УДК 517.956

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО СМЕШАННО-СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ОТРАЖЕНИЕМ

М.В. БУРЦЕВ, А.Н. ЗАРУБИН

Орловский государственный университет

e-mail: burtsevmv@orel.ru

Рассмотрена начально- краевая задача для смешанно- составного уравнения с запаздывающим аргументом и отражением. Кроме того, уравнение содержит дробные производные в смысле Римана-Лиувилля. При некоторых предположениях установлена однозначная разрешимость этой задачи.

Ключевые слова: Дробное исчисление, уравнение смешанно-составного типа, отражение, обобщенная функция Миттаг-Леффлера, оператор дробного интегродифференцирования

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^- = D_1^- \cup D_2^-$, $D_1^- = \{(x,t): x > 0, -x < t < 0\}$, $D_2^- = \{(x,t): x < 0, x < t < 0\}$; $D^+ = \{(x,t): |x| < +\infty, t > 0\}$;$J = \{(x,t): |x| < +\infty, t = 0\}$, рассматривается уравнение смешанно-составного типа

$$FLU(x,t) = 0, \qquad (1.1)$$

в котором

$$F \equiv H(t)(D_{0x}^{\beta} + \gamma) + H(-t),$$

$$LU(x,t) \equiv U_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha H(t)+2H(-t)}U(x,t) - H(t)U(x-\tau,t) - H(-t-h)U(-x,t+h);$$

где $0 < \alpha < 1$; $n-1 < \beta < n$ $(n \in N)$; $0 < \gamma, \tau \equiv const$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда; D_{0t}^{α} - оператор дробного [1,с.9](в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования

$$D_{0t}^{\alpha}U(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\xi)^{-\alpha}U(x,\xi)d\xi.$$

Интегрированием уравнеия (1.1) по переменной x при $t > 0$ получено неоднородное уравнение

$$LU(x,t) = H(t)\sum_{t=l}^{n} C_l(t)x^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma x^{\beta}), \qquad (1.2)$$

где

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} -$$

- обобщенная функция Миттаг-Леффлера [2, с.45], $(\rho)_k$ – символ Похгаммера [3, с.719]; $\Gamma(t)$ – гамма-функция [3, с.720], для которого исследуется обратная Задача R.

Задача R. *Найти функции* $C_l(t)$, $D_{0t}^{\alpha-1}C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l=\overline{1,n})$ *и решение* $U(x,t)$ *уравнения (1.2) в области* D *из класса* $D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) \in C(\overline{D}^{+})$, $t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,t) \in C(D^{+} \cup J)$, $U(x,t) \in C(\overline{D}^{-})$, $U_{xx}(x,t) \in C(D^{+} \cup D^{-})$, $U_{tt}(x,t) \in C(D^{-})$, *удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$U(x,t)|_{t=(-1)^i x} = \psi_i(x),\ (-1)^i x \le 0\ (i=1,2); \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\beta-j}U(x,t) = \varphi_j(t),\ t \ge 0\ (j=\overline{1,n});) \tag{1.4}$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) = \lim_{t\to 0-} U(x,t) = \omega(x), x \in J; \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,t) = \lim_{t\to 0-} U_t(x,t) = \nu(x), x \in J \tag{1.6}$$

где $\psi_i(x)$ $(i=1,2)$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, $D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(t) \in C[0,+\infty)$, $\varphi_j(+\infty)=0$ $(j=\overline{1,n})$; $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\psi_i((-1)^{i+1}\infty) = 0$ $(i=1,2)$.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть функция* $\omega(x)$ *непрерывна и абсолютно интегрируема на* $(-\infty,+\infty)$ *вместе со своими производными;* $\omega(\pm\infty)=0$; $D_{0t}^{\alpha-1}C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l=\overline{1,n})$.

Тогда существует единственное решение $U(x,t)$ в области D^{+} задачи Коши (1.2), (1.5), стремящееся к нулю при $x^2+t^2 \to +\infty$ $(|x|<+\infty, t>0)$, представимое в форме

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\xi)G(x,\xi,t)d\xi - \sum_{l=1}^{n}\int_0^t C_l(\eta)d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{\beta-l}E^{1}_{\beta,\beta-l+1}(-\gamma\xi^{\beta})G(x,\xi,t-\eta)d\xi, \tag{1.7}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m I_m(\lambda,t)e^{i\lambda(x-m\tau-\xi)}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{t^{\alpha(m+1)-1}}{x-m\tau-\xi}H_{12}^{20}\left(\frac{(x-m\tau-\xi)^2}{4t^{\alpha}}\right.$$

- фундаментальное решение задачи Коши (1.2), (1.5), а

$$I_m(\lambda,t) = t^{\alpha(m+1)-1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(-\lambda^2 t^{\alpha})\ (m=0,1,2,\dots),$$

$H_{pq}^{mn}(t$ - функция Фокса [4, с.626].

