

## ПРОЦЕДУРА ЭКОНОМИЗАЦИИ И СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**В.И.Капалин<sup>1</sup>**  
**Нгуен Дуи Чинь<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>Московский государственный  
институт электроники  
и математики (технический  
университет)*

*e-mail: v\_kapalin@mail.ru.*

*<sup>2</sup>Ho Chi Minh City University  
of Transports*

*e-mail: duytrinh1981@gmail.com*

Рассмотрено применение процедуры экономизации степенных рядов для линеаризации нелинейных характеристик САУ и построения модальных и оптимальных линейных регуляторов для нелинейных объектов.

### Введение

Проблема распространения методов линейной теории управления на класс нелинейных систем является, как и ранее, одной из актуальных проблем современной теории управления [1]. В настоящей работе она рассматривается для систем с обратной связью с нелинейностью в прямой цепи. В задачах такого типа обычно используются традиционные методы линеаризации – метод касательных (Тейлора) или метод статистической линеаризации [2, 3]. Однако последний метод жестко связан с предполагаемым типом входного сигнала, а первый дает удовлетворительные по точности результаты только для малых входных сигналов.

Целью настоящей работы является исследование возможностей иного подхода к линеаризации нелинейных характеристик, основанного на процессе экономизации степенных рядов [4]. Полученные результаты по линеаризации используются для синтеза линейных регуляторов для нелинейных объектов с помощью пакетов расширений Control System Toolbox и Simulink пакета MATLAB.

### 1. Степенные ряды и процедура

Пусть статическая нелинейная характеристика системы управления  $y = f(u)$  представлена степенным рядом

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k, \quad (1)$$

Если

$$M = \max_{u \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(u)|, \quad (2)$$

то для стандартного отрезка  $[-1, 1]$  погрешность аппроксимации функции  $f(u)$  полиномом Тейлор  $p_n(u)$  степени  $n$  оценивается так [5]

$$\Delta = \max_{u \in [-1,1]} |f(u) - p_n(u)| \leq \frac{M}{(n+1)!}. \quad (3)$$

Для случая линеаризации  $n = 1$  и  $\Delta \leq \frac{M}{2}$  что, очевидно, является не очень выгодной оценкой. Более точную аппроксимацию дает процедура экономизации Ланцоша [4], в которой используются ортогональные полиномы Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad |x| \leq 1. \quad (4)$$

Полиномы Чебышева находятся последовательно по формулам



$$\begin{cases} x \cdot T_n = \frac{1}{2}T_{n+1} + \frac{1}{2}T_{n-1}, n > 1 \\ x \cdot T_0 = T_1 \\ T_0 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Процедура экономизации заключается в следующем. Пусть для ряда (1) задан полином Тейлора

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N \quad (6)$$

Формулы (5) записываются в следующем виде

$$\begin{cases} 1 = T_0 \\ x = T_1 \\ x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2) \\ x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3) \\ x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4) \\ \dots \end{cases} \quad (7)$$

и полином Тейлора преобразуется в разложение по полиномам Чебышева

$$f(x) = b_0T_0 + b_1T_1(x) + b_2T_2(x) + \dots + b_NT_N(x) \quad (8)$$

Для широкого класса функций разложение по полиномам Чебышева сходится много быстрее, чем ряд Тейлора или разложение по любой другой системе ортогональных полиномов [5]. Это обстоятельство означает возможность получать наилучшие по точности аппроксимации для нелинейных статических характеристик систем управления. Практическая реализация процедуры экономизации заключается в использовании функции `taylor` пакета MATLAB и написании несложной программы пересчета по формулам (7) и (9). Для перехода от стандартного отрезка  $[-1, 1]$  к произвольному отрезку  $[-a, a]$  используется замена

$$T_i(x) \rightarrow T_i\left(\frac{x}{a}\right).$$

Результаты расчета ошибки для линейризации типовой функции  $y = \text{arctg}(x)$  на отрезках  $[-0,2; 0,2] \dots [-1; 1]$  приведены на графиках рис. 1: штриховая линия – ошибка для полинома Тейлора, сплошная линия – ошибка после применения экономизации.

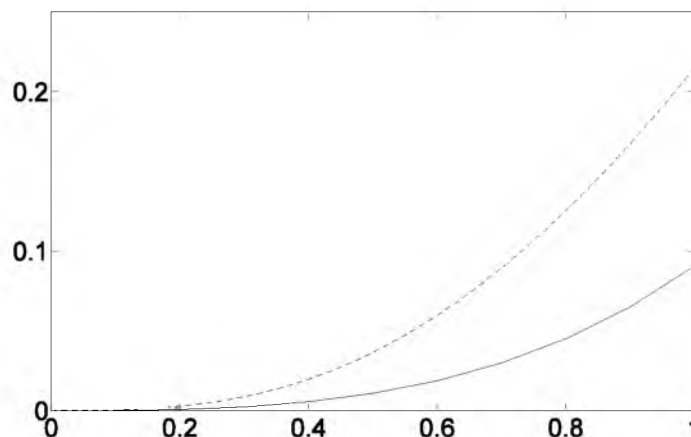


Рис. 1. Результаты расчета ошибки для линейризации типовой функции  $y = \text{arctg}(x)$



Для интервала  $[-1; 1]$  ошибка аппроксимации для полинома Тейлора в 2,37 раз больше чем после применения процедуры экономизации. Аналогичный эффект существенного повышения точности аппроксимации наблюдался и для других типовых нелинейностей, как например  $\sin(u)$ .

