УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А.М. МЕЙРМАНОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

В настоящей работе изучается движение несжимаемой вязкой жидкости в абсолютно твердом теле, перфорированном системой пор и трещин. Дается строгий вывод усредненных уравнений движения жидкости при стремлении малых параметров ε и δ к нулю в случае, когда область движения жидкости Ω_f определяется периодической системой трещин (периодическое повторение элементарной ячейки εZ_f размера ε, моделирующей систему трещин) и периодической системой пор (периодическое повторение элементарной ячейки δY_f размера δ, моделирующей систему пор)

Ключевые слова: Уравнения Стокса, многомасштабная сходимость.

В настоящей работе рассматривается задача об описании движения несжимаемой вязкой жидкости в абсолютно твердом теле, перфорированном системой пор и трещин. Твердая компонента такой среды называется *скелетом грунта*. В безразмерных (не отмеченных звездочкой) переменных

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}L, \quad t_* = t\tau, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}\frac{L}{\tau}, \quad \mathbf{F}_* = \mathbf{F}g$$

при $t > 0$ дифференциальные уравнения движения для безразмерного вектора скорости жидкости $\mathbf{v}$ и давления q в области Ω_f, занятой жидкостью, имеют вид:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \alpha_\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla q + \mathbf{F}, \qquad (1.1)$$

$$div \ \mathbf{v} = 0. \qquad (1.2)$$

Безразмерные постоянные α_τ и α_μ определяются соотношениями

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_f},$$

в которых L - характерный макроскопический размер (диаметр рассматриваемой области), τ - характерное время физического процесса, ρ_f - средняя плотность жидкости, g - величина ускорения силы тяжести и μ - вязкость жидкости. Дифференциальные уравнения (1.1) - (1.2) замыкаются однородными начальными и граничными условиями

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v}|_{S_f} = 0, \ S_f = \partial\Omega_f. \qquad (1.3)$$

Математическая модель (1.1)-(1.3) общепринята и содержит естественные малые параметры δ и ε, которыми являются отношение δ среднего размера пор l_p к характерному размеру L рассматриваемой области: $\delta = l_p/L$ и отношение ε среднего размера трещин l_c к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l_c/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) в точной модели при стремлении малых параметров к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малых параметров задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие предположения. Так, например, если область Ω_f определяется только системой пор и является периодической (аналитически это эквивалентно равенству характеристической функции $\bar{\chi}(\mathbf{x})$ области $\Omega_f = \Omega_f^\delta$ функции $\chi^\delta(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\delta)$, где $\chi(\mathbf{y})$ есть заданная 1-периодическая функция, определяющая элементарную ячейку порового пространства), то предельным режимом будет известная система уравнений фильтрации, состоящая из закона фильтрации Дарси и уравнения неразрывности для предельной скорости жидкости и предельного давления ([1]).

Целью настоящей работы является строгий вывод усредненных уравнений движения жидкости при стремлении малых параметров ε и δ к нулю в случае, когда область движения жидкости Ω_f определяется периодической системой трещин (периодическое повторение элементарной ячейки εZ_f размера ε, моделирующей систему трещин) и периодической системой пор (периодическое повторение элементарной ячейки δY_f размера δ, моделирующей систему пор). Через γ_c обозначим границу между областью Y_f и ее дополнением в Y. Аналогично определяется γ_p. Тогда межфазная граница Γ_f есть периодическое повторение границ $\varepsilon\gamma_c$ и $\delta\gamma_p$. При этом считается, что $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $\delta = \varepsilon$. Такие среды называются *трещиновато-пористыми средами*. Если $\chi_c(\mathbf{z})$-характеристическая функция области Z_c в единичном кубе Z, а $\chi_p(\mathbf{y})$ -характеристическая функция области Y_p в единичном кубе Y, то характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ области движения $\Omega_f = \Omega_f^\varepsilon$ представима в виде

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\delta, \mathbf{x}/\varepsilon) = \chi_c(\mathbf{x}/\varepsilon) + (1 - \chi_c(\mathbf{x}/\varepsilon))\chi_p(\mathbf{x}/\delta). \qquad (1.4)$$

