УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ С ДВОИЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПРОСТЫМИ РАЗНОСТЯМИ [1]

А. П. НАУМЕНКО

Белгородский государственный университет

e-mail gritsenko@bsu.edu.ru

Пусть N_0 – множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1. Пусть p – нечетное простое число, a – целое число. В статье получена асимптотическая формула для суммы

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\,p)\\ n\in N_0}} 1,$$

остаточный член которой в некоторых случаях уточняет остаточный член известной формулы А.О. Гельфонда.

Ключевые слова: натуральные числа, асимптотическая формула, преобразование Абеля.

Введение

В 1968 г. А.О. Гельфонд доказал следующую теорему [1]:

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,m)\\ n\in N_0}} 1=\frac{X}{2m}+O(X^{\lambda}), \tag{1.1}$$

где $\lambda=\frac{\ln 3}{\ln 4}=0.792\ ...$

В случае, когда 2 является первообразным корнем по модулю p и $m=p$ в работе [2] для суммы в левой части (1.1) получена асимптотическая формула с остаточным членом

$$O(X^{\eta}),$$

где $\eta=\frac{\log_2 p}{p-1}$, постоянная в знаке O зависит только от p, которая в данном частном случае уточняет остаточный член формулы Гельфонда.

Целью настоящей работы является перенос результата [2] на случай произвольных простых разностей арифметических прогрессий. Здесь мы допускаем, что 2 не является первообразным корнем по модулю p.

В статье будут использованы следующие обозначения.

N_0 – множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1.

---

[1]Работа выполнена при поддержке БелГУ, грант ВКАС-26-08

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in N_0 \\ -1, & \text{если } k \notin N_0 \end{cases}$$

Пусть n - нечетное натуральное число. Пусть 2 принадлежит показателю $\delta(n)$ по модулю n. Тогда $k(n) = \frac{\varphi(n)}{\delta(n)}$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, которая уточняет (1.1) для частного случая.

Теорема 1 *Пусть p - нечетное простое число. Пусть a - произвольное целое число из отрезка $[0; p-1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{n\le X \\ n\equiv a \pmod p \\ n\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p} + O(X^{M(p)}),$$

где

$$M(p) = \frac{3k(p)\sqrt{p}\ln p + 1}{(p-1)\ln 2}.$$

постоянная в знаке O зависит только от p.

В случае $k(p) < \frac{(p-1)\ln 3 - 1}{6\sqrt{p}\ln p}$ и при достаточно больших X остаточный член нашей асимптотической формулы точнее, чем в (1.1).

1. Леммы

Справедливо тождество

$$\sum_{\substack{0\le n\le 2^Q-1 \\ n\equiv a \pmod b}} \varepsilon(n) = \sum_{n=0}^{2^Q-1} \varepsilon(n) \frac{1}{b}\sum_{c=1}^{b} e^{2\pi i c\frac{n-a}{b}} =$$

$$= \frac{1}{b}\sum_{c=1}^{b} e^{-2\pi i\frac{ca}{b}} \sum_{n=0}^{2^Q-1} \varepsilon(n) e^{2\pi i\frac{cn}{b}}. \qquad (1.2)$$

Лемма 1

$$S_Q(\alpha) = \sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{Q-1} \left(1 - e^{2\pi i\alpha 2^r}\right). \qquad (1.3)$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции по Q.

При $Q = 1$ имеем

$$\sum_{0\le n<2} \varepsilon(n) e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{0} \left(1 - e^{2\pi i\alpha 2^r}\right).$$

Пусть при некотором $Q \ge 1$ лемма справедлива. Проверим ее справедливость для $Q + 1$:

$$\sum_{0\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} + \sum_{2^Q\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Заметим, что

$$\varepsilon(2^Q + n) = -\varepsilon(n),$$

так как $n < 2^Q$.

Далее,

$$\sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} + \sum_{2^Q\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} =$$

$$\sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} - e^{2\pi i\alpha 2^Q}\sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} =$$

$$= \left(1 - e^{2\pi i\alpha 2^Q}\right)\sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Но, по предположению индукции,

$$\sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{Q-1}\left(1 - e^{2\pi i\alpha 2^r}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{0\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{Q}\left(1 - e^{2\pi i\alpha 2^r}\right).$$

Лемма доказана.