## 2. Интерполяционные полиномы и процедура экономизации

Пусть теперь нелинейная статическая характеристика задается непрерывной функцией, не представимой степенным рядом. В этом случае процесс линеаризации может быть проведен в два этапа: на первом строится интерполяционный полином Лагранжа, на втором - применяется процедура экономизации. Для нелинейности типа насыщения интерполяционный полином Лагранжа третьей степени (рис. 2) имеет вид

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}x^3$$

Это дает линейное приближение

$$y_1 = \frac{7}{3}x,$$

а программа экономизации дает  $y_2 = \frac{4}{3}x$ . Графики соответствующих ошибок аппроксимации показаны на рис. 3 в тех же обозначениях, как и на рис. 1. Ошибка программы экономизации на интервале  $[-1; 1]$  меньше в 4 раза.

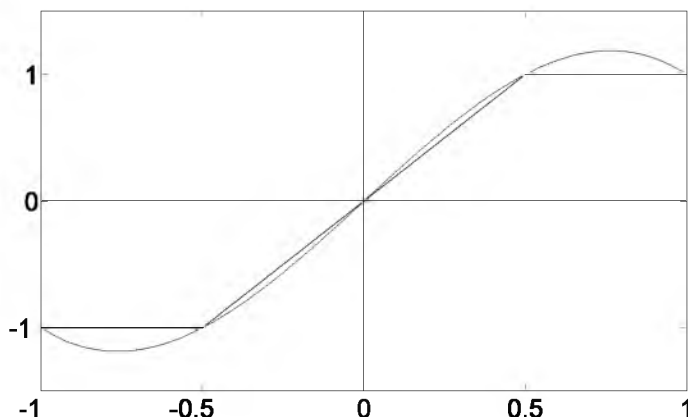


Рис. 2. Интерполяционный полином Лагранжа третьей степени

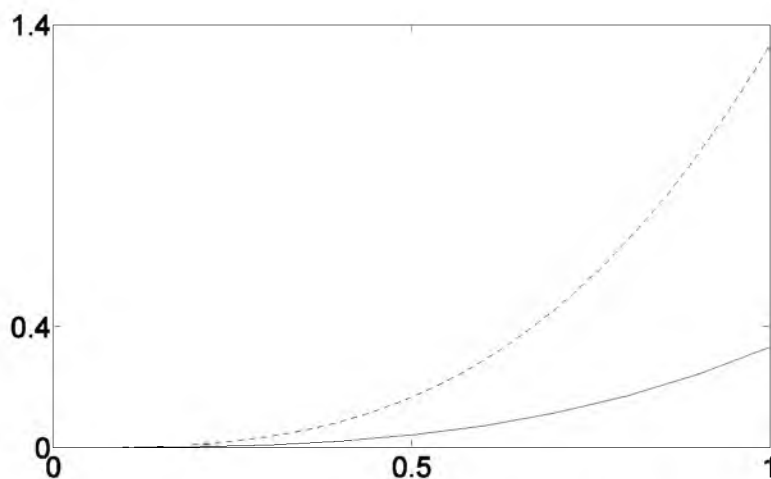


Рис. 3. Графики ошибок аппроксимации

Аналогичные результаты, как показали эксперименты, справедливы и для других типовых нелинейностей – для зоны нечувствительности в частности. Во всех случаях применение процесса экономизации позволяет существенно улучшить точность линейной модели статической характеристики системы управления.

### 3. Моделирование прямой цепи нелинейных

При исследовании динамики САУ наибольший интерес представляют показатели качества системы – время регулирования (переходного процесса) и выброс. Для исследования влияния процедуры экономизации на эти показатели в данной работе использовалась структурная схема прямой цепи типовой нелинейной системы на рис. 4.

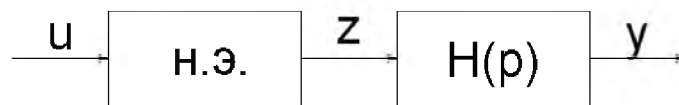


Рис. 4. Структурная схема прямой цепи типовой нелинейной системы

Здесь –  $H(p)$  – передаточная функция объекта,  $Н.Э.$  – нелинейная характеристика исполнительного устройства. При моделировании в расширении Simulink на вход системы подавались ступенчатые сигналы с амплитудами 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1 и находилась ошибка моделирования по сравнению с точной нелинейной моделью.

Для экспериментов с апериодическими переходными процессами использовалась модель морского дизеля Огаты и др. [6]

$$H(p) = \frac{1}{(2p+1)(3p+1)}$$

И стандартная нелинейность  $\sin(u)$ . Соответствующие графики переходных процессов для ступенчатого сигнала амплитуды 0,8 показаны на рис. 5. А график ошибки – на рис. 6.

