

ОПТИМИЗАЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА ДЛЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ПРИНЦИП OFDM/OQAM ПЕРЕДАЧИ

В.П. Волчков¹⁾
Д.А. Петров²⁾

¹⁾ *Московский технический
университет связи
и информатики (МТУСИ)*

e-mail: volchkovvalery@mail.ru

²⁾ *Московский
государственный
университет
им. М.В. Ломоносова*

e-mail: dapetroff@gmail.com

Рассматривается алгебраическая процедура получения обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга, обладающего свойством наилучшей локализации одновременно в частотной и временной областях. Вычисляются оптимальные значения фазового параметра такого базиса для нескольких видов симметрии формирующей базисной функции. Представленные в работе результаты моделирования, подтверждают хорошие характеристики локализации и позволяют выбрать наилучший вид симметрии.

Ключевые слова: цифровые системы связи, OFDM, OQAM, базис Вейля-Гейзенберга, ортогонализация, оптимизация.

Известно, что в цифровых системах связи, использующих принцип OFDM передачи, наибольшую спектральную эффективность можно достичь, применяя смещенную квадратурную амплитудную модуляцию (OQAM) и согласованный с этим видом модуляции обобщенный ортогональный базис Вейля-Гейзенберга [1-4]. Передаваемый OFDM/OQAM сигнал в этом случае можно эквивалентно представить в виде комплексной огибающей:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{M-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l}^R \psi_{k,l}^R(t) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l}^I \psi_{k,l}^I(t) \right], \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$\psi_{k,l}^R(t) = g(t-lT) \exp\left(2\pi j F k \left(t - \frac{\alpha T}{2M}\right)\right), \quad (2)$$

$$\psi_{k,l}^I(t) = -jg(t+T/2-lT) \exp\left(2\pi j F k \left(t - \frac{\alpha T}{2M}\right)\right), \quad (3)$$

где $j = \sqrt{-1}$; $c_{k,l}^R = \text{Re}(a_{k,l})$, $c_{k,l}^I = \text{Im}(a_{k,l})$ - действительные и мнимые части комплексных информационных QAM символов $a_{k,l}$; $\psi_{k,l}^R(t)$ и $\psi_{k,l}^I(t)$ - комплексные функции, полученные в результате равномерных сдвигов по времени и частоте двух инициализирующих функций $g(t)$ и $g(t+T/2)$; $M \geq 2$ - количество поднесущих; $F = 1/T$ - расстояние между поднесущими; T - символьный временной период; $\alpha \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ - фазовый параметр. Система функций $\mathcal{B}[\mathbb{R}] = \{\psi_{k,l}^R(t), \psi_{k,l}^I(t)\}$ нормирована и ортогональна

$$\langle \psi_{k,l}^R(t), \psi_{k',l'}^R(t) \rangle_R = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad \langle \psi_{k,l}^I(t), \psi_{k',l'}^I(t) \rangle_R = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad \langle \psi_{k,l}^R(t), \psi_{k',l'}^I(t) \rangle_R = 0 \quad (4)$$

¹⁾ Обычный базис Вейля-Гейзенберга задается на символьном интервале только одной инициализирующей функцией $g(t)$ [5].



в смысле вещественного скалярного произведения $\langle x(t), y(t) \rangle_R = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$ и называется обобщенным ортогональным базисом Вейля-Гейзенберга. При этом для модулирующих OQAM коэффициентов справедливы выражения:

$$c_{k,l}^R = \langle s(t), \psi_{k,l}^R(t) \rangle_R, \quad c_{k,l}^I = \langle s(t), \psi_{k,l}^I(t) \rangle_R.$$

Запишем теперь модель OFDM/OQAM сигнала в дискретном времени. Если формирующий фильтр $g(t)$ имеет полосу пропускания $F = 1/T$, то с учетом M сдвигов в частотной области ширина спектра сигнала $s(t)$ равна $W = M/T$. Полагая M четным, нетрудно убедиться, что на конечном временном интервале $[0, NT]$ дискретизированный с частотой $f_d = W$ сигнал (1) и соответствующий дискретный базис Вейля-Гейзенберга $\mathbf{V}[J_N]$ принимают вид:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^R \psi_{k,l}^R[n] - \sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^I \psi_{k,l}^I[n] \right), \quad n \in J_N \quad (5)$$

$$\psi_{k,l}^R[n] = g[(n - lM)_{\text{mod } N}] \exp\left(j \frac{2\pi}{M} k(n - \alpha/2)\right), \quad (6)$$

$$\psi_{k,l}^I[n] = -jg[(n + M/2 - lM)_{\text{mod } N}] \exp\left(j \frac{2\pi}{M} k(n - \alpha/2)\right), \quad (7)$$

$$\mathbf{V}[J_N] \square \{ \psi_{k,l}^R[n], \psi_{k,l}^I[n] \}, \quad (8)$$

где $s[n] = s(nT/M)$, $g[n] = g(nT/M)$; $J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, $N = M \cdot L \geq M$ (L - любое натуральное число). Система базисных функций $\mathbf{V}[J_N]$ является дискретным аналогом системы $\mathbf{V}[\square]$ и ортогональна в смысле вещественного скалярного произведения на дискретном интервале J_N :

$$\langle x[n], y[n] \rangle_R = \text{Re} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \bar{y}[n]. \quad (9)$$

