УДК 533.72

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАЛИЗОВАННОГО ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В СФЕРОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Н. В. Малай, А. В. Лиманская

Белгородский государственный университет,
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: malay@bsu.edu.ru; limanskayaanna@mail.ru

Получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат при малых относительных перепадах температуры в окрестности аэрозольной частицы с помощью обобщенных степенных рядов. Проведенные численные оценки показали хорошее их согласие с известными в литературе результатами.

Ключевые слова: обтекание, сфероид, уравнение Навье-Стокса.

Введение. В последние годы все большее значение приобретают исследования физических и динамических свойств аэродисперсной системы и создание на этой основе математических моделей, позволяющих оценивать ее поведение. Аэродисперсной системой называют однокомпонентную или многокомпонентную газообразную среду, с взвешенными в ней частицами.

Наибольший интерес представляют аэродисперсные смеси, состоящие из двух фаз, одна из которых есть твердые (жидкие) частицы, а вторая – газ. Газы, с взвешенными в нем частицами (твердыми или жидкими), так и находящиеся в плотноупакованном виде (порошки) называют аэрозолями, а сами частицы – аэрозольными. При этом размер частиц дисперсной фазы находится в очень широких пределах: от макроскопических $(\sim 500\, мкм)$ до молекулярных $(\sim 10\, нм)$ значений, и варьирует соответственно концентрация частиц – от одной частицы до высококонцентрированных систем $(> 10^{10}\ см^{-3})$. В настоящее время, с учетом развития нанотехнолигий и наноматериалов, большую перспективу представляет применение ультрадисперсных (нано-) материалов в наноэлектронике и нанотехнологиях в целом.

Для классификации аэрозольных частиц по размерам применяют критерий Кнудсена:

$$Kn = \frac{\lambda}{R},$$

где λ – средняя длина свободного пробега молекул газообразной среды; R – характерный размер аэрозольной частицы.

Частицы называются крупными, если $Kn \le 0.01$, умеренно крупными при $0.01 \le Kn \le 0.3$ и мелкими при $Kn \gg 1$.

Аэрозоли играют большую роль в природе и жизни человека, и находят все более широкое применение в технике, медицине, сельском хозяйстве и быту. Так, атмосферный воздух представляет собой наиболее распространенную естественную аэрозольную систему. В связи с интенсификацией производства, использованием авиационной и ракетной техники с каждым годом увеличивается выброс в атмосферу вместе с промышленными дымами высодисперсных аэрозольных частиц. Аэрозольные загрязнения наиболее динамичны и представляют собой непосредственную угрозу окружающей среде. В промышленности аэрозоли используют в различных технологических процессах (производстве полупроводниковых материалов, покрытие дисперсных и гранулированных материалов, растворения поверхностного слоя дисперсной среды, сушки, осаждения и т.д.). Аэрозольные препараты широко используются в медицине для дезинфекции и ингаляции, в ветеринарии – для обработки животных, в сельском хозяйстве – для защиты посевов от вредителей, обработки складских помещений, поливов угодий. Значительную роль играют аэрозоли и в пищевой промышленности (получении сухого молока, при копчении мясных и рыбных продуктов используют дым, который придает этим продуктам соответствующий вкус и т.д.). Таким образом, важной причиной возрастающего интереса к изучению аэродисперсных систем является разнообразие и фундаментальный характер задач, которые возникают в этой области.

Среднее расстояние между аэрозольными частицами у значительной части встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких системах учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знание законов динамики движения и тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в газообразных как однородных, так и неоднородных средах является важной актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

Следует отметить, что число Кнудсена позволяет разграничить всю область газа, окружающую частицу на – гидродинамическую и газокинетическую. В гидродинамической области решаются обычные уравнения газовой динамики, включающие уравнения гидродинамики (уравнения Навье-Стокса и непрерывности), уравнения тепло-и массопереноса и уравнение состояния. Основная трудность при таком подходе заключается в нахождении решения уравнений гидродинамики. Вследствие общей их нелинейной природе получить точные решения уравнений гидродинамики не представляется возможным. Многочисленные парадоксы гидродинамики указывают на то, что до окончательной теории еще далеко.