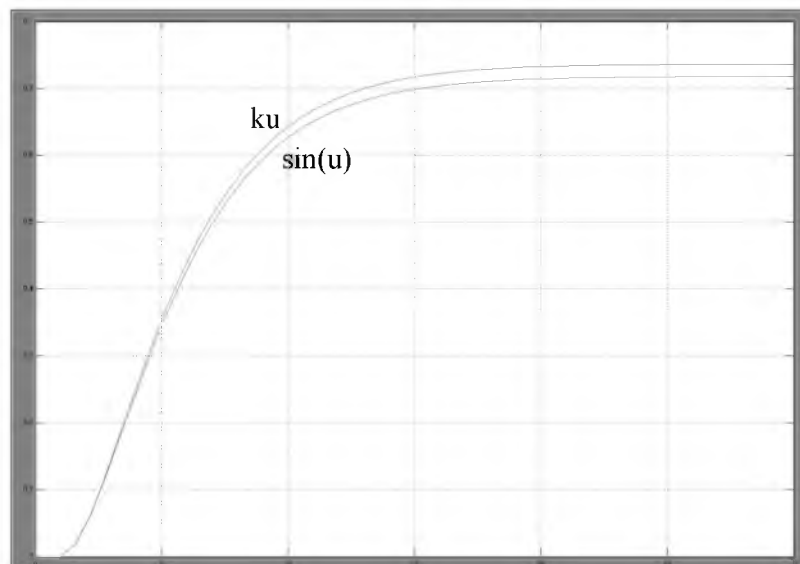


Рис. 5. Графики переходных процессов для ступенчатого сигнала амплитуды 0,8

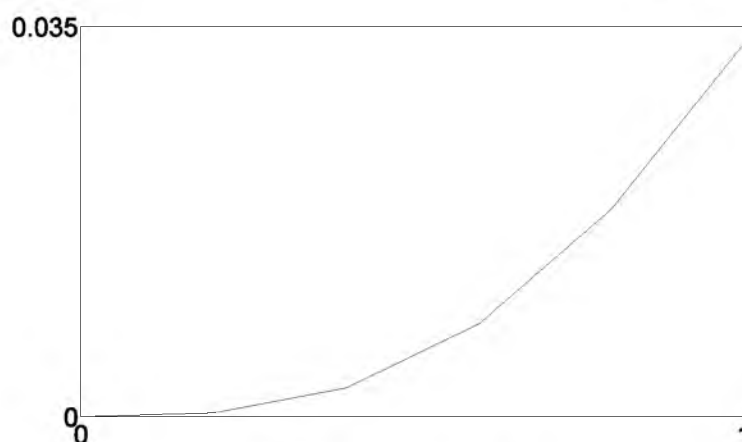


Рис. 6. График ошибки

Времена переходных процессов во всех случаях совпали до сотой доли секунды. Для экспериментов с колебательным переходным процессом использовались передаточная функция

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}. \quad (9)$$

и стандартная нелинейность  $\arctg(u)$ . Графики переходных процессов для ступенчатого сигнала амплитуды 0,8 показаны на рис. 7, а график ошибки – на рис. 8.

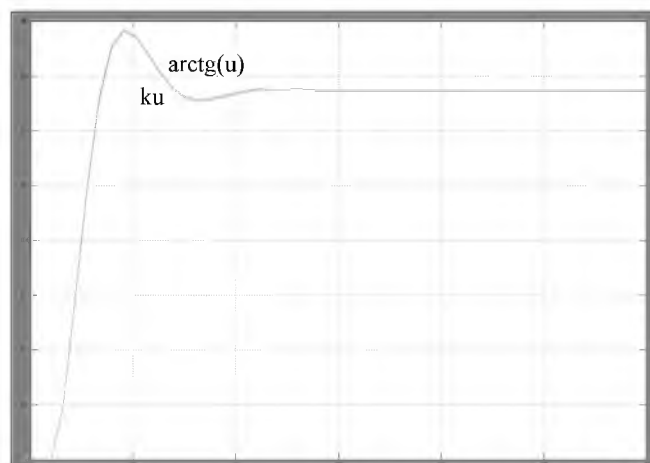


Рис. 7. Графики переходных процессов для ступенчатого сигнала амплитуды 0,8

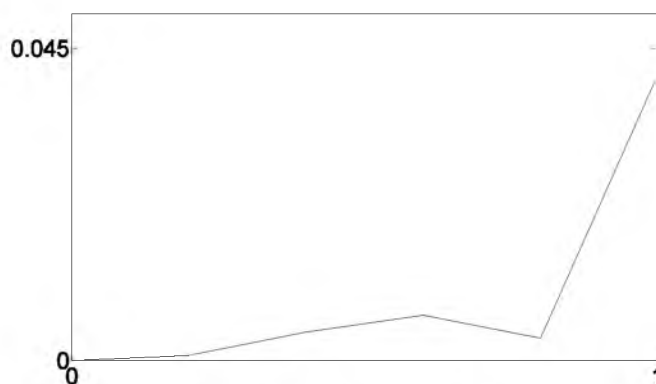


Рис. 8. График ошибки

Непосредственно видно, что и в этом случае показатели качества линейной модели практически совпали с показателями качества исходной нелинейной системы.

Для экспериментов с моделью, заданной в пространстве состояний использовалась модель морского дизеля Foden F7 для низких скоростей [6] с передаточной функцией

$$H(p) = \frac{31.684 - 1.78p}{p^2 + 26.07p + 26.7} \quad (10)$$

Нелинейность типа насыщения аппроксимировалась интерполяционным полиномом Лагранжа и использовалась программа экономизации. Методом нормальной формы были получены следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26.7 & -26.07 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1.78 \\ 78.089 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а матрица С была выбрана единичной для измерения обеих координат состояния. Графики переходных процессов для ступенчатого воздействия амплитуды 0,8 приведены на рис. 9, а соответствующие графики ошибок – на рис. 10.