Условие ортогональности (4) в этом случае можно представить в матричном виде

$$\text{Re}(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) = \mathbf{I}_{2N}, \quad (10)$$

где “*” - символ эрмитового сопряжения; \mathbf{I}_{2N} - единичная $(2N \times 2N)$ -матрица; $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_I)$ - блочная прямоугольная матрица размерности $(N \times 2N)$, у которой блоки \mathbf{U}_R , \mathbf{U}_I - квадратные $(N \times N)$ -матрицы, составленные из столбцов соответствующих базисных функций $\bar{\psi}_{k,l}^R = (\psi_{k,l}^R[0], \dots, \psi_{k,l}^R[N-1])^T$, $\bar{\psi}_{k,l}^I = (\psi_{k,l}^I[0], \dots, \psi_{k,l}^I[N-1])^T$ для всех значений индексов $k = 0, \dots, M-1$, $l = 0, \dots, L-1$. Формула (5) описывает алгоритм формирования (модуляции) OFDM/OQAM сигнала в дискретном времени. Соответствующий алгоритм демодуляции имеет вид:

$$c_{k,l}^R = \langle s[n], \psi_{k,l}^R[n] \rangle_R, \quad c_{k,l}^I = \langle s[n], \psi_{k,l}^I[n] \rangle_R.$$

Для построения робастной OFDM/OQAM системы, то есть наименее чувствительной к частотно-временному рассеянию канала, необходимо решить задачу синтеза обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга, для которого функция неопределенности формирующего импульса



$$\Psi_g(t, f) = Ag(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t/2) \overline{g(x-t/2)} \exp(-2\pi jfx) dx$$

обладает максимальной локализацией одновременно по t и f .

В [4] был предложен общий алгебраический подход построения таких базисов. В данной работе будет показано, что характеристики локализации базисов могут быть улучшены, если решить дополнительную задачу оптимизации по выбору фазового параметра α в формулах (5)-(7). Приводятся решения данной задачи при различных ограничениях на структуру формирующих функций $g[n]$ и соответствующие результаты моделирования.

Синтез обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга

По аналогии с предыдущим, определим комплексный сигнальный базис с желаемыми характеристиками локализации по времени и частоте в виде блочной матрицы

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_R, \mathbf{G}_I], \quad (11)$$

$$G_R(n, lM+k) = \psi_{k,l}^R[n] \Big|_{g(t)=g_0(t)}, \quad G_I(n, lM+k) = \psi_{k,l}^I[n] \Big|_{g(t)=g_0(t)}, \quad (12)$$

где $n = 0, \dots, N-1$, $k = 0, \dots, M-1$, $l = 0, \dots, L-1$, матрица \mathbf{G}_R определяет базис подпространства для действительных компонент, модулирующих OQAM символов $c_{k,l}^R$, а матрица \mathbf{G}_I - для мнимых компонент $c_{k,l}^I$. Формирующая функция $g_0(t)$ определяет характеристики локализации данного базиса. Например, в качестве $g_0(t)$ может быть выбран Гауссиан $g_0(t) = (2\sigma)^{-1/4} \exp(-\pi\sigma t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, обладающий наилучшими характеристиками локализации по времени и частоте [4]. Полученный в этом случае базис (8) $\mathbf{V}_0[J_N]$ называется базисом Габора, а \mathbf{G} - матрицей Габора.

Отметим, что \mathbf{G} не удовлетворяет условию ортогональности (10), то есть, базис Габора не является ортогональным.

Обозначим через $M_{m,n}(F)$ множество всех матриц размера $m \times n$ над полем F . Если $m = n$, будет использоваться сокращенная запись $M_n(F)$. Здесь F или поле вещественных чисел \mathbb{R} или поле комплексных чисел \mathbb{C} , кроме того, обозначим через \mathbb{Z} множество целых чисел.

Рассматривается задача для нахождения матрицы \mathbf{U} обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга, наиболее близкой к матрице базиса Габора \mathbf{G} по матричной норме $\|\mathbf{A}\|_E^2 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$.