Кроме того, следует отметить, что геометрия задачи также накладывает свой отпечаток на поиск решения уравнений газовой динамики. Многие частицы, входящие в состав аэродисперсной системы, имеют форму поверхности отличной от сферической, например, сфероидальную (эллипсоид вращения). В данной работе рассматривается гравитационное движение твердой частицы сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. Получено аналитическое решение этого уравнения Навье – Стокса с помощью обобщенных степенных рядов. Проведено сравнение полученных результатов с известными в литературе, которое показало их хорошее согласие.

Гравитационное движение, т.е. движение аэрозольной частицы в поле силы тяжести, происходящее за счет разности удельных весов частицы и окружающей среды, является наиболее распространенным и на этом движении можно показать некоторые особенности решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса.

I. Постановка задачи. Рассмотрим движение аэрозольной частицы, имеющей форму сплюснутого сфероида, при малых числах Рейнольдса и Пекле в газообразной среде заполняющей все пространство под действием гравитационной силы. Под действием приложенной силы и силы вязкого сопротивления среды аэрозольная частица приобретает постоянную скорость. Если перейти в систему координат, связанную с частицей, то задача по существу сводится к задаче обтекания неподвижной аэрозольной частицы, имеющей форму сплюснутого (вытянутого) сфероида, однородным плоскопараллельным потоком газа со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel OZ$), параллельно его оси симметрии (рис. 1).

Рис. 1. Обтекание неподвижной аэрозольной частицы, имеющей форму сплюснутого сфероида, однородным плоскопараллельным потоком газа (жидкости)

Обтекание рассматривается при малых относительных перепадах температуры. Под малыми относительными перепадами температуры понимают следующее. Если через T_S обозначить среднюю температуру поверхности сфероида, а через T_∞ – температуру в невозмущенном потоке, то перепад температуры считается малым, если выполняется условие $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность и др.) можно считать постоянными величинами, а газ рассматривать как сплошную среду.

Описание обтекания сфероида проводится в стоксовском приближении в сфероидальной системе координат (ξ,η,φ). Криволинейные координаты (ξ,η,φ) связаны с декартовыми координатами, следующими соотношениями [1]:

$$x = c \cdot sh\xi \cdot \sin\eta \cdot \cos\varphi,\ \ y = c \cdot ch\xi \cdot \sin\eta \cdot \sin\varphi,\ \ z = c \cdot ch\xi \cdot \cos\varphi, \tag{1.1}$$

$$x = c \cdot ch\xi \cdot \sin\eta \cdot \cos\varphi,\ \ y = c \cdot ch\xi \cdot \sin\eta \cdot \sin\varphi,\ \ z = c \cdot sh\xi \cdot \cos\varphi \tag{1.2}$$

Здесь $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ – в случае вытянутого сфероида ($a < b$, формула(1.1)) и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – в случае сплюснутого сфероида ($a > b$, формула (1.2)); a и b – полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы начало координат располагалось в центре сфероида, а ось совпадала с осью симметрии сфероида.

При малых числах Рейнольдса распределение скорости U_e и давления P_e описываются следующими уравнениями:

$$\mu_e \Delta \boldsymbol{U}_e = \nabla P_e, \qquad div\ \boldsymbol{U}_e = 0 \tag{1.3}$$

с граничными условиями

$$\xi = \xi_0, \qquad \boldsymbol{U}_e = 0 \quad (U_\xi = 0,\ U_\eta = 0) \tag{1.4}$$

$$\xi \to \infty, \qquad \boldsymbol{U}_e \to U_\infty \cos\eta \cdot \boldsymbol{e}_\xi - U_\infty \sin\eta \cdot \boldsymbol{e}_\eta,\ P_e \to P_\infty \tag{1.5}$$

Здесь U_ξ и U_η – радиальная и касательная компоненты массовой скорости в сфероидальной системе координат; U_∞ – скорость плоскопараллельного потока жидкости, обтекающего частицу ($\boldsymbol{U}_\infty \parallel OZ$); $U_\infty = |\boldsymbol{U}_\infty|$; $\boldsymbol{e}_\xi$ и $\boldsymbol{e}_\eta$ – единичные векторы сфероидальной системы координат; P_∞ – давление в невозмущенном потоке. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность с $\xi = \xi_0$.

В граничных условиях (1.4) на поверхности частицы ($\xi = \xi_0$) учтено условия прилипания для радиальной и касательной компонент массовой скорости. На большом расстоянии $\xi \to \infty$ справедливы граничные условия (1.5).