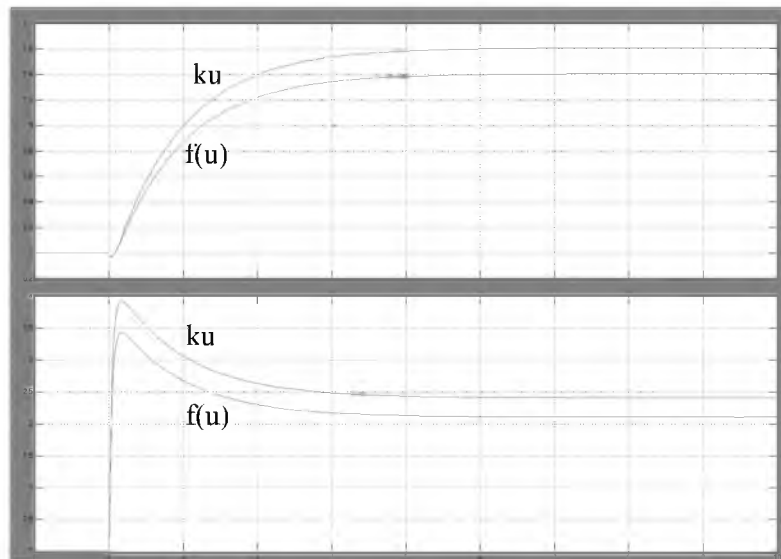


Рис. 9 Графики переходных процессов для ступенчатого воздействия амплитуды 0,8

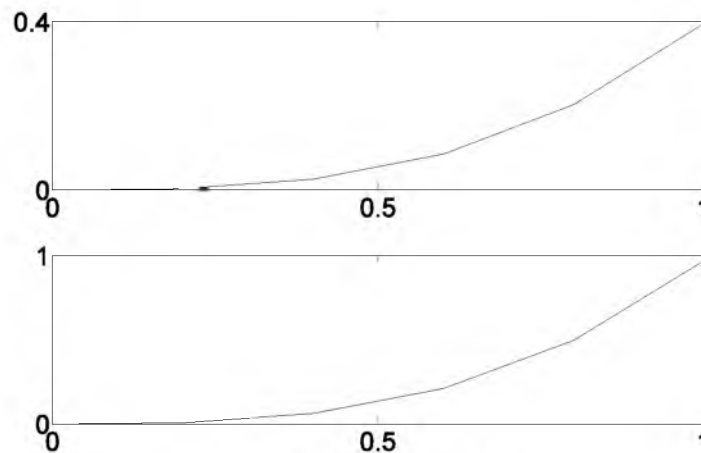


Рис. 10. Графики ошибок

Из приведенных графиков можно непосредственно заключить, что приемлемые по точности результаты для линейной модели по двум координатам состояния здесь получаются для несколько меньших интервалов аппроксимации нелинейности, чем в предыдущих случаях.

#### 4. Модальный синтез регуляторов для нелинейных объектов

Приведенные выше результаты исследования процедуры экономизации позволяют сделать заключение о возможности ее использования в задачах моделирования динамики нелинейных систем и, как следствие, при синтезе линейных регуляторов для нелинейных объектов. Процедура синтеза при этом заключается в следующем: 1) методом экономизации рассчитывается значение коэффициента линеаризации для заданного рабочего диапазона сигналов а нелинейность; 2) используется модальный подход [7] с учетом того, чтобы показатели качества линейных моделей для всех значений коэффициента линеаризации были бы близки к желаемым. Реализация второго этапа осуществляется с помощью команды *place* расширения Control System Toolbox [8].

Используем этот подход для синтеза системы с обратной связью, структурная схема которой приведена на рис. 11.

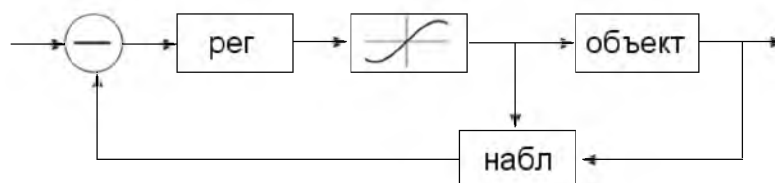


Рис. 11 Структурная схема подхода для синтеза системы с обратной связью

Объект управления здесь задается передаточной функцией морского дизеля на низких скоростях (10). Матрицы  $A$  и  $B$  задаются формулами (11), а матрица  $C = (1.0)$ . Нелинейность задается интерполяционным полиномом Лагранжа для типовой функции насыщения. Применяя процесс экономизации, было получено, что в данном случае коэффициент линеаризации  $k_L \in [1.8433; 2.3233]$ .

Для данной задачи требовалось, чтобы время регулирования не превышало 0,5 с., а выброс не превышал 15% для всех ступенчатых воздействий. Выбор различных вариантов расположения полюсов для разных коэффициентов линеаризации позволили остановиться на полюсах  $p = -7 \pm 14.34j$  для максимального значения коэффициента линеаризации  $k_L = 2.3233$ .

Результаты моделирования линейной модели и синтезированной нелинейной системы приведены на рис. 12.

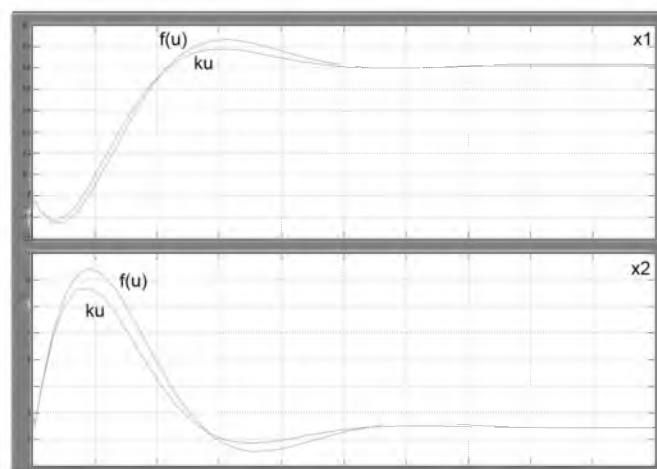


Рис. 12. Результаты моделирования линейной модели и синтезированной нелинейной системы



Для средних скоростей модель Foden F7 дает передаточную функцию

$$H(p) = \frac{19.06 - 0.36p}{p^2 + 15.58p + 13.04}, \quad (12)$$

а для высоких скоростей

$$H(p) = \frac{20.68 - 0.06p}{p^2 + 18.42p + 20.33} \quad (13)$$

В этих случаях метод нормальной формы дает такие матрицы А и В соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13.04 & -15.58 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -0.36 \\ 24.669 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0), \quad D = 0 \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -20.33 & -18.42 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -0.06 \\ 21.785 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0), \quad D = 0 \quad (15)$$

Для средних скоростей было положено, чтобы время регулирования не превышало 0,5 с., а выброс – 10%. Выбор полюсов позволил остановиться на полюсах  $p = -8 \pm 10j$  для максимального коэффициента усиления.

