом физически малом объёме среды диэлектрической проницаемостью ε, которая зависит от внутренней энергии системы атомов в этом объёме и, тем самым, она также зависит от величины температуры в нём. Поэтому, диэлектрическая проницаемость, вообще говоря, не остаётся неизменной при переходе от одной пространственной точки к другой, из-за этой температурной зависимости. Однако, мы, по-прежнему, будем пренебрегать этой пространственной зависимостью диэлектрической проницаемости ε и считать её постоянной величиной. Поэтому, далее электромагнитное поле описывается на основе комплекснозначного векторного поля

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+i\mu^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t),\qquad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)$ – соответственно, электрическое и магнитное поля в точке x в момент времени t. Поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ подчиняется системе уравнений

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-ic_v[\nabla,\boldsymbol{F}](\boldsymbol{x},t), \tag{2}$$

$$(\nabla,\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{3}$$

где $c_v={}^{c}/_{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ – групповая скорость света в рассматриваемой среде, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно. На основе этих уравнений построим уравнения для изменения стохастического электромагнитного поля с источниками посредством добавления в уравнение (2) распределённых стохастических источников, которые описывают процессы излучения колебаниями твердотельной структуры. Кроме того, для возникновения стационарного режима, необходимо добавить в это уравнение слагаемое, описывающее поглощение излучения этой структурой. Что касается поглощения, то простейший способ для описания его вклада в динамику поля состоит в добавлении в правую часть уравнения (2) слагаемого $-\gamma\boldsymbol{F}, \gamma > 0$. Такое слагаемое соответствует поглощению энергии в каждом физически малом объёме в единицу времени, равном $1/\gamma$. Указанный выбор слагаемого является простейшим из возможных. В этом случае, мы не учитываем зависимости процессов поглощения от температуры. Кроме того, при таком выборе, мы считаем, что электрическая и магнитная составляющие поглощаются с одинаковой интенсивностью. Это может обосновываться тем, что поглощаются фотоны, которые в равной степени имеют как электрическую так и магнитную составляющие. Хотя, мыслимы физические ситуации, когда такое положение не имеет места. Наконец, различные поляризации поля могут поглощаться поразному и, поэтому, величина γ должна быть заменена на симметричную положительную матрицу γ_{jk}.

Для описания стохастического излучения, в правую часть уравнения (2), должно быть добавлено комплекснозначное случайное векторное поле, которое описывает излучаемое средой в единицу времени электромагнитное поле. Вид этого слагаемого должен обеспечивать сохранение продольности излучаемого электромагнитного поля, то есть не должен противоречить уравнению (3). Это возможно только в том случае, когда этот источник имеет следующую форму $[\nabla,\boldsymbol{G}](\boldsymbol{x},t)$ со случайным полем $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)$. При этом тождественно имеет место $(\nabla,[\nabla,\boldsymbol{G}])(\boldsymbol{x},t)=0$ и, поэтому, решения уравнения (2) с начальными условиями, удовлетворяющими (3), также удовлетворяют этому уравнению. Для простоты, можно считать это поле вещественным, подразумевая, что вектор $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)$ пропорционален некоторому эффективному электрическому току и тем самым служит источником только для реальной электрической части поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению, описывающему эволюцию стохастического электромагнитного поля

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\gamma\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=-ic_*[\nabla,\boldsymbol{F}](\boldsymbol{x},t)+[\nabla,\boldsymbol{G}](\boldsymbol{x},t). \qquad (4)$$

Тепловые источники поля

Охарактеризуем случайное поле $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)$. Мы будем предполагать его гауссовским с нулевой средней величиной. Следовательно, таким же свойством обладает случайное поле, $[\nabla,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)]$ ввиду линейности указанного преобразования. Будем считать, что ковариационная матрица, полностью характеризующая поле $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)$, имеет следующий вид

$$\langle G_j(\boldsymbol{x},t)G_k^*(\boldsymbol{x}',t')\rangle=\delta_{jk}\delta(t-t')g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}';t).$$

Так как случайное поле $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)$ должно, по самому смыслу наших построений, зависеть от распределения температуры $T(\boldsymbol{x},t)$в образце среды, то это поле не является стохастически трансляционно инвариантным и стационарным во времени. Поэтому, $\langle G_j(\boldsymbol{x},t)G_k^*(\boldsymbol{x}',t')\rangle$ – ковариационная матрица поля не зависит от разностей $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ и $(t-t')$. Символ Кронекера δ_{jk} в приведенной формуле означает изотропию излучённого поля – равновероятность поляризаций. Конкретизируем вид ковариационной матрицы, выделив зависимость от распределения температуры. Положим,