Задача 1. На подмножестве $\mathbf{A} = \{\mathbf{U} \in M_{N \times N}(\mathbb{C}) : \text{Re}(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) = \mathbf{I}_{2N}\}$ комплексных ортогональных матриц, для которых справедливо выражение

$$\text{Re}(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) = \mathbf{I}_{2N} \quad (13)$$

найти оптимальную матрицу \mathbf{U}_{opt} , которая доставляет минимум в задаче на экстремум

$$\mathbf{U}_{opt} : \min_{\mathbf{U} \in \mathbf{A}} \|\mathbf{G} - \mathbf{U}\|_E^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{G} \in M_{N \times N}(\mathbb{C})$ - матрица базиса Габора.

Отметим, что решение \mathbf{U}_{opt} будет задавать ортогональный базис (8) с наилучшими характеристиками локализации.



Нахождение экстремума \mathbf{U}_{onn} , если решить следующую вспомогательную задачу.

Задача 2. На множестве $V = \{\mathbf{V} \in M_{2N}(\mathbb{R}) : \mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}_{2N}\}$ вещественных ортогональных матриц найти оптимальную матрицу \mathbf{V}_{onn} , которая доставляет минимум в задаче

$$\mathbf{V}_{onn} : \min_{\mathbf{V} \in V} \|\mathbf{G}_B - \mathbf{V}\|_E^2, \quad (15)$$

где $\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} \text{Re } \mathbf{G} \\ \text{Im } \mathbf{G} \end{bmatrix} \in M_{2N}(\mathbb{C})$ задается комплексной матрицей базиса Габора \mathbf{G} .

В работе [4] показано, что экстремальные задачи (14) и (15) эквивалентны, а их решения связаны соотношением

$$\mathbf{U}_{onn} = \mathbf{V}_{1onn} + j\mathbf{V}_{2onn}, \quad (16)$$

где матрицы $\mathbf{V}_{1onn}, \mathbf{V}_{2onn} \in M_{N \times 2N}(\mathbb{R})$ находятся из блочного разбиения:

$$\mathbf{V}_{onn} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1onn} \\ \mathbf{V}_{2onn} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица \mathbf{U}_{onn} искомого оптимального базиса Вейля-Гейзенберга (8) может быть получена из решения задачи 2 по формуле (16). В [4] показано, что матрица \mathbf{V}_{onn} определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Оптимальная матрица \mathbf{V}_{onn} , доставляющая максимум в экстремальной задаче (15), определяется выражением

$$\mathbf{V}_{onn} = \mathbf{S}\mathbf{W}^T, \quad (17)$$

где $\mathbf{S}, \mathbf{W} \in V$ – пара действительных ортогональных матриц, входящих в сингулярное разложение матрицы $\mathbf{G}_B = \mathbf{S}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^T$.

Матрицы \mathbf{S}, \mathbf{W} составлены из собственных векторов матриц $\mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T$ и $\mathbf{G}_B^T \mathbf{G}_B$, соответственно; $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{i,j}) \in M_{2N}$ – диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят сингулярные числа $\sigma_i = \sigma_{ii}$ матрицы \mathbf{G}_B , упорядоченные в порядке невозрастания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{2N} \geq 0$.

Значение достигаемого экстремума в задаче (15) равно

$$\min_{\mathbf{V} \in V} \|\mathbf{G}_B - \mathbf{V}\|_E^2 = \|\mathbf{G}_B - \mathbf{V}_{onn}\|_E^2 = \sum_{i=1}^{2N} (\sigma_i - 1)^2, \quad (18)$$

а оптимальная формирующая функция $g[n]$, $n \in J_N$ для базиса (8) задается первым столбцом этой матрицы, то есть

$$g[n] = U_{onn}(n, 1). \quad (19)$$

Дополнительная оптимизация по фазовому параметру α

Отметим, что α выступает в качестве параметра в задачах (14) и (15) (см. (6)-(8)). Поэтому значение достигаемого экстремума (18) представляет собой некоторую функцию от $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$F(\alpha) = \|\mathbf{G}_B(\alpha) - \mathbf{V}_{onn}\|_E^2. \quad (20)$$



Следовательно, можно дополнительно уменьшить значение минимума и улучшить локализацию базиса, решив дополнительную экстремальную задачу:

$$F(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha \in \Omega}, \quad (21)$$

то есть найти

$$\alpha_{opt} : \min_{\alpha \in \Omega} \left(\left\| \mathbf{G}_B(\alpha) - \mathbf{V}_{opt} \right\|_E^2 \right). \quad (22)$$