Как и в случае закона Дарси для пористых сред, для трещиновато-пористых сред широко известна феноменологическая модель фильтрации жидкости, предложенная Г.И. Баренблаттом, Ю.П. Желтовым и И.Н. Кочиной [2]. Эта двухскоростная модель, где скорость жидкости $\mathbf{v}_c$ и давление q_c в трещинах и скорость жидкости $\mathbf{v}_p$ и давление q_p в порах удовлетворяют закону Дарси (с различными матрицами проницаемости в трещинах и порах) и неоднородному уравнению неразрывности соответственно в трещинах и в порах. То есть, движение жидкости в целом описывается двумя различными системами уравнений фильтрации для пор и для трещин. Взаимодействие системы пор и системы трещин (перетоки) постулируется неоднородными слагаемыми в уравнениях неразрывности для системы пор и для системы трещин. Как правило эти слагаемые считаются известными функциями, линейно зависящими от разности давлений в порах и трещинах. По аналогии с законом Дарси следует ожидать, что для периодической структуры области движения жидкости при стремлении параметров δ и ε к нулю усредненная система уравнений будет иметь ту же структуру, что и феноменологическя модель фильтрации [2]. На самом деле, как это будет показано ниже, усредненные уравнения в точной модели (1.1)-(1.3) принципиально иные, чем модель Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова и И.Н. Кочиной (см. задачи (7) - (8), (16) - (19) и (20) - (22)).

Пусть выполнены следующие предположения:

1) Вся среда (твердый скелет $\Omega_s = \Omega_s^\varepsilon$, область движения жидкости $\Omega_f = \Omega_f^\varepsilon$ и межфазная граница $\Gamma = \Gamma^\varepsilon$) есть единичный куб $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$.

2) Границы γ_c и γ_p являются липшицевыми поверхностями, область движения Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами, а липшицева межфазная граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \Omega_s^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границ $\varepsilon\gamma_c$ и $\delta\gamma_p$.

3) Функции $\mathbf{F}$ и $\partial\mathbf{F}/\partial t$ ограничены в $L^2(\Omega_T)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

4) $\delta = \varepsilon^r$, $r > 1$, безразмерные параметры зависят от малого параметра ε и

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \tau_0 + \mu_1 < \infty, \tag{1.5}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\tau = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu}{\delta^2} = \mu_2.$$

Очевидно, что при решении реальных физических задач не предполагаются какие-либо предельные переходы. В распоряжении исследователя имеются только конкретные физические постоянные (плотность среды, вязкость жидкости и т. п.) и две переменные величины - характерный размер рассматриваемой области L и характерное время физического процесса τ. Меняя эти переменные величины в пределах применимости математической модели можно определить закономерности в поведении безразмерных комплексов α_μ и α_τ, которые и подскажут выбор того или иного предельного режима в точной модели (1.1)-(1.3). Так, например, все физические процессы в подземных грунтах можно грубо разделить на фильтрацию подземных жидкостей или газов и на распространение сейсмических или акустических волн. Поскольку скорость фильтрации подземных жидкостей составляет несколько метров в год, то для таких процессов характерное время τ является очень большим, что соответствует критерию $\tau_0 = 0$. Напротив, для задач сейсмоакустики характерное время процесса τ не превышает нескольких десятков секунд (скорость распространения акустической волны в грунте составляет несколько километров в секунду), что соответствует критерию $\tau_0 = \infty$.

В настоящей работе рассматриваются задачи фильтрации, то есть медленно текущие процессы, для которых $\tau_0 = 0$. Такие процессы с самого начала можно описывать стационарной системой уравнений

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{v}^\varepsilon - \nabla\, q^\varepsilon + \mathbf{F} = 0, \quad div\ \mathbf{v}^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{v}|_{S_f} = 0 \tag{1.6}$$

и искать предельные режимы системы уравнений (1.6) при $\varepsilon \to 0$. Эти режимы зависят от критерия $\mu_1 > 0$. Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{v}^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Перененормировка $\mathbf{v}^\varepsilon = (\varepsilon^2/\alpha_\mu)\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon$ сводит рассматриваемый случай к основному случаю в задаче (1.6), когда $\alpha_\mu = \varepsilon^2$. Итак, пусть $\alpha_\mu = \varepsilon^2$. Величину $\mathbf{v}_c^\varepsilon = \chi_c^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon$ естественно назвать *микроскопической скоростью жидкости в трещинах*, а величину $\mathbf{v}_p^\varepsilon = (1 - \chi_c^\varepsilon)\chi_p^\delta \mathbf{v}^\varepsilon$ - *микроскопической скоростью жидкости в порах*. Соответствующие пределы при $\varepsilon \to 0$ $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{v}_p$ назовем *скоростью жидкости в трещинах* и *скоростью жидкости в порах*. Используя метод многомасштабной сходимости (обобщение метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [3]), предложенный Дж. Алэйром [4], и неравенство Пуанкаре - Фридрихса для периодических структур, показывается, что единственным предельным режимом в задаче (1.6) (в задаче (1.1) - (1.3) при выполнении критерия $\tau_0 = 0$) является стандартная система уравнений фильтрации

$$\mathbf{v}_c = \mathbb{B}_c^{(1)}(-\nabla q + \mathbf{F}), \quad div\ \mathbf{v}_c = 0, \quad (\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.7}$$