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)=v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t), \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t)$ – комплекснозначное (вещественное), однородное в пространстве и стационарное во времени гауссовское поле с нулевым средним,

$$\langle K_i(\boldsymbol{x},t)K_j^*(\boldsymbol{x}',t')\rangle=\delta_{ij}\delta(t-t')g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

и, поэтому,

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}';t) = v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)v\big(T(\boldsymbol{x}',t)\big)g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{6}$$

Функция $v(T)$ характеризует амплитуду излучённого электромагнитного поля, которая зависит от температуры. Поле $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t)$ будем считать изотропным. Это означает, что его корреляционная функция зависит только от модуля вектора $g(\boldsymbol{x}) = g(|\boldsymbol{x}|)$. Для ковариационной матрицы случайного поля $[\nabla,\boldsymbol{K}](\boldsymbol{x},t)$ имеем следующее выражение

$$\langle[\nabla,\boldsymbol{K}]_i(\boldsymbol{x},t)[\nabla,\boldsymbol{K}^*]_j(\boldsymbol{x}',t')\rangle = \epsilon_{ikl}\nabla_k\epsilon_{jmn}\nabla'_m\langle K_l(\boldsymbol{x},t)K_n^*(\boldsymbol{x}',t')\rangle =$$
$$= \delta(t-t')\epsilon_{ikl}\epsilon_{jml}\nabla_k\nabla'_m g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

где оператор ∇' обозначает оператор Гамильтона в пространстве векторов $\boldsymbol{x}'$. Используя тождество для символов ϵ и равенство $\nabla' = -\nabla$, справедливое при действии на функцию, зависящую от разности $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, получаем

$$\langle[\nabla,\boldsymbol{K}]_i(\boldsymbol{x},t)[\nabla,\boldsymbol{K}^*]_j(\boldsymbol{x}',t')\rangle = \delta(t-t')\big(-\delta_{ij}\Delta + \nabla_i\nabla_j\big)g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{7}$$

При этом мы считаем, что поле $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t)$ обладает почти всюду гладкими реализациями и, поэтому, корреляционная функция дважды дифференцируема. В этом случае, так как корреляционная функция $\langle[\nabla,\boldsymbol{K}]_j(\boldsymbol{x},t)[\nabla,\boldsymbol{K}^*]_j(\boldsymbol{x}',t')\rangle$ стохастически трансляционно-инвариантного случайного поля достигает максимума модуля при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$, то $\nabla_j g(0) = 0$.

Теперь мы можем подсчитать парную корреляционную функцию стохастического источника – поля $[\nabla,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)]$,

$$\langle[\nabla,\boldsymbol{G}]_i(\boldsymbol{x},t)[\nabla,\boldsymbol{G}^*]_j(\boldsymbol{x}',t')\rangle =$$
$$= \delta(t-t')\Big\{v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)v\big(T(\boldsymbol{x}',t')\big)\big[\delta_{ij}(\nabla,\nabla') - \nabla_i\nabla'_j\big]g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') +$$
$$+g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\Big[\delta_{ij}\Big(\nabla_k v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big),\nabla'_k v\big(T(\boldsymbol{x}',t)\big)\Big) -$$
$$-\Big(\nabla_i v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)\Big)\Big(\nabla'_j v\big(T(\boldsymbol{x}',t)\big)\Big)\Big]\Big\} = \delta(t-t')g_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}';t). \tag{8}$$

Эта функция, в нашей теории, играет роль источника в эволюционном уравнении для парной корреляционной функции стохастического электромагнитного поля.

Значение корреляционной функции поля $[\nabla,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)]$ в совпадающих точках при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ имеет вид

$$\langle[\nabla,\boldsymbol{G}]_i(\boldsymbol{x},t)[\nabla,\boldsymbol{G}^*]_j(\boldsymbol{x},t')\rangle =$$
$$= \delta(t-t')\Big\{v^2\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)\big(-\delta_{ij}\Delta + \nabla_i\nabla_j\big)g(0) +$$
$$+\Big(\delta_{ij}\Big(\nabla_k v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)\Big)^2 - \Big(\nabla_i v\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)\Big)\Big(\nabla'_j v\big(T(\boldsymbol{x}',t)\big)\Big)\Big)g(0)\Big\}.$$