Сила, действующая на частицу со стороны потока, определяется по формуле [2]

$$F_z = \oint\limits_{(S)} \left(-P_e \cos\eta + \sigma_{\xi\xi} \cos\eta - \frac{sh\xi}{ch\xi} \sin\eta \cdot \sigma_{\xi\eta} \right) dS \qquad (1.6)$$

где $dS = c^2 ch^2 \xi \sin\eta \cdot d\eta \cdot d\varphi$ – дифференциальный элемент поверхности; $\sigma_{\xi\xi}$ и $\sigma_{\xi\eta}$ – компоненты тензора напряжений в сфероидальной системе координат,

$$\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{2\ \mu_e}{H_\varepsilon} \left(\frac{\partial\ U_\varepsilon}{\partial\ \varepsilon} + \frac{1}{H_\varepsilon} U_\eta \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\ \eta} - \frac{H_\varepsilon}{3} \operatorname{div}\ U_e \right),$$

$$\sigma_{\varepsilon\eta} = \frac{\mu_e}{H_\varepsilon} \left(\frac{\partial\ U_\eta}{\partial\ \varepsilon} + \frac{\partial\ U_\varepsilon}{\partial\ \eta} - \frac{1}{H_\varepsilon} U_\eta \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\ \varepsilon} - \frac{1}{H_\varepsilon} U_\varepsilon \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\ \eta} \right),$$

H_i – коэффициенты Ламэ, ($i = \xi, \eta, \varphi$).

Определяющими параметрами задачи являются материальные постоянные ρ_e, μ_e и сохраняющиеся в процессе обтекания частицы величины – a, T_∞, U_∞ .(a – наибольшая полуось сфероида). Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию $\mathrm{Re} = (\rho_e a \cdot U_\infty)/\mu_e$ – число Рейнольдса. При $\mathrm{Re} << 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики будем искать в виде

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{V}_e^{(0)} + \varepsilon \cdot \boldsymbol{V}_e^{(1)} + \ldots,\ P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon \cdot P_e^{(1)} + \ldots\ (\varepsilon = \mathrm{Re}) \qquad (1.7)$$

Здесь $\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{U}_e / U_\infty$ и $P_e = P_e / P_\infty$ – обезразмеренные скорость и давление.

Вид граничных условий на бесконечности, указывает на то, что поиск решений для компонент массовой скорости в нулевом приближении следует искать в виде

$$V_\xi(\xi,\eta) = \frac{\cos\eta}{c \cdot ch\xi \cdot H_\xi} G(\xi),\ V_\eta(\xi,\eta) = -\frac{\sin\eta}{c \cdot H_\xi} g(\xi), \qquad (1.8)$$

где $H_\xi = c\sqrt{ch^2\xi - \sin^2\eta}$ – коэффициент Ламэ [1]; $G(\xi)$ и $g(\xi)$ – произвольные функции, зависящие от радиальной координаты ξ.

II. Вывод выражений для компонент массовой скорости. Выражения для компонент массовой скорости и давления могут быть получены с использованием функции тока [1].Однако, во многих прикладных задачах использование функции тока затруднительно. Поэтому проведем анализ движения аэрозольной частицы, исходя непосредственно из самого линеаризованного по скорости уравнения Навье – Стокса. Для этого поступим следующим образом. Подставляя (1.8) в уравнение непрерывности, устанавливаем связь между функциями $\mathrm{G}(\varepsilon)$ и $\mathrm{g}(\varepsilon)$:

$$\mathrm{g}(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{dG}\ (\lambda)}{\mathrm{d}\ \lambda},$$

где введено обозначение $\lambda = \mathrm{sh}\,\xi$.

Учитывая полученный выше результат и, исключая из (1.3) давление, после несложных, но громоздких преобразований, получаем в конечном итоге следующее неоднородное дифференциальное уравнению третьего порядка для функции $G(\lambda)$:

$$\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d^3G}{d\lambda^3}-\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d^2G}{d\lambda^2}+\frac{2}{1+\lambda^2}\left(1-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{dG}{d\lambda}-$$

$$-\frac{2}{\lambda\left(1+\lambda^2\right)}\left(\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2}-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right)G=-\frac{D}{\left(1+\lambda^2\right)^2}, \tag{2.1}$$

где $D = A_2 D^*$, $D^* = \dfrac{c\cdot F_z}{\pi\mu_e U_\infty} = const$, с краевыми условиями

$$G(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{G(\lambda)}{c^2\left(1+\lambda^2\right)}\to 1. \tag{2.2}$$

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде обобщенных степенных рядов [5-8].