для скорости жидкости в трещинах, дополненная равенством

$$\mathbf{v}_p = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом на характерных для теории фильтрации временах все перетоки из пор в трещины и наоборот заканчиваются, поровая жидкость запирается (останавливается) в порах, а жидкость в трещинах движется в соответствии с обычными законами фильтрации (1.7). Утверждение (1.8) о том, что жидкость в порах останавливается понимается асимптотически, то есть как равенства

$$\mathbf{v}_c^{\varepsilon} = \mathbf{v}_c + o(\varepsilon), \quad \mathbf{v}_p^{\varepsilon} = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.9}$$

Равенство (1.8) является следствием предположения о структуре скелета грунта (абсолютно твердое тело) и неравенства Пуанкаре - Фридрихса. Течение в порах возможно лишь при выполнении критерия $\mu_2 < \infty$, что невозможно в силу предположения (1.5). В отличие от стационарного движения (или нестационарного, при выполнении критерия $\tau_0 = 0$), описание совместного движения жидкости в порах и трещинах возможно на малых временах при $\tau_0 > 0$.

Для этого естественным образом определяется обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3). А именно, при каждом $\varepsilon > 0$ скорость $\mathbf{v}^{\varepsilon}$ продолжается нулем в область, занятую твердым скелетом, давление q^{ε} - так, чтобы среднее от давления по области Ω было равным нулю. Далее уравнение (1.1) умножается на произвольную гладкую финитную в области движения функцию $\mathbf{u}$, результат умножения интегрируется по области Ω_T и производные по пространственным переменным перебрасываются на пробную функцию:

$$\int_{\Omega_T} \left(\left(\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}^{\varepsilon}}{\partial t} - \mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{u} + \alpha_\mu \nabla \mathbf{v}^{\varepsilon} : \nabla \mathbf{u} - q^{\varepsilon}\, div\ \mathbf{u}\right) dx dt = 0. \tag{1.10}$$

Аналогичным образом переписывается уравнение неразрывности (1.2):

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi dx dt = 0. \tag{1.11}$$

Пусть $\mu_2 < \infty$. Следуя [4] заключаем, что существуют 1-периодические по переменным $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ функции $Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ такие, что $q^{\varepsilon} \overset{3-}{\rightharpoonup} Q$ и $\mathbf{v}^{\varepsilon} \overset{3-}{\rightharpoonup} \mathbf{V}$ (сходится трехмасштабно) при $\varepsilon \to 0$. При этом

$$\mathbf{v}_c = \int_{Z_f} \int_Y \mathbf{V} dz dy, \quad \mathbf{v}_p = \int_{Z_s} \int_{Y_f} \mathbf{V} dz dy. \tag{1.12}$$

С помощью критерия $\mu_0 = 0$ из интегрального тождества (1.10) выводится представление

$$Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \chi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = q(\mathbf{x}, t) \chi(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \tag{1.13}$$

Функция $\mathbf{V}$ определяется из системы микроскопических уравнений

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mu_2 \Delta_y \mathbf{V} - \nabla_y \Pi^{(p)} - \nabla_z \Pi^{(c)} - \nabla q + \mathbf{F}, \qquad (1.14)$$

$$div_{\,y}\, \mathbf{V} = 0, \quad div_{\,z}\, (\textstyle\int_Y \mathbf{V} dy) = 0 \qquad (1.15)$$

в области $\{\mathbf{z} \in Z, \mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1\}$ наряду с 1 - периодическими по переменным $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ функциями $\Pi^{(p)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $\Pi^{(c)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Уравнение (1.14) получается после предельного перехода в тождестве (1.10), если в качестве пробных функций выбрать функции $\mathbf{u} = h(\mathbf{x}, t)(\nabla\varphi(\mathbf{x}/\varepsilon) \times \nabla\psi(\mathbf{x}/\delta))$, а уравнения (1.15) получаются после предельного перехода в тождестве (1.11), если в качестве пробных функции выбрать функции $\delta h(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)\psi(\mathbf{x}/\delta)$ и $\varepsilon h(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и далее воспользоватся результатами [4].