В рассматриваемом нами случае изотропного поля $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},t)$, для корреляционной функции $g(\boldsymbol{x})$, имеет место соотношение

$$\nabla_i\nabla_j g(0) = \frac{1}{3}\Delta g(0)\delta_{ij}.$$

Тогда,

$$\langle[\nabla,\boldsymbol{K}]_i(\boldsymbol{x},t)[\nabla,\boldsymbol{K}^*]_j(\boldsymbol{x},t')\rangle = -\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta(t-t')\Delta g(0)$$

и, поэтому, корреляционная функция поля имеет вид

$$\langle[\nabla, G]_i(x,t)[\nabla, G']_j(x,t')\rangle =$$
$$= \delta(t-t')\Big\{\delta_{ij}\Big[\big(\nabla_k v(T(x,t))\big)^2 g(0) - \frac{2}{3}v^2(T(x,t))\Delta g(0)\Big] -$$
$$-\big(\nabla_i v(T(x,t))\big)\big(\nabla_j v(T(x',t))\big) g(0)\Big\}. \qquad (9)$$

Далее, для получения замкнутой системы эволюционных уравнений для плотности тензора энергии-импульса, важно следующее предположение. Будем считать, что интенсивность затравочного источника стохастического электромагнитного поля, характеризуемая максимумом корреляционной функцией – параметром $g(0)$ – очень мала, в то время как корреляционная функция этого поля обладает чрезвычайно малым радиусом корреляций. Эту корреляционную длину можно считать равной, по порядку величины, среднему межатомному расстоянию в твёрдотельной среде, в которой распространяется излучение. Малость корреляционного радиуса оценивается по отношению к характерной длине поглощения излучения в среде, которую будем считать равной по порядку величины $\alpha^{-1} \approx 0{,}1\ \text{см}^{-1}$. В этом случае, производные корреляционной функции $g(x)$ по каждой из координат радиус-вектора x будут большими величинами так, что, в выражении (9) для корреляционной функции, первое слагаемое намного превосходит второе. Следовательно, при построении теории, можно ограничиться приближённым выражением

$$g_{ij}(x,x';t) = v(T(x,t))v(T(x',t'))(\delta_{ij}(\nabla,\nabla') - \nabla_i\nabla'_j)g(x-x') + o(g(0)).$$

Так как $\nabla' = -\nabla$ в этой формуле, то, с учётом изотропии поля $K(x,t)$ имеем, при $x = x'$,

$$g_{ij}(x,x';t) = -\frac{2}{3}\delta_{ij}v^2(T(x,t))\Delta g(0) + o(g(0)). \qquad (10)$$

Это выражение положительно, так как неположителен оператор Лапласа.

Величину

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta}\langle[\nabla, G(x,t)]_i[\nabla, G(x,t)]_j\rangle dt' = g_{ii}(x,x;t)$$

мы отождествим, в дальнейшем, с интенсивностью излучения энергии электромагнитного поля. Зависимость от x и t этой величины полностью определятся значением мгновенного распределения температуры в точке с радиус-вектором x в момент времени t. В связи с этим, выразим эту величину через локальную интенсивность излучения среды, находящейся при температуре $T(x,t)$. Положим

$$g_{ii}(x,x;t) = \left(\frac{dW(r)}{dV(r)}\right)_{r\to 0}(x,t),$$

где в скобках стоит производная по мере и при этом можно считать, что $V(r)$ – объём шара с центром в точке x, а $W(r)$ энергия электромагнитного поля, излучаемая в единицу времени из этого шара наружу. Примем, что $dV(r) = S(r)dr$, $dW(r) = S(r)dI(r)$, где r – радиус шара, и $I(r)$ – энергия поля, излучаемая в единицу времени с единицы площади его поверхности. Она имеет размерность $\text{эрг}/\text{см}^2\text{с}$. Эта величина зависит от x и от t, так как интенсивность излучения из малого шара радиуса r с центром в точке x в момент времени t зависит от локальной температуры $T(x,t)$ в этой пространственно временной точке x,t. В частности, в так называемом "сером приближении" положим $I(r) = (\alpha r)\sigma T^4(x,t)$ (закон Стефана-Больцмана), где постоянная α, имеющая размерность обратной длины, характеризует плотность распределения источников стохастического электромагнитного поля. Тогда,

$$g_{ii}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x};t) = -2\nu^2\big(T(\boldsymbol{x},t)\big)\Delta g(\mathbf{0}) = \alpha\sigma T^4(\boldsymbol{x},t). \tag{11}$$

Уравнение для тензора энергии-импульса

Перейдём теперь к анализу стохастического уравнения (4) со стохастическим источником вида (10). Ввиду δ-функционной особенности относительно разности $(t\text{-}t')$ в корреляционной функции случайного электромагнитного поля, подчиняющегося этому уравнению, набор решений уравнения (4) марковский случайный процесс со значениями в пространстве распределений электромагнитного поля $\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x});\, \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^3\}$.