<u>Случай А</u>: $\lambda_0 > 1$

В уравнении (2.1) вводим новую переменную $\nu = 1/\lambda$, и учитывая, что $arctg\,\nu = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\nu^{2n-1}}{2n+1}$ получаем следующее уравнение

$$\left[\nu^3+12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\nu^{2n-5}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d^3G}{d\nu^3}+\left[8\nu^2+\right.$$

$$\left.+6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+15)\nu^{2n+4}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d^2G}{d^2\nu}+\left[8\nu+6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(6n+19)\nu^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{dG}{d\nu}+\left[-8+24\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)^2\nu^{2n+2}}{(2n+3)(2n+5)}\right]G=\frac{3}{2}\frac{D}{\nu\left(1+\nu^2\right)} \tag{2.3}$$

Найдем сначала решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (2.3). Точка $\nu = 0$ для этого уравнения является регулярно особой точкой [5−8]. Поэтому его решение ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$G=\nu^\rho\sum_{n=0}^{\infty}C_n\nu^n\qquad (C_0\neq 0),$$

подставляя это выражение в (2.3) получаем следующее определяющее уравнение $(\rho-1)(\rho(\rho-2)+8\rho+8)=0$, корни которого равны соответственно $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -2$, $\rho_3 = -4$. Большему из корней соответствует решение

$$G_1=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(1)}\nu^{n+1} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в однородное уравнение (2.3), воспользовавшись правилом перемножения степенных рядов и методом неопределенных коэффициентов, получаем следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_n^{(1)}$ $(n > 0)$

$$C_n^{(1)}=-\frac{6}{n(n+3)(n+5)}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}^{(1)}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\cdot$$

$$\cdot\left[(n-2k-1)\left[6k+19+(n-2k-2)(2n-2k+9)\right]+4(k+2)^2(2k+1)\right], \tag{2.5}$$

Здесь $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ – целая часть числа n, $C_0^{(1)} = 1$

Второе решение однородного уравнения (2.3), соответствующее корню определяющего уравнения $\rho_2 = -2$, ищем в виде

$$G_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} \nu^{n-2} + \omega_1 \ln\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \nu^{n-1} \qquad (2.6)$$

Поступая аналогичным образом, найдем следующую рекуррентную формулу для коэффициентов $C_n^{(3)}$ $(n \geq 4)$

$$C_n^{(3)} = -\frac{6}{n(n+2)(n-3)} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^k \frac{C_{n-2k-2}^{(3)}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \cdot$$
$$\cdot\left[(n-2k-4)\left[6k+19+(n-2k-5)(2n-2k+3)\right]+4(k+2)^2(2k+1)\right], \qquad (2.7)$$

где $C_0^{(3)} = 1$, $C_1^{(3)} = 0$, $C_2^{(3)} = 1$, $C_3^{(3)} = 1$, $\omega_1 = 0$

Третье решение однородного уравнения (2.3) соответствующее корню определяющего уравнения $\rho_2 = -4$ мы не приводим, т.к. оно не удовлетворяет граничному условию на бесконечности ($\xi \to \infty$).

Исходя из вида правой части уравнения (2.3) подберем аналитическую при $0 \leq \nu < 1$ функцию $G_2(\nu)$ так, чтобы она была частным решением неоднородного уравнения (2.3) $(D = D^* \cdot A_2, D^* = -4)$:

$$\widetilde{G}_2(\nu) = A_2 G_2(\nu), \quad G_2(\nu) = \frac{1}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \nu^n + \omega_2 \ln\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right) G_1(\nu), \qquad (2.8)$$

где $C_0^{(2)} \neq 0$ и $\omega_2 = const$.