Усредненное уравнение движения жидкости в системе пор получаются после решения системы микроскопических уравнений (1.14) - (1.15), если воспользоваться формулами (1.12):

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}_p^{(1)}(t - \tau) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F})(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \qquad (1.16)$$

если $\mu_2 > 0$ и

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = (m\mathbb{I} - \mathbb{B}_p^{(2)}) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F}), \quad \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, 0) = 0 \qquad (1.17)$$

если $\mu_2 = 0$. Аналогично образом выводится усредненное уравнение движения жидкости в системе трещин:

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} = (m\mathbb{I} - \mathbb{B}_c^{(2)}) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F}), \quad \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, 0) = 0. \qquad (1.18)$$

Уравнения (1.16) - (1.18) замыкаются уравнением неразрывности и краевым условием на внешней границе области движения:

$$div\ (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_p) = 0, \quad (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.19)$$

Если $\mu_2 = \infty$, то, как и в стационарном случае, жидкость в порах запирается а жидкость в трещинах движется согласно уравнению

$$\mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}_c^{(3)}(t - \tau) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F})(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \qquad (1.20)$$

если $\mu_1 > 0$ и уравнению

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} = (m\mathbb{I} - \mathbb{B}_c^{(4)}) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F}), \quad \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, 0) = 0 \qquad (1.21)$$

если $\mu_1 = 0$. Как и выше равнение (1.20) (или уравнение (1.21)) замыкается уравнением неразрывности и краевым условием на внешней границе области движения:

$$div\ \mathbf{v}_c = 0, \quad (\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.22)$$

Таким образом, как мы уже отмечали выше, все предельные режимы в модели (1.1) - (1.3) принципиально отличаются от феноменологической модели, предложенной в [2]. Во-первых, во всех предельных режимах присутствует только одно давление, общее и для системы пор и для системы трещин. Во-вторых, при определенных соотношениях на параметры задачи жидкость в порах запирается и основным является движение жидкости в трещинах. Все вышесказанное сформулируем в следующем утверждении.

Теорема 1 *Пусть выполнены предположения **1) - 4)**. Тогда*

I) *если $\tau_0 = 0$, то единственным предельным режимом в задаче (1.1) - (1.3) при $\varepsilon \to 0$ является система уравнений фильтрации (1.7) для скорости и давления жидкости в трещинах, в которой матрица $B_c^{(1)}$ однозначно определяется из решения микроскопической системы уравнений на элементарной ячейке Z_f;*

II) *если $\tau_0 > 0$ и $\mu_2 < \infty$, то предельными режимами в задаче (1.1) - (1.3) при $\varepsilon \to 0$ является система уравнений (1.16), (1.18), (1.19) при $\mu_2 > 0$ и система уравнений (1.17) - (1.19) при $\mu_2 = 0$, в которых матрица $B_c^{(2)}$ однозначно определяется геометрией системы трещин;*

III) *если $\tau_0 > 0$ и $\mu_2 = \infty$, то предельными режимами в задаче (1.1) - (1.3) при $\varepsilon \to 0$ является система уравнений (1.20), (1.22) при $\mu_1 > 0$ и система уравнений (1.21), (1.22) при $\mu_1 = 0$, в которых матрицы $B_c^{(3)}$ и $B_c^{(4)}$ однозначно определяются геометрией системы трещин.*

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, проект 08-05-00265.

Список литературы

1. Sanchez-Palencia E. Неоднордные среды и теория колебаний. Москва, Мир, 1984 295 стр.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.ПММ, т.24 (1960), вып. 5, 852–864.
3. Nguetseng G. SIAM J. Math. Anal., 1989 V.20, pp. 608–623.
4. Allaire G. Proceed. of Royal Soc. Edinburgh, 126A (1996), pp. 297–342.

APPLICATION OF THE MULTI-SCALE CONVERGENCE METHOD FOR A DISCRIPTION OF LIQUID FILTRATION IN CRACKED-POROUS MEDIA

A.M. MEIRMANOV

Belgorod State University

e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Stokes system of differential equations describing a motion of slightly compressible viscous fluid occupying cracked-porous space in an absolutely rigid body is considered. We suppose that the dimensionless size δ of pores depends on the dimensionless size ε of cracks: $\delta = \varepsilon^r$ with $r > 1$. The rigorous justification is fulfilled for homogenization procedure as the dimensionless size of the cracks tends to zero, while the porous body is geometrically periodic. As the results, we derive different types of homogenized equations (double-porosity models of liquid filtration), depending on ratios between physical parameters. These models describe two-velocity continuum, where the velocity of the liquid in pores and the velocity of the liquid in cracks are independent and each of them satisfy well-known Darsy's law of filtration or different types of momentum conservation law. The principal moment here is that the pressure in pores coincides with the pressure in cracks. The proofs are based on Allaire's multi-scale convergence method of homogenization in periodic structures.

Key words: Stokes equations, multi-scale convergence.