Из нее следует равенство

$$\left|\sum_{0\le n<2^Q} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}\right| = \prod_{r=0}^{Q-1}\left|1 - e^{2\pi i\alpha 2^r}\right| = \prod_{r=0}^{Q-1}\left|e^{2\pi i\alpha 2^r} - 1\right| = \tag{1.4}$$

$$= \prod_{r=0}^{Q-1}\left|2ie^{\pi i\alpha 2^r}\left(\frac{e^{\pi i\alpha 2^r} - e^{-\pi i\alpha 2^r}}{2i}\right)\right| = 2^Q\prod_{r=0}^{Q-1}|\sin\pi\alpha 2^r|.$$

Лемма 2 *Пусть n–натуральное число, x, y–комплексные числа. Тогда*

$$x^n - y^n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(xe^{2\pi i\frac{k}{n}} - ye^{-2\pi i\frac{k}{n}}\right).$$

Доказательство см. [3],с.78.

Лемма 3 *Пусть c – целое число такое, что $(c, p) = 1$. Справедливо тождество*

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1}\left|\sin\frac{\pi c 2^r}{p}\right| = \left(\prod_{x=1}^{p-1}\left|\sin\frac{\pi c x^{k(p)}}{p}\right|\right)^{\frac{1}{k(p)}}.$$

Доказательство.

Отметим, что $|\sin\frac{\alpha\pi}{p}|$ зависит только от остатка α при делении на p.

Пусть g - первообразный корень по модулю p. Пусть $ind_g\ 2 = s$, то есть $g^s \equiv 2(\mathrm{mod}\, p)$. Так как 2 принадлежит показателю $\delta(p)$ по модулю p, то $2^{\frac{p-1}{k(p)}} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$.

Имеем

$$g^{\frac{s}{k(p)}(p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p),$$

откуда $s = k(p)s_1$, где s_1 - натуральное число.

Известно(см. [4, с. 92]) , что

$$ind\ 2^r \equiv r\ ind\ 2(\mathrm{mod}(p-1)).$$

Поэтому при любом целом $r \geq 0$ справедливо

$$ind\ 2^r = q(p-1) + rk(p)s_1.$$

Так как $p - 1 = k(p)\delta(p)$, приходим к равенству

$$ind\ 2^r = (q\delta(p) + rs_1)k(p).$$

Таким образом, ввиду $(k(p), p-1) = k(p)$, при любом целом $r \geq 0$ сравнение

$$x^k(p) \equiv 2^r(\mathrm{mod}\, p)$$

имеет ровно $k(p)$ решений (см. [4, с. 94]).

Лемма доказана.

Лемма 4 *Пусть* p *- нечетное простое число и* n *- некоторое натуральное число,* α *- целое число такое, что* $(\alpha, p) = 1$.

Т

огда справедлива оценка

$$|S| = \left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha x^n}{p}}\right| \leq n\sqrt{p}.$$

Доказательство.

Пусть $y < p$. Тогда справедливо тождество

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{\alpha y^n x^n}{p}}.$$

Далее имеем

$$S = \frac{1}{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha y^n x^n}{p}}.$$

Из неравенства треугольника следует оценка

$$|S| \leq \frac{1}{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha y^n x^n}{p}}\right|.$$

Обозначив через $J(\lambda)$ число решений сравнения $y^n \equiv \lambda (\mathrm{mod}\, p)$ имеем

$$|S| \leq \frac{1}{p-1}\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda)\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda x^n}{p}}\right|.$$

Воспользовавшись неравенством Коши, приходим к оценке

$$S^2 \leq \frac{1}{(p-1)^2}\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda)^2 \sum_{\lambda=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda x^n}{p}}\right|^2.$$

Заметим, что $J(\lambda) \leq n$.

Таким образом

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda)^2 \leq n\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda) = n(p-1).$$

Также справедливо тождество

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda x^n}{p}}\right|^2 = \sum_{x_1=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda x_1^n}{p}}\sum_{x_2=1}^{p-1} e^{-2\pi i\frac{\alpha\lambda x_2^n}{p}}.$$

Приходим к неравенству

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1}\left(\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda x^n}{p}}\right)^2 \leq \sum_{x_1=1}^{p-1}\sum_{x_2=1}^{p-1}\sum_{\lambda=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda(x_1^n-x_2^n)}{p}} \leq np(p-1).$$

Таким образом

$$S^2 \leq n^2 p,$$

откуда имеем необходимую оценку

$$|S| \leq n\sqrt{p}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть* p *- нечетное простое число,* k *- произвольное натуральное число,* c *- целое число такое, что* $(c,p) = 1$.

Тогда

$$\prod_{x=1}^{p-1}\left(1 - e^{2\pi i\frac{cx^k}{p}}\right) \leq ep^{3k\sqrt{p}}.$$

Доказательство.