На основании условия сопряжения (1.6) и решения (1.7) задачи Коши (1.2), (1.5) получим функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на $t=0$, $|x|<+\infty$ из области D^{+}:

$$\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega''(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega(x-\tau),\ |x|<+\infty. \tag{1.8}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $\omega(x)\in C^2(-\infty,+\infty)$;$\nu(x)\in C(-\infty,+\infty)$;$\omega(\pm\infty)=0$.

Тогда существует единственное регулярное решение $U(x,t)$ в области D^- задачи Коши (1.2), (1.5)-(1.6) и оно имеет вид

$$U(x,t)=\frac{1}{2}[\omega(x-t)+\omega(x+t)]H(-t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m(-t-mh)H(-t-mh)\int_0^{-t-mh}((-t-mh)^2-\eta^2)^{m-1}\times$$

$$\times[\omega((-1)^m x+\eta)+\omega((-1)^m x-\eta)]d\eta-\frac{H(-t)}{2}\int_{x+t}^{x-t}\nu(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\gamma_m H(-t-mh)\int_0^{-t-mh}\eta((-t-mh)^2-\eta^2)d\eta\int_{x-\eta}^{x+\eta}\nu((-1)^m\xi)d\xi,$$

где $\gamma_m=(m!\,\Gamma(m)2^{2m-1})^{-1}$.

На основании условий (1.3) и решения задачи Коши (1.2), (1.5)-(1.6) найдем функциональное соотношения между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из D^- на $t=0$ $(|x|<+\infty)$ в виде

$$\nu(x)=\omega'(x)+\mu_{1l}(x),\ lh\le x\le(l+1)h; \tag{1.9}$$

$$\nu(x)=-\omega'(x)=\mu_{2l}(x),\ -(l+1)h\le x\le -lh; \tag{1.10}$$

$(l=0,1,2,\dots)$, где

$$\mu_{1l}(x)=-\psi_{1'}\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma_1\left(\frac{x}{2}-h\right)\omega(-x+h)H(x-h)-\frac{1}{2}\gamma_1 H(x-h)\int_{-x+h}^{-h}\omega(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{l}(-1)^m\gamma_m H(x-mh)\int_{((-1)^m-1)\frac{x}{2}+mh}^{((-1)^m+1)\frac{x}{2}-mh}\left[(1+(-1)^m)\frac{x}{2}-mh-\xi\right]^{m-2}\times$$

$$\times\left[(1-(-1)^m)\frac{x}{2}-mh+\xi\right]^{m-2}[(-1)^m\xi-mh][mx-(-1)^m\xi-m(2m-1)h]\omega(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\gamma_m H(x-mh)\int_{mh}^{x-mh}(x-mh-\xi)^{m-1}(\xi-mh)^m\nu((-1)^m\xi)d\xi;$$

$$\mu_{2l}(x)=\psi_{2'}\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma_1\left(-\frac{x}{2}-h\right)\omega(-x-h)H(-x-h)-\frac{1}{2}\gamma_1 H(-x-h)\int_h^{-x-h}\omega(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{l}(-1)^m\gamma_m H(-x-mh)\int_{((-1)^m+1)\frac{x}{2}+mh}^{((-1)^m-1)\frac{x}{2}-mh}\left[(1+(-1)^m)\frac{x}{2}+mh-\right.$$

$\xi m-2\times$

$$\times\left[(1-(-1)^m)\frac{x}{2}+mh+\xi\right]^{m-2}[(-1)^m\xi+mh][mx-(-1)^m\xi+m(2m-1)h]\omega(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\gamma_m H(-x-mh)\int_{x+mh}^{-mh}(x+mh-\xi)^{m-1}(\xi+mh)^m\nu((-1)^m\xi)d\xi.$$

Теорема 3. *Пусть* $\psi_i(x)\in C\{(-1)^{i+1}x\geq 0\}\cap C^2\{(-1)^{i+1}x>0\}$ $(i=1{,}2)$; $D_{0t}^{\alpha}\varphi_j(t)\in C[0,+\infty), \varphi_j(+\infty)=0$ $(j=\overline{1,n})$; $\psi_1(0)=\psi_2(0), \psi_i((-1)^{i+1}\infty)=0$ $(i=1{,}2)$.