Для высоких скоростей было положено, чтобы время регулирования не превышало 0,3 с., а выброс – 15%. Полюса были выбраны такими  $p = -12 \pm 20j$ .

Результаты моделирования линейных моделей и синтезированных нелинейных систем для этих скоростей приведены на рис. 13 и рис. 14.

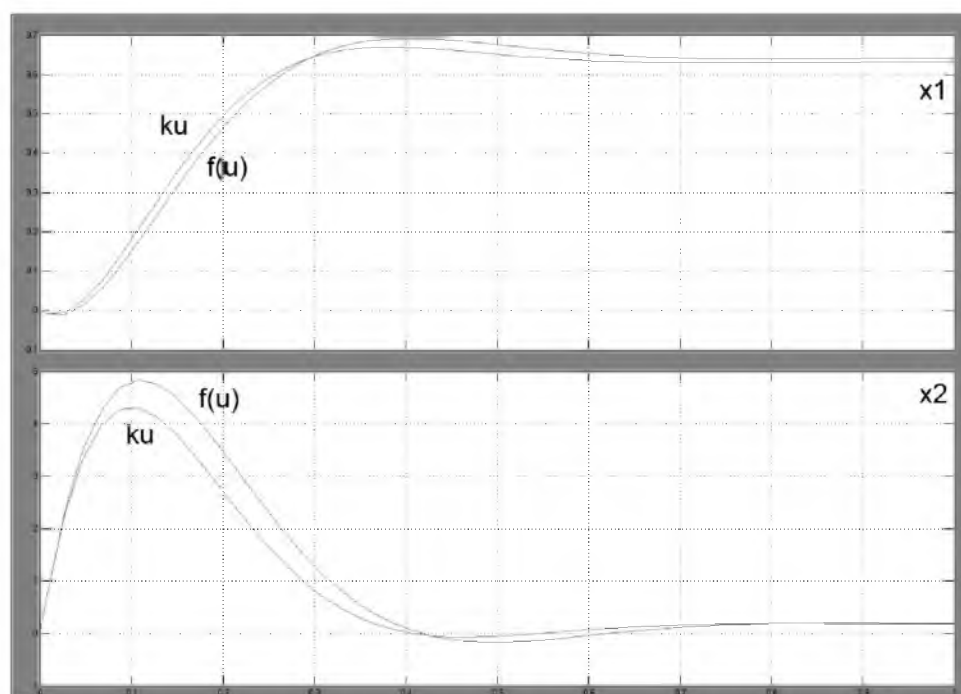


Рис. 13. Результаты моделирования линейных моделей и синтезированных нелинейных систем



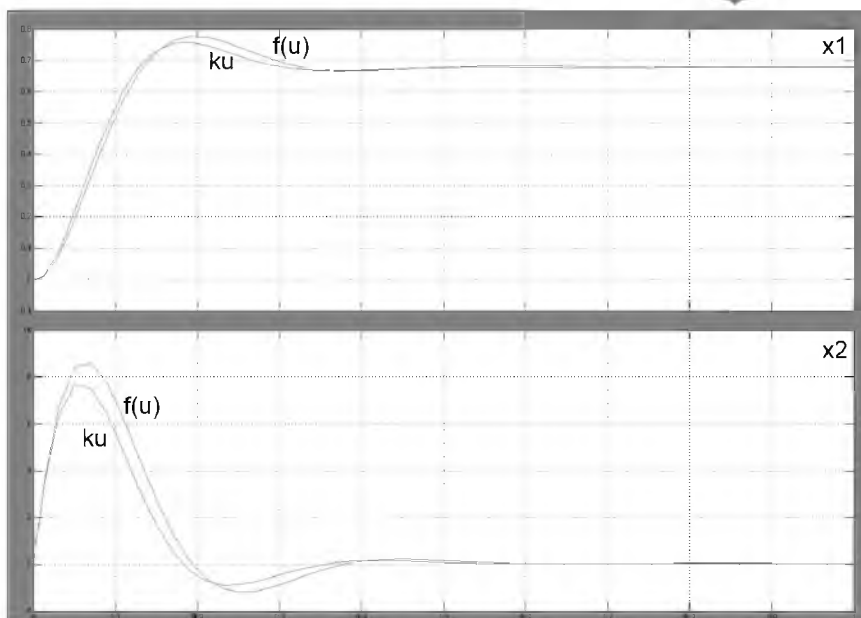


Рис. 14. Результаты моделирования линейных моделей и синтезированных нелинейных систем

Показатели качества линейных моделей и нелинейных систем приведены в таблице 1, позволяющей заключить о выполнении требований к показателям качества синтезированных нелинейных систем во всем диапазоне ступенчатых воздействий.