Справедливо тождество

$$\ln \prod_{x=1}^{p-1} (1 - e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}) = \sum_{x=1}^{p-1} \ln(1 - e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}).$$

Пусть $z = e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}$.

Разложим $\ln(1-z)$ в ряд Тейлора

$$\ln(1-z) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l}.$$

Докажем, что этот ряд сходится.

Действительно,

$$\left|\sum_{l \le N} z^l\right| \le \frac{2}{|1-z|} \le \frac{1}{|\sin \frac{\pi}{p}|},$$

так как $(cx^k, p) = 1$.

Теперь сходимость ряда следует из признака Дирихле (см. [5], с.336) которым мы пользуемся после разделения действительной и мнимой частей.

Пользуясь преобразованием Абеля в интегральной форме, имеем

$$\left|\sum_{p^2 < l < \infty} \frac{z^l}{l}\right| = \left|\int_{n^2}^{\infty} \left(\sum_{p^2 < l \le u} z^l\right) \frac{du}{u^2}\right| \le \frac{1}{p^2 |\sin \frac{\pi}{p}|} \le \frac{1}{p}.$$

Приходим к равенству

$$\sum_{x=1}^{p-1} \ln(1 - e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}) = -\sum_{x=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}}{l} + O(1).$$

Теперь достаточно оценить сумму

$$\sum_{x=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}}{l}.$$

Сделаем суммирование по l внешним, тогда

$$\sum_{x=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}}{l} = \sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{1}{l} \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}.$$

Пусть $l = l_1 p$.

В этом случае

$$\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}} = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i l_1 cx^k} = p - 1.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=p}}^{p^2-1} \frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}} = \frac{1}{p}\sum_{l_1=1}^{p-1} \frac{1}{l_1}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i l_1 cx^k} = \frac{p-1}{p}\sum_{l_1=1}^{p-1} \frac{1}{l_1}.$$

Заметим, что для любого x справедливо

$$\sum_{l=1}^{x} \frac{1}{l} \le \ln x + \gamma + \frac{1}{x},$$

где $\gamma = 0.57\ldots$ - постоянная Эйлера.

Таким образом, приходим к оценке

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=p}}^{p^2-1} \frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}} \le \ln p + \gamma + \frac{1}{p}.$$

Пусть теперь $(l,p) = 1$.

В этом случае, пользуясь леммой 4, имеем

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right| \le k\sqrt{p}.$$

Справедлива оценка

$$\left|\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p^2-1} \frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right| \le \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p^2-1} \frac{1}{l}\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right| \le k\sqrt{p}\left(2\ln p + \gamma + \frac{1}{p^2}\right).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right| \le 3k\sqrt{p}\ln p.$$

Лемма доказана.

Лемма 6 *Пусть* p *- нечетное простое число. Пусть* c *- целое число и* $(c,p) = 1$*.Тогда справедлива оценка*

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} |1 - e^{\frac{2\pi i c 2^r}{p}}| \le e^{\frac{1}{k(p)}p^{3\sqrt{p}}}.$$

Доказательство.

Из тождества (1.4) и леммы 3 имеем

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} |1-e^{\frac{2\pi i c 2^r}{p}}| = \left(\prod_{r=0}^{p-2} |1-e^{\frac{2\pi i c 2^r}{p}}|\right)^{\frac{1}{k(p)}} = \left(\prod_{x=1}^{p-1} |1-e^{\frac{2\pi i c x^{k(p)}}{p}}|\right)^{\frac{1}{k(p)}} \le$$
$e^{\frac{1}{k(p)}} p^{3\sqrt{p}}$.

Лемма доказана.

Лемма 7

$$\left|\sum_{0\le pk+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pk+a)\right| \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{\delta(p)}{2}} 2^{QM(p)},$$

где $M(p) = \frac{3k(p)\sqrt{p}\ln p+1}{(p-1)\ln 2}$.

Доказательство.

На основании (1.2) и (1.3) имеем

$$\left|\sum_{0\le pk+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pk+a)\right| = S_Q(0) + \frac{1}{p}\sum_{c=1}^{p-1} e^{-2\pi i\frac{ac}{p}} S_Q\left(\frac{c}{p}\right).$$

Оценим сумму $S_Q\left(\frac{c}{p}\right)$ при любом $c \in [1, p-1]$.