Линейность уравнения (4) и свойство марковости случайного процесса позволяют получить замкнутые уравнения для описания эволюции его статистических моментов. Непосредственным усреднением уравнения (4) получаем уравнение для первого момента

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{F}_j(\boldsymbol{x},t)\rangle + \gamma\langle \hat{F}_j(\boldsymbol{x},t)\rangle = -ic_v\big[\nabla,\langle\hat{\boldsymbol{F}}\rangle\big]_j(\boldsymbol{x},t).$$

Вывод уравнения для второго момента $\langle F_i(\boldsymbol{x}',t)F_j(\boldsymbol{x}'',t)\rangle$ использует существенно свойство марковости. В результате вычислений, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{F}_i(\boldsymbol{x}',t)\hat{F}_j^*(\boldsymbol{x}'',t)\rangle = -2\gamma\langle \hat{F}_i(\boldsymbol{x}',t)\hat{F}_j^*(\boldsymbol{x}'',t)\rangle - ic_v\langle\big[\nabla',\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}',t)\big]_i\hat{F}_j^*(\boldsymbol{x}'',t)\rangle +$$
$$+ic_v\langle \hat{F}_i(\boldsymbol{x}',t)\big[\nabla'',\hat{\boldsymbol{F}}^*(\boldsymbol{x}'',t)\big]_j\rangle + g_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t).$$

В тензорных обозначениях, вводя корреляционную функцию

$$Q_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) = \langle \hat{F}_i(\boldsymbol{x}',t)\hat{F}_j^*(\boldsymbol{x}'',t)\rangle$$

случайного поля $F_i(\boldsymbol{x},t)$, полученное уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) = -2\gamma Q_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) - ic_v\epsilon_{ikl}\nabla'_k Q_{lj}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) +$$
$$+ic_v\epsilon_{jkl}\nabla''_k Q_{il}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) + g_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t). \tag{12}$$

Разложим комплекснозначный тензор $Q_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)$ на сумму эрмитовской $Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)$ и антиэрмитовской $Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)$ частей

$$Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) = \frac{1}{2}\Big(Q_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) + Q_{ij}^*(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\Big),$$
$$Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) = \frac{1}{2}\Big(Q_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) - Q_{ij}^*(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\Big),$$

и запишем уравнение (12) в виде системы уравнений для этих составляющих и перейдём по непрерывности к пределу на диагональ, где точки $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ совпадают. Для тензора $Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) = -2\gamma Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) -$$
$$-\frac{i}{2}c_v\epsilon_{ikl}\Big((\nabla'_k+\nabla''_k)Q_{lj}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\Big) - \frac{i}{2}c_v\epsilon_{ikl}\Big((\nabla'_k+\nabla''_k)Q_{lj}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\Big) +$$
$$+\frac{i}{2}c_v\epsilon_{jkl}\Big((\nabla'_k+\nabla''_k)Q_{il}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\Big) - \frac{i}{2}c_v\epsilon_{jkl}\Big((\nabla'_k+\nabla''_k)Q_{il}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\Big) +$$
$$+g_{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t).$$

Далее, перейдём к пределу $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'' \to \boldsymbol{x}$ воспользовавшись следующими равенствами

$$\left[(\nabla'_k - \nabla''_k)Q_{ji}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\right]_{\substack{x'=x\\ x''=x}} =$$

$$= \{\langle(\nabla'_k F_i(\boldsymbol{x}',t))F_i^*(\boldsymbol{x}'',t)\rangle - \langle(\nabla'_k F_i^*(\boldsymbol{x}',t))F_i(\boldsymbol{x}'',t)\rangle -$$

$$-\langle F_i(\boldsymbol{x}',t)(\nabla''_k F_i^*(\boldsymbol{x}'',t))\rangle + \langle F_i^*(\boldsymbol{x}',t)(\nabla''_k F_i(\boldsymbol{x}'',t))\rangle\}_{\substack{x'=x\\ x''=x}} = 0.$$