Таблица 1

Показатели качества линейных моделей и нелинейных систем

		$t_{\text{пер}} \text{ с}$	$\sigma\%$
1-я скорость	$k_L=2.3233, \text{ step}=0.1$	0.504	14.21
	$f(u), \text{ step}=0.1$	0.566	15.1
	$k_L=1.8433, \text{ step}=0.7$	0.413	13.17
	$f(u), \text{ step}=0.7$	0.439	18.67
2-я скорость	$k_L=2.3233, \text{ step}=0.1$	0.423	8
	$f(u), \text{ step}=0.1$	0.434	8.61
	$k_L=1.8433, \text{ step}=0.7$	0.444	6
	$f(u), \text{ step}=0.7$	0.505	7.74
3-я скорость	$k_L=2.3233, \text{ step}=0.1$	0.232	14.9
	$f(u), \text{ step}=0.1$	0.237	15.64
	$k_L=1.8433, \text{ step}=0.7$	0.257	12
	$f(u), \text{ step}=0.7$	0.28	14.24

### 5. Синтез регулятора для нелинейного объекта с помощью LQR критерия

Линейные модели получаемые с помощью процедуры экономизации могут быть использованы для синтеза нелинейных систем с помощью LQR критерия, т.е. путем минимизации функционала качества

$$J_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt \quad (16)$$

Полагая, что  $N = 0$ , матрица  $Q$  – неотрицательно определена, матрица  $K$  – положительно определена, решение LQR задачи дается формулами

$$u = -Kx, \quad (17)$$

$$K = R^{-1} B^T P, \quad (18)$$

где  $P$  – решение матричного уравнения Риккати

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (19)$$

Для решения этой задачи в пакете Control System Toolbox имеется команда *lqr* [8], которая вычисляет матрицу Риккати Р и матрицу регулятора К.

Применим процедуру экономизации и LQR критерий для синтеза регулятора для нелинейных систем с интегральной коррекцией в диапазоне ступенчатых воздействий, указанном выше. Структурная схема линейной модели приведена на рис. 15.

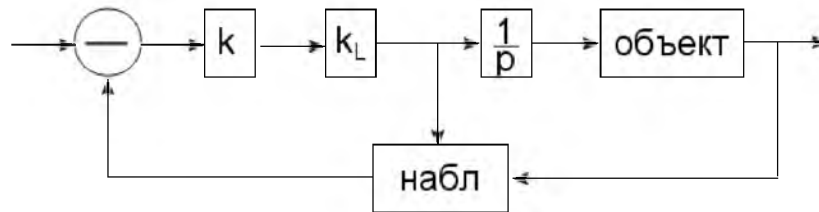


Рис. 15 Структурная схема линейной модели

Наблюдатель синтезировался модальным методом, как и раньше, а матрицы объекта для первой скорости после добавления интегрирующего звена получились в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -26.7 & -26.07 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.78 \\ 78.0886 \end{pmatrix}.$$

Подбирая Q и R останавливаемся на

$$Q = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad R=1 \quad \text{для максимального коэффициента линеаризации } k_L=2.3233.$$

Применение команды *lqr* дает линейный регулятор для линейной модели нелинейной системы, переходные процессы в которых показаны на рис 16. и рис. 17 для различных амплитуд ступенчатых воздействий.

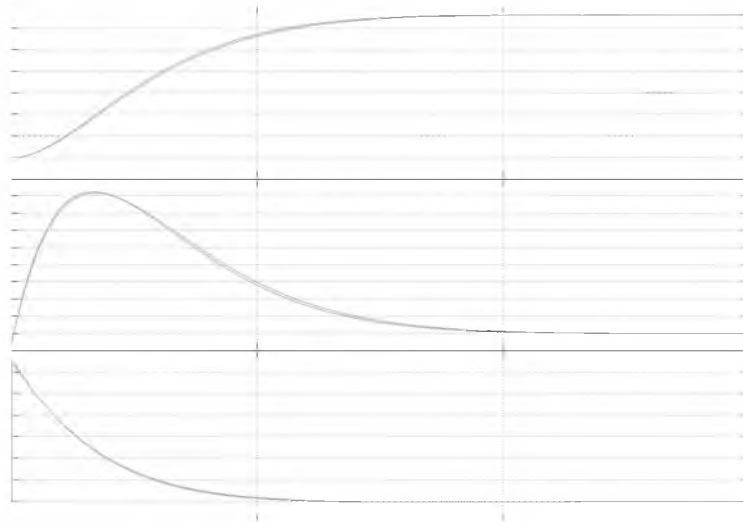


Рис. 16. Переходные процессы для различных амплитуд ступенчатых воздействий.

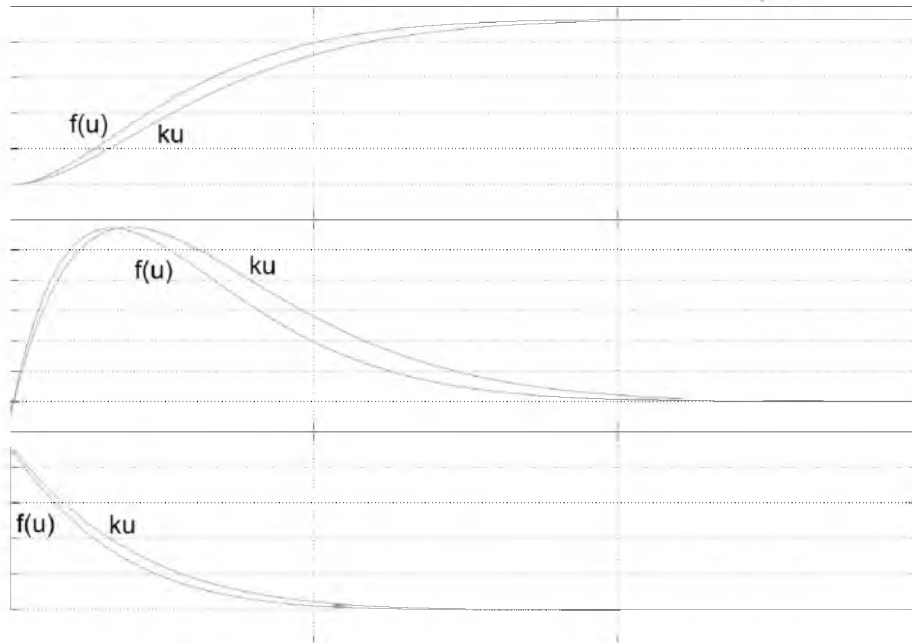


Рис. 17. Переходные процессы для различных амплитуд ступенчатых воздействий

Для второй скорости дизеля матрицы  $A$  и  $B$  принимают вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13.04 & -15.58 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.36 \\ 24.669 \end{pmatrix}.$$

При этом было выбрано  $Q = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$ ,  $R=1$  для коэффициента линеаризации

$k_L=2.3233$ . Соответствующие графики переходных процессов для регулятора, полученного применением команды `lqr`, показаны на рис. 18 и рис. 19.