Для нахождения функции G_2 функцию $\dfrac{1}{1+\nu^2}$ разложим в ряд

$$\frac{1}{1+\nu^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \nu^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \nu^n$$

где $a_{n+2} = -(n+1)(n+2)a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Если $\dfrac{a_n}{n!} = b_n$, то получаем следующее более компактное выражение

$$\frac{1}{1+\nu^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \nu^n .$$

Подставляя (2.8) в уравнение (2.3) методом неопределенных коэффициентов находим для $C_n^{(2)}$ $(n \geq 3)$ следующую рекуррентную формулу:

$$C_n^{(2)} = -\frac{6}{(n+1)(n-2)(n+3)} \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^k \frac{C_{n-2k-2}^{(2)}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \cdot\right.$$
$$\left.\left[(n-2k-3)\left[6k+19+(n-2k-4)(2n-2k+5)\right]+4(k+2)^2(2k+1)\right]+b_n \right\}, \qquad (2.9)$$

Здесь $C_0^{(2)}=1$, $C_1^2=0$, $C_2^2=1$, $\omega_2=0$, $D=-4$.

Отметим, что для получения рекуррентных соотношений коэффициентов $C_n^{(1)}$ $(n\geq 1)$, $C_n^{(2)}$ $(n\geq 3)$ и $C_n^{(3)}$ $(n\geq 4)$ использовались следующие формулы перемножения степенных рядов:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{2n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_{n-2k}b_k\right)x^n.$$

и выбор постоянных интегрирования $C_0^{(1)}, C_0^{(2)}$ и $C_0^{(3)}$ осуществляется таким образом, чтобы выполнялся предельный переход функций $G_1(\nu)$, $G_2(\nu)$, $G_3(\nu)$ к соответствующим функциям для сферы [1].

Следовательно, общее решение уравнения (2.3), удовлетворяющее краевому условию на бесконечности, имеет вид:

$$\mathrm{G}(\lambda)=A_1\,\mathrm{G}_1(\lambda)+\widetilde{G}_2(\lambda)+A_3\,\mathrm{G}_3(\lambda) \tag{2.10}$$

Итак, мы можем сказать следующее, что функция $\mathrm{G}(\lambda)=A_1\,\mathrm{G}_1(\lambda)+\widetilde{G}_2(\lambda)+A_3\,\mathrm{G}_3(\lambda)$ по построению формально удовлетворяет уравнению (2.3), ряды, которыми выражаются функции G_1, $\widetilde{G}_2$, G_3, сходятся при $0\leq\nu<1$ и постоянные интегрирования A_1 и A_3 ($A_3=c^2$) однозначно (в силу линейной независимости решений G_1 и G_3) определяются из граничных условий (2.2).

Функция $g(\lambda)$ определяется из соотношения

$$g(\lambda)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{d}\lambda},$$

которое получается из уравнения непрерывности.

Поскольку явный вид функции $\mathrm{G}(\nu)$ и $g(\nu)$ нам известен, то легко получить выражения для компонент массовой скорости и давления:

$$U_\xi(\xi,\eta)=\frac{U_\infty\cos\eta}{c\cdot H_\xi ch\xi}\left(A_1G_1+A_2G_2+c^2G_3\right) \tag{2.11}$$

$$U_\eta(\xi,\eta)=-\frac{U_\infty\sin\eta}{c\cdot H_\xi}\left(A_1G_4+A_2G_5+c^2G_6\right) \tag{2.12}$$

$$P(x,\lambda)=P_\infty+\frac{\mu\cdot U_\infty}{c^3}\left\{\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}arctg\frac{x}{\lambda}\cdot\frac{d^3G}{d\lambda^3}-\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{1+\lambda^2}{x^2+\lambda^2}x+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}arctg\frac{x}{\lambda}\right]\frac{d^2G}{d\lambda^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\lambda}arctg\frac{x}{\lambda}\cdot\frac{dG}{d\lambda}+\frac{1}{\lambda}\left[\frac{x}{x^2+\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}arctg\frac{x}{\lambda}\right]G\right\} \tag{2.13}$$

где $G_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}}{\lambda^n}$, $G_2(\lambda)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}}{\lambda^n}$, $G_3(\lambda)=\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(3)}}{\lambda^n}$, $x=\cos\eta$,

$$G_4(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)C_n^{(1)}}{\lambda^n}, \quad G_5(\lambda) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)C_n^{(2)}}{\lambda^n}$$

$$G_6(\lambda) = -\frac{\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-2)C_n^{(3)}}{\lambda^n}$$