По лемме 1

$$S_Q\left(\frac{c}{p}\right) = \prod_{r=0}^{Q-1} (1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}}).$$

Имеем

$$S_Q\left(\frac{c}{p}\right) = \prod_{r=0}^{Q-1} (1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}}) = \prod_{s=0}^{\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]} \prod_{r=0}^{\delta(p)-1} (1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}}) \prod_{u=\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]\delta(p)}^{Q-1} (1-$$
$$e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}}) =$$

$$= \left(\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} (1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}})\right)^{\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]} \prod_{u=\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]\delta(p)}^{Q-1} (1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}}).$$

Используя тот факт, что $\sin x \sin 2x \le \frac{3}{4}$ при $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. [1]), получаем

$$\left|\prod_{u=\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]\delta(p)}^{Q-1} (1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}})\right| \le \frac{2}{\sqrt{3}} 2^{\left\{\frac{Q-1}{\delta(p)}\right\}\delta(p)} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\delta(p)}{2}\left\{\frac{Q-1}{\delta(p)}\right\}} \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{\delta(p)}{2}}.$$

Используя лемму 3 и лемму 6, приходим к оценке

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} |1-e^{2\pi i\frac{c2^r}{p}}| = \left(\prod_{x=1}^{p-1} |1-e^{\frac{2\pi i x^{k(p)}}{p}}|\right)^{\frac{1}{k(p)}} \le e^{\frac{1}{k(p)}} p^{3\sqrt{p}},$$

из которой следует, что

$$\left|\sum_{0\le pk+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pk+a)\right| \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{\delta(p)}{2}} 2^{QM(p)},$$

где $M(p) = \frac{3k(p)\sqrt{p}\ln p + 1}{(p-1)\ln 2}$.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{k\le X \\ k\equiv a (\mathrm{mod}\, p) \\ k\in N_0}} 1.$$

Для нее справедливо равенство

$$\sum_{\substack{k\le X \\ k\equiv a (\mathrm{mod}\, p) \\ k\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p} + \frac{1}{2}\sum_{pk+a\le X} \varepsilon(pk+a) + O(1).$$

Таким образом, достаточно оценить сумму

$$S(X,a) = \sum_{pk+a\le X} \varepsilon(pk+a).$$

Определим натуральное число s неравенствами $2^s \le X < 2^{s+1}$. Тогда имеем

$$S(X,a) = \sum_{pk+a\le 2^s-1} \varepsilon(pk+a) + \sum_{2^s\le pk+a\le X} \varepsilon(pk+a).$$

Так как $2^s \le X < 2^{s+1}$, справедливо тождество

$$\sum_{2^s\le pk+a\le X} \varepsilon(pk+a) = -\sum_{0\le pk+l\le X-2^k} \varepsilon(pk+l) = -S(X-2^s,l),$$

где $l \equiv a - 2^s (\mathrm{mod}\, p)$, $l \in [0; p-1]$.

Получено равенство

$$S(X,a) = S(2^s,a) - S(X-2^s,l).$$

Применяя то же рассуждение, что к $S(X,a)$, к сумме $S(X-2^s,l)$ и так далее, приходим к неравенству

$$|S(X,a)| \le |S(2^s,a)| + |S(2^{s_1},a_1)| + \cdots$$

$$s > s_1 > \cdots$$

Применяя к каждой сумме в правой части последнего неравенства лемму 7, получаем

$$|S(X,a)| \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{p-1}{2}} \sum_{l=0}^{[\log_2 X]} 2^{([\log_2 X]-l)M(p)} \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{p-1}{2}} c(p) X^{M(p)},$$

где $c(p) = \frac{1}{1-2^{-M(p)}}$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Gelfond A.O. Sur les nombres qui ont des proprietes additives et multiplicatives donnies// Acta Arith.1968.V.XIIIp.259–265.
2. Науменко А.П. Известия СГУ. Серия Математика. Механика. Информатика, в печати.
3. Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел// М.: Мир, 1987.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел// М.: Наука, 1965.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2// М.: Физматлит, 2006.

ON THE DISTRIBUTION OF NATURAL NUMBERS WITH BINARY EXPANSIONS OF A SPECIAL TYPE IN ARITHMETIC PROGRESSIONS WITH PRIME DIFFERENCES

A.P. NAUMENKO

Belgorod State University

e-mail gritsenko@bsu.edu.ru

Let N_0 be a set of natural numbers whose binary expansions contain even number of 1-s. Let p be an odd prime and a be a natural number. The asymptotic formula for the sum

$$\sum_{\substack{n \le X \\ n \equiv a \pmod p \\ n \in N_0}} 1$$

got in our paper. The remainder ferm of this formula in several cases refines the remainder ferm of a well known formula due to A.O. Gelfond.

Key words: natural numbers, asymptotic formula, Abelian transform.