Для третьей скорости

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20.33 & -18.42 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \\ 21.785 \end{pmatrix}$$

и  $Q = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ ,  $R=1$  для коэффициента линеаризации  $k_L=2.3233$ . Графики переход-

ных процессов в линейных моделях и синтезированной нелинейной системе приведены на рис. 20 и рис. 21.

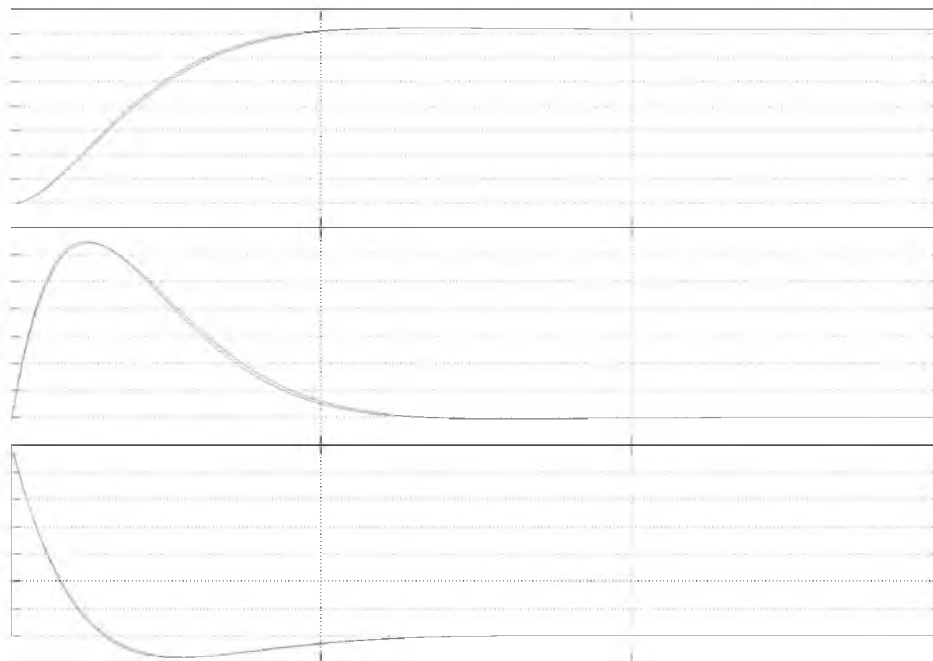


Рис. 18 Графики переходных процессов для регулятора

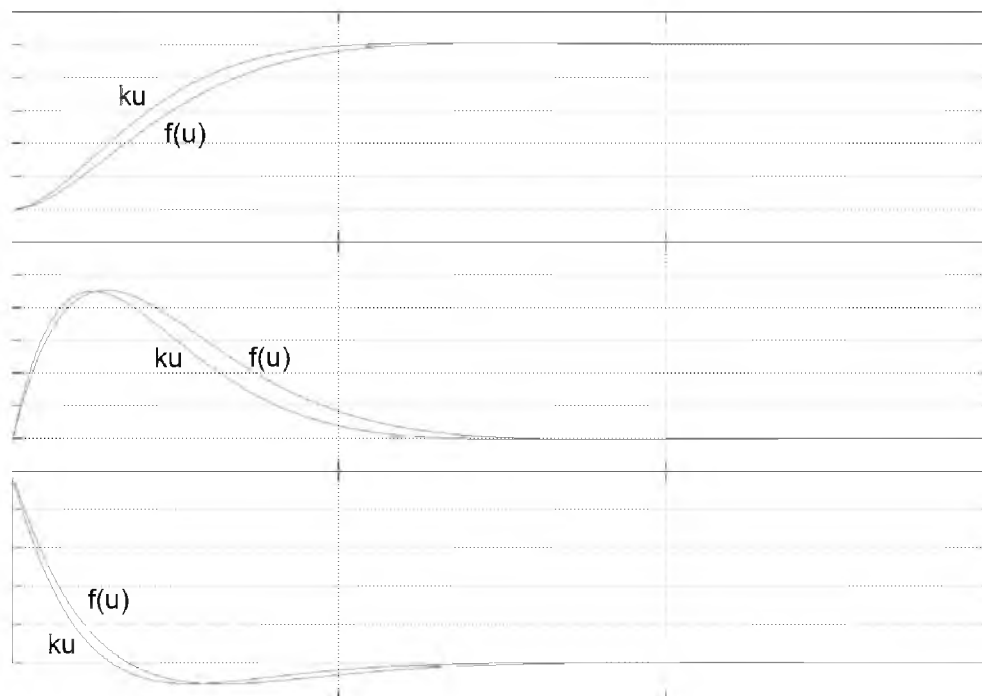


Рис. 19. Графики переходных процессов для регулятора

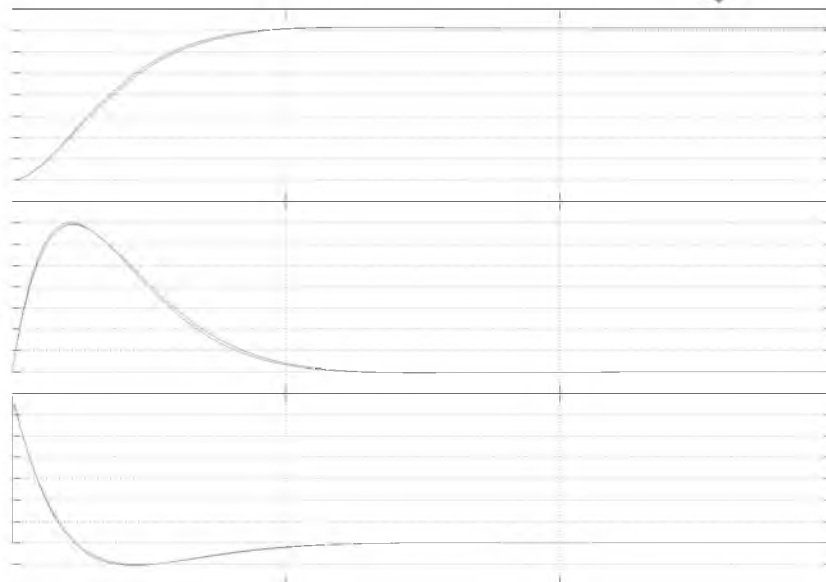


Рис. 20. Графики переходных процессов в линейных моделях и синтезированной нелинейной системе

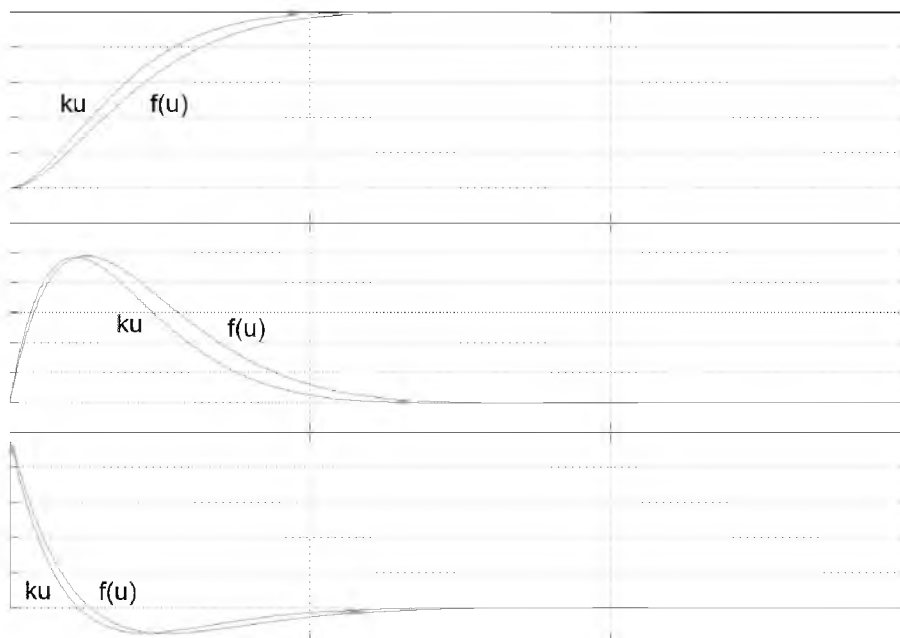


Рис. 21 Графики переходных процессов в линейных моделях и синтезированной нелинейной системе

Из приведенных данных можно заключить, что применение процедуры экономизации позволяет получить нелинейные системы с обратной связью, переходные процессы в которых для всего диапазона ступенчатых воздействий близки к переходным процессам в оптимальных линейных системах, синтезированных с помощью LQR критерия.

### **Заключение**

Численные эксперименты проведенные в пакете MATLAB с процедурой экономизации Ланцоша демонстрируют как существенное увеличение точности, даваемое этим методом по сравнению с обычной тейлоровской аппроксимацией, так и простоту



реализации этой процедуры. Использование линейного приближения, рассмотренного в данной работе, позволило произвести непосредственное распространение двух известных методов линейной теории модального управления и LQR подхода на класс нелинейных объектов управления. Моделирование системы управления морским дизелем в пакете MATLAB подтвердило эффективность предлагаемого подхода к синтезу линейных регуляторов для нелинейных объектов.