В результате, получим искомое уравнение для плотности тензора энергии-импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) = -2\gamma Q_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) - \frac{i}{2}c_* \epsilon_{ikl}\nabla_k Q_{lj}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) +$$

$$+\frac{i}{2}c_* \epsilon_{jkl}\nabla_k Q_{li}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) + g_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x};t). \qquad (13)$$

Точно также получается уравнение для функции $Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)$ на диагонали $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}$. Из уравнения (12), вычитая комплексно сопряжённое ему с перестановкой индексов i и j местами, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) = -2\gamma Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t) -$$

$$-\frac{i}{2}c_* \epsilon_{ikl}\left((\nabla'_k - \nabla''_k)Q_{lj}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\right) - \frac{i}{2}c_* \epsilon_{ikl}\left((\nabla'_k + \nabla''_k)Q_{lj}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\right) +$$

$$+\frac{i}{2}c_* \epsilon_{jkl}\left((\nabla'_k - \nabla''_k)Q_{li}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\right) - \frac{i}{2}c_* \epsilon_{jkl}\left((\nabla'_k + \nabla''_k)Q_{li}^{(-)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\right).$$

Перейдём к пределу $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'' \to \boldsymbol{x}$, приняв во внимание, что

$$\left[(\nabla'_k - \nabla''_k)Q_{ji}^{(+)}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'';t)\right]_{\substack{x'=x\\ x''=x}} =$$

$$= \{\langle(\nabla'_k F_i(\boldsymbol{x}',t))F_i^*(\boldsymbol{x}'',t)\rangle + \langle(\nabla'_k F_i^*(\boldsymbol{x}',t))F_i(\boldsymbol{x}'',t)\rangle -$$

$$-\langle F_i(\boldsymbol{x}',t)(\nabla''_k F_i^*(\boldsymbol{x}'',t))\rangle - \langle F_i^*(\boldsymbol{x}',t)(\nabla''_k F_i(\boldsymbol{x}'',t))\rangle\}_{\substack{x'=x\\ x''=x}} = 0.$$

В результате, получим уравнение для тензора $Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x},t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x},t) = -2\gamma Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x},t) - \frac{i}{2}c_* \epsilon_{ikl}\nabla_k Q_{lj}^{(-)}(\boldsymbol{x},t) - \frac{i}{2}c_* \epsilon_{jkl}\nabla_k Q_{li}^{(-)}(\boldsymbol{x},t). \qquad (14)$$

В этом уравнении нет источника. Поэтому, в стационарном режиме распространения электромагнитного поля, нужно считать, что

$$Q_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{x},t) = 0,$$

в то время как уравнение (13) описывает распространение энергии и импульса электромагнитного поля, излучённого тепловыми источниками.

Литература

1. L.A. Atherton, J.J. Derby, R.A. Brown, Radiative heat exchange in Czochralski cryastal growth. Journal of Crystal Growth **84** (1987), 57-78.
2. F. Dupret, P. Nicodeme, Y. Ryckmans, Numerical method for reducing stress level in GaAs crystals. Journal of Crystal Growth **97** (1989), 162-172.
3. Yu.P. Virchenko, A.V. Kolesnikov. Analytic approach to the radiative conduction problem in semitransparent media. The large optical length approximation. Functional Materials. **13**, No.3, P. 372-390 (2006).
4. E.M. Sparrow, R.D. Cess, Radiation heat transfer. Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California. (Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972, 295 с.).
5. Петров В.А., Марченко Н.В. Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах. М: Наука 1985, 190 с.

STOCHSTIC THEORY OF HEAT ELECTROMAGNETIC IRRADIATION TRANSFER IN SEMITRANSPARENT DIELECTRICS

M.A. Saprykin

Belgorod State University, Studencheskaya st., 14, 308007, Belgorod, Russia

The process of heat transfer in semitransparent dielectrics by the electromagnetic radiation is investigated. The dielectrics is heated so much that processes connected with the energy transfer from phonons to photons give the essential influence on the heat transfer in such a solid medium. The semi phenomenological theory describing this process which is based on Maxwell's equations containing some stochastic sources of the electromagnetic radiation is built. It is supposed that the correlation function of the probability distribution of these sources in the medium is depeded by a phenomenological way on the temperature. The self consistent equation describing the evolution of the momentum energy tensor which is connected with heat electromagnetic irradiation in the medium is obtained.

Key words: Maxwell's equations, heat transfer, stochastic processes, correlation function, momentum energy tensor