Постоянные интегрирования A_2 и A_1 определяются из граничных условий на поверхности сфероида и, в частности, для коэффициента A_2 имеем

$$A_2 = -c^2\,\frac{G_1(\lambda_0)G_6(\lambda_0) - G_3(\lambda_0)G_4(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)G_5(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_4(\lambda_0)}$$

и подставляя в (2.4) получаем следующее выражение для силы сопротивления ($\lambda_0 > 1$):

$$F_z = 6\pi R\mu_e U_\infty K_3 \qquad 2.14)$$

где

$$K_3 = \frac{2}{3\sqrt{1+\lambda_0^2}}\,\frac{G_1(\lambda_0)G_6(\lambda_0) - G_3(\lambda_0)G_4(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)G_5(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_4(\lambda_0)} \qquad (2.15)$$

Случай В: $\lambda_0 < 1$

Нас интересуют действительные решения действительного аргумента λ_0 уравнения (2.1). Для действительных значений $\lambda_0 > 0$ имеет место тождество $arctg\frac{1}{\lambda_0} = arcctg\lambda_0$ и, используя разложение $arcctg\lambda_0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+1}}{2n+1}$ при $\lambda_0^2 < 1$ [8], уравнение (2.1) принимает следующий вид:

$$\left[\frac{\pi}{2}\left(\lambda_0^3 + 2\lambda_0^5 + \lambda_0^7\right) - 2\lambda_0^4 - \frac{8}{3}\lambda_0^6 - 8\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+8}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right]\frac{d^3G}{d\lambda_0^3} -$$

$$-\left[\frac{\pi}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_0^6\right) + \frac{4}{3}\lambda_0^5 + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+7}}{(2n+1)(2n+5)}\right]\frac{d^2G}{d\lambda_0^2} + \qquad (2.16)$$

$$+\left[-\frac{\pi}{2}2\left(\lambda_0^3 + \lambda_0^5\right) + 4\lambda_0^4 + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+6}}{(2n+1)(2n+3)}\right]\frac{dG}{d\lambda_0} -$$

$$-\left(-\frac{\pi}{2}2\left(\lambda_0^2 + \lambda_0^4\right) - 2\sum_{n=0}^{\infty}(b_{n-2} - b_n)\lambda_0^{n-5} + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_0^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)}\right)G = -D^*\sum_{n=0}^{\infty}b_n\lambda_0^{n+4}$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.16) ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$G = \lambda^\rho\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n\lambda^n \quad (\Theta_0 \neq 0),$$

подставляя это выражение в (2.16), получаем следующее определяющее уравнение $\rho(\rho-1)(\rho-3) = 0$, корни которого равны соответственно $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 0$.

Большему из корней соответствует решение

$$G_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(1)} \lambda^{n+3} \quad (C_0^{(1)} \neq 0), \tag{2.17}$$

где коэффициенты $\Theta_n^{(1)}$ определяются методом неопределенных коэффициентов при подстановке (2.17) в (2.16) и равны

$$\Theta_n^{(1)} = -\frac{(n-2)((n-1)(n-4)-2)}{n(n+3)(n+2)}\Theta_{n-4}^{(1)} - 2\frac{n^2-2}{(n+3)(n+2)}\Theta_{n-2}^{(1)} + \frac{4}{\pi n(n+3)(n+2)} \cdot$$
$$\cdot \left\{ n\left[(n+2)(n+1)\Theta_{n-1}^{(1)} + \frac{2}{3}(2(n-1)(n-2)+n-4)\Theta_{n-3}^{(1)} \right] + \right. \tag{2.18}$$
$$\left. +2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]}(-1)^k \frac{(n-2k-2)[(n-2k-3)(n-1)-(2k+5)]+2k+5}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\Theta_{n-2k-5}^{(1)} + \sum_{k=0}^{n-5}(b_{k+2}-b_k)\Theta_{n-k-5}^{(1)} \right\}$$

Второе решение однородного уравнения (2.16) ищем в виде

$$G_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(3)} \lambda^{n+1} + \omega_1 \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty} G_1 \tag{2.19}$$