#### Литература

1. Kapila V. (editor) Actuator Saturation Control. Marcel Dekker, 2001.
2. Ching S., Kabamba P., Meerkov S. Saturated root locus: theory and application. Proceeding of the 17<sup>th</sup> World Congress IFAC, Seoul, Korea, 15148-15153, 2008.
3. Капалин В.И., Кудряшов Г.Ю. Введение в теорию систем и теорию управления. М.: МИЭМ, 2002.
4. Хемминг Р. Численные методы. М.: Наука, 1972.
5. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1982.
6. Nguyen Huu Khuong. Investigation and simulation of nonlinear models of ship propulsive systems. Ph. d. thesis. Moscow, 1999.
7. Капалин В.И. Метод пространства состояний в теории управления. М.: МИЭМ, 2000.
8. Перельмутер В.М. Пакеты расширения MATLAB: Control System Toolbox и Robust Control Toolbox. М.: Солон-Пресс, 2008.

## ECONOMIZATION PROCEDURE AND DESIGN OF REGULATORS FOR NONLINEAR SYSTEMS

**Kapalin V.<sup>1</sup>**  
**Nguyen Duy Trinh<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Moscow State Institute  
of Electronics and Mathematics  
(Technical University)*

*e-mail: v\_kapalin@mail.ru*

<sup>2</sup>*Ho Chi Minh City University  
of Transports, No 2, D3 street,  
Ward 25, Binh Thanh District,  
Ho Chi Minh City, Vietnam.*

*e-mail: duytrinh1981@gmail.com*

The economization procedure of power series theory is applied for the linearization of nonlinear non-memory elements in control systems and for the modal and optimal design of linear regulators for nonlinear control objects.

**Ключ. сл.**