Тогда существует единственное решение $U(x,t)$ и $C_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ задачи R.

Доказательство.

A. Вопрос существования и единственности регулярного решения $U(x,t)$ задачи R сводится с помощью условий сопряжения (1.5) - (1.6) и функциональных соотношений (1.8), (1.9) - (1.10) к разрешимости интегро-дифференциально-разностных уравнений

$$\omega''(x)-\Gamma(\alpha)\omega'(x)=\omega(x-\tau)+\Gamma(\alpha)\mu_{1l}(x),\ lh\leq x\leq(l+1)h;$$

$$\omega''(x)+\Gamma(\alpha)\omega'(x)=\omega(x-\tau)+\Gamma(\alpha)\mu_{2l}(x),\ -(l+1)h\leq x\leq -lh;$$

$(l=0{,}1{,}2,\dots)$, в классе функций $\omega(x)\in C^2(-\infty,+\infty)$.

Единственность регулярного решения $U(x,t)$ задачи R следует из того, что однородная задача R имеет в области D тривиальное решение.

B. Используя условия (1.4) в (1.7), придем для определения функций $C_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ к системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\sum_{l=1}^{n}\int_0^t C_l(\eta)K_{lj}(t-\eta)d\eta=\rho_j(t),\ t>0\ (j=\overline{1,n}),\qquad(1.11)$$

где

$$K_{lj}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma\xi^{\beta})[\lim_{x\to 0+}D_{0x}^{\beta-j}G(x,\xi,t)]d\xi,$$

$$\rho_j(t)=-\varphi_j(t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\omega}(\xi)[\lim_{x\to 0+}D_{0x}^{\beta-j}G(x,\xi,t)]d\xi.$$

Очевидно, что правая часть системы (1.11) должна удовлетворять условию $\lim\limits_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}\rho_j(t)=0$, что приводит к равенству $\lim\limits_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(t)=\lim\limits_{x\to 0+}D_{0x}^{\beta-j}\overline{\omega}(x)$ $(j=\overline{1,n})$, которое является условием согласования между $\varphi_j(t)$ и $\omega(x)$ в точке $(0{,}0)\in\overline{D}$.

Взяв дробную производную порядка α от обеих частей системы (1.11), получим для определения $C_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$C_j(t)+\sum_{l=1}^{n}\int_0^t C_l(\eta)\overline{K}_{lj}(t-\eta)d\eta=\overline{\rho}_j(t),\ t>0\ (j=\overline{1,n}),\quad(1.12)$$

где

$$\overline{K}_{lj}(t) = D_{0t}^{\alpha} K_{lj}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{\beta-l} E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma\xi^{\beta}) W_j(\xi,t) d\xi, \quad (1.13)$$

$$\overline{\rho}_j(t) = D_{0t}^{\alpha} \rho_j(t) = -D_{0t}^{\alpha} \varphi_j(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\omega}(\xi) W_j(\xi,t) d\xi, \quad (1.14)$$

а

$$W_j(\xi,t) = \frac{2^{j-\beta-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^{\alpha(2m-1+j-\beta)/2-1} \times$$

$$\times H_{23}^{21}\left(\frac{(\xi+m\tau)^2}{4t^{\alpha}}\right.$$

Ядра (1.13) и правые части (1.14) системы (1.12) являются непрерывными функциями при $t > 0$, а в точке $t = 0$ имеют особенность порядка меньше единицы. Поэтому [5, с.86] система интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.12) имеет единственное решение $C_l(t)$, причем $D_{0t}^{\alpha-1} C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l = \overline{1,n})$.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam - Tokyo, 2006.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL MIXED-COMPOSITE EQUATION WITH A ADVANCING-LATE ARGUMENT AND REFLEXION

M.V. BURTSEV, A.N. ZARUBIN

Orel State University

e-mail: burtsevmv@orel.ru

The initial boundary value problem for the mixed-composite equations with fractional derivative and reflexion is considered. The uniqueness' and existents theorems for the problem are proved.

Key words: Fractional Calculus, Mixed-Composite Type, Reflexion, H - function of Fox , Function of the Mittag-Leffler Type, Riemann-Liouville FractionDerivatives.