и поступая аналогичным образом, получаем следующую рекуррентную формулу для коэффициентов $\Theta_n^{(3)}$:

$$\Theta_n^{(3)} = -\frac{(n-4)((n-3)(n-6)-2)}{n(n+1)(n-2)}\Theta_{n-4}^{(3)} - 2\frac{(n+1)(n-3)-1}{n(n+1)}\Theta_{n-2}^{(3)} + \frac{4}{\pi n(n+1)(n-2)} \cdot$$
$$\cdot \left\{ (n-2)\left[n(n-1)\Theta_{n-1}^{(3)} + \frac{2}{3}(2(n-3)(n-4)+n-6)\Theta_{n-3}^{(3)} \right] + \right. \tag{2.20}$$
$$\left. +2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]}(-1)^k \frac{(n-2k-4)[(n-2k-5)(n-3)-(2k+5)]+2k+5}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\Theta_{n-2k-5}^{(3)} + \sum_{k=0}^{n-5}(b_{k+2}-b_k)\Theta_{n-k-5}^{(3)} \right\}$$

где $\omega_1 = 0$.

Третье решение однородного уравнения (2.16) ищем в виде

$$G_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(4)} \lambda^{n} + \omega_2 \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty} G_1 \tag{2.21}$$

Коэффициенты $\Theta_n^{(4)}$ определяются по формуле следующей рекуррентной формуле

$$\Theta_n^{(4)} = -\frac{(n-4)((n-4)(n-7)-2)}{n(n-1)(n-3)}\Theta_{n-4}^{(4)} - 2\frac{(n-2)(n-4)-1}{n(n-1)}\Theta_{n-2}^{(4)} + \frac{4}{\pi n(n-1)(n-3)} \cdot$$
$$\cdot \left\{ (n-3)\left[(n-1)(n-2)\Theta_{n-1}^{(4)} + \frac{2}{3}(2(n-4)(n-5)+n-7)\Theta_{n-3}^{(4)} \right] + \right. \tag{2.22}$$
$$\left. +2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]}(-1)^k \frac{(n-2k-5)[(n-2k-6)(n-4)-(2k+5)]+2k+5}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\Theta_{n-2k-5}^{(4)} + \sum_{k=0}^{n-5}(b_{k+2}-b_k)\Theta_{n-k-5}^{(4)} \right\}$$ г

де $\omega_2 = 0$.

Исходя из вида правой части уравнения (2.16), частное решение его ищем в виде

$$G_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(2)} \nu^{n+4} + \omega_3 \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} G_1 \qquad (2.23)$$

После подстановки (2.23) в (2.16), методом неопределенных коэффициентов, имеем

$$\Theta_n^{(2)} = -\frac{(n(n-3)-2)}{(n+4)(n+3)} \Theta_{n-4}^{(2)} - 2\frac{(n+2)n-1}{(n+4)(n+3)} \Theta_{n-2}^{(2)} + \frac{4}{\pi(n+1)(n+3)(n+4)} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ (n+1)\left[(n+3)(n+2)\Theta_{n-1}^{(2)} + \frac{2}{3}(2n(n-1)+n-3)\Theta_{n-3}^{(2)}\right] +$$

$$+2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]} (-1)^k \frac{(n-2k-1)\left[n(n-2k-2)-(2k+5)\right]+2k+5}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \Theta_{n-2k-5}^{(2)} + \sum_{k=0}^{n-5} (b_{k+2}-b_k)\Theta_{n-k-5}^{(2)} + 2b_n \Big\} \qquad (2.24)$$

где $\Theta_0^{(2)} = \dfrac{2}{3\pi}$, $D^* = -4$, $\omega_3 = 0$

Общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$\mathrm{G}(\lambda) = A_1\,\mathrm{G}_1(\lambda) + \tilde{\mathrm{G}}_2(\lambda) + A_3\,\mathrm{G}_3(\lambda) + A_4\,\mathrm{G}_4 \qquad (2.25)$$

Поскольку функция $G(\lambda)$ нам известна, то получаем следующие выражения для компонент массовой скорости

$$U_\xi(\xi,\eta) = \frac{U_\infty \cos\eta}{c \cdot H_\xi ch\xi}\left(A_1G_1 + A_2G_2 + A_3G_3 + A_4G_4\right) \qquad (2.26)$$

$$U_\eta(\xi,\eta) = -\frac{U_\infty \sin\eta}{c \cdot H_\xi}\left(A_1g_1 + A_2g_2 + A_3g_3 + A_4g_4\right), \qquad (2.27)$$

где

$$G_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(1)}\lambda^{n-3},\ G_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(2)}\lambda^{n-4},\ G_3(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(3)}\lambda^{n-1},\ G_4(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(4)}\lambda^{n},$$

$$g_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(n+3)\lambda^{n-2},\ g_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(n+4)\lambda^{n+3},\ g_3(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(3)}(n+1)\lambda^{n},$$

$$g_4(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n^{(4)}n(n+3)\lambda^{n-1}.$$

III. Анализ полученных результатов и основные выводы. В работе получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат при малых относительных перепадах температуры в окрестности аэрозольной частицы. Поиск выражений для компонент массовой скорости в виде

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{c\,\mathrm{ch}\,\varepsilon H_\varepsilon}\mathrm{G}(\varepsilon)\cos\eta,\quad U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{c H_\varepsilon}\mathrm{g}(\varepsilon)\sin\eta,$$

позволил разделить переменные и свести в конечном итоге задачу об отыскании решения неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка (2.1) с краевыми условиями (2.2). В связи с тем, что в это уравнение входит функция

$arcctg\,\lambda$, получить аналитическое решение этого уравнения удалось для двух асимптотических случаев – $\lambda > 1$ и $\lambda < 1$.

Таким образом, получено аналитическое решение уравнения (2.1) с краевыми условиями (2.2) в виде обобщенных степенных рядов и тем самым получено аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат. В случае $\lambda > 1$ решение краевой задачи имеет вид (2.10), а в случае $\lambda < 1$ – (2.25). Вопрос о соотношении полученных в результате решения краевой задачи постоянных интегрирования A_i $(i = 1, 2, 3)$ остается в настоящее время открытым и требует дальнейшего исследования

$$K = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}\left[\lambda_0 + \left(1-\lambda_0^2\right)arcctg\lambda_0\right]}$$

Таблица 1

Сравнение коэффициентов K и K_3

b/a	λ_0	K	K_3
0.708	1.002531	0.942977	0.942073
0.710	1.008233	0.943355	0.943302
0.750	1.133893	0.950958	0.950958
0.754	1.147860	0.951723	0.951723
0.755	1.151397	0.951915	0.951915
0.765	1.187832	0.953831	0.953831
0.768	1.199157	0.954407	0.954407
0.780	1.246445	0.956715	0.956715
0.800	1.333333	0.960577	0.960577
0.850	1.613568	0.970305	0.970305
0.900	2.064741	0.980128	0.980128
0.950	3.042434	0.990030	0.990030
0.990	7.017923	0.998001	0.998001

Можно также ожидать, что полученное решение при $\lambda > 1$ можно аналитически продолжить [4, 7], и тем самым закрыть всю область изменения переменной λ. Однако, проведенные исследования показали, что это очень громоздкий путь и получить какие-либо ощутимые результаты в этом направлении в настоящее время не удалось.

Представляет интерес сравнения полученных результатов в работе с известными в научной литературе результатами [1]. Для случая $\lambda > 1$ было проведено такое сравнение с [1]. Коэффициент K_3 формулы (2.15) сравнивался с коэффициентом K, полученным с использованием функции тока [1]

Как видно из таблицы 1 совпадение очень хорошее. Это указывает на то, что, во всяком случае, при $\lambda > 1$ полученное решение правильно описывает поле течения аэрозольной частицы сфероидальной формы.

Литература

1. Дж. Хаппель, Г. Бреннер Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
3. Г. Ламб Гидродинамика. М.: ОГИЗ. 1947. 928 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука. 1974. Т. 2, 3
5. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1961. 703 с.

6. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностранной литературы. 1958. 474 с.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука. 1967. 444 с.
8. Г.Б. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1978. 222 с.
9. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966. 535 с.

ABOUT SOME FEATURES OF EQUATION STOKES DECISION IN SPHEROIDAL SYSTEM OF COORDINATES

N.V. Malay, A.V. Limanskaja

Belgorod Sate University,
308007, Belgorod, St.. Student's 14,
e-mail: malay@bsu.edu.ru; limanskayaanna@mail.ru

The decision of Stokes equation in spheroidal system of coordinates at small relative temperature drops in aerosol particle vicinity is received with the help of the generalized power series. The carried out numerical estimations have shown their good consent with known estimations in the literature.

Key words: a flow, a spheroid, Stokes equation.