Обозначим

$$F_o(\alpha) = \left\| \mathbf{G}_B(\alpha) \mathbf{G}_B^T(\alpha) - \mathbf{I} \right\|_E^2. \quad (23)$$

Лемма 1. Для любого $\alpha \in \Omega$ функция (23) мажорирует функцию (20), то есть

$$F(\alpha) = \left\| \mathbf{G}_B(\alpha) - \mathbf{V}_{opt} \right\|_E^2 \leq \left\| \mathbf{G}_B(\alpha) \mathbf{G}_B^T(\alpha) - \mathbf{I} \right\|_E^2 = F_o(\alpha).$$

Из леммы 1 непосредственно следует, что минимизация функции $F_o(\alpha)$ по α приведет к минимизации функции $F(\alpha)$. Поэтому экстремальная задача (21) сводится к задаче $F_o(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha \in \Omega}$, то есть

$$\alpha_{opt} : \min_{\alpha \in \Omega} \left(\left\| \mathbf{G}_B(\alpha) \mathbf{G}_B^T(\alpha) - \mathbf{I} \right\|_E^2 \right). \quad (24)$$

Заметим, что $\left\| \mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T - \mathbf{I} \right\|_E^2 = \text{tr} \left[\left(\mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T \right)^2 \right] - 2 \text{tr} \left[\mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T \right] + 2N$. Следовательно, задача (24) эквивалентна экстремальной задаче

$$\text{tr} \left[\left(\mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T \right)^2 \right] - 2 \text{tr} \left[\mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T \right] \rightarrow \min_{\alpha \in \Omega}. \quad (25)$$

Введем обозначение: $\mathbf{B} = \mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T$. Можно показать, что $\text{tr}(\mathbf{B})$ не зависит от α , поэтому вместо (25) получаем следующую экстремальную задачу для нахождения α_{opt} :

$$\text{tr} \left[\left(\mathbf{G}_B \mathbf{G}_B^T \right)^2 \right] = \text{tr} \left[\mathbf{B}^2 \right] \rightarrow \min_{\alpha \in \Omega}. \quad (26)$$

Изменим группировку элементов блочной матрицы \mathbf{G}_B следующим образом: переставим строки так, что сначала идет строка из блока $[\text{Re } \mathbf{U}_R \quad \text{Re } \mathbf{U}_I]$, затем из блока $[\text{Im } \mathbf{U}_R \quad \text{Im } \mathbf{U}_I]$, потом опять из блока $[\text{Re } \mathbf{U}_R \quad \text{Re } \mathbf{U}_I]$ и т.д. Полученную матрицу обозначим $\tilde{\mathbf{G}}_B$. Ей соответствует матрица $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{G}}_B \tilde{\mathbf{G}}_B^T$. Нетрудно убедиться, что такая перестановка не меняет сумму диагональных элементов матрицы \mathbf{B} , поэтому $\text{tr}[\tilde{\mathbf{B}}^2] = \text{tr}[\mathbf{B}^2]$.

В дальнейшем, будем использовать не матрицу \mathbf{B} , а матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$. При этом, задача (26) принимает эквивалентный вид:

$$\text{tr} \left[\left(\tilde{\mathbf{G}}_B \tilde{\mathbf{G}}_B^T \right)^2 \right] = \text{tr} \left[\tilde{\mathbf{B}}^2 \right] \rightarrow \min_{\alpha \in \Omega}. \quad (27)$$

Представим матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$ в следующем виде:



$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{B}_m = \sum_{m=0}^{M-1} (\tilde{\mathbf{U}}(\alpha))^m \mathbf{A} (\tilde{\mathbf{U}}^T(\alpha))^m, \quad (28)$$

где непосредственной проверкой можно установить, что \mathbf{A} – симметрическая матрица размерности $2N \times 2N$, не зависящая от α и имеющая следующую структуру:

$$\mathbf{A} = \sum_{l=0}^L \mathbf{G}_l \mathbf{G}_l^T, \quad \mathbf{G}_l = [\mathbf{G}_l^{(1)} \quad \mathbf{G}_l^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{G}_l^{(N)}]^T.$$

Здесь \mathbf{G}_l – блочная матрица размерности $2N \times 2$, а $\mathbf{G}_l^{(n)} = \begin{bmatrix} G_{l,R}^{(n)} & 0 \\ 0 & G_{l,I}^{(n)} \end{bmatrix}$ – диагональная матрица размерности 2×2 с элементами

$$G_{l,R}^{(n)} = g[(n-1-lM)_{\text{mod } N}], \quad G_{l,I}^{(n)} = g[(n-1-lM + M/2)_{\text{mod } N}], \quad n \in J_N.$$

Таким образом, \mathbf{A} представляется в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{N1} & \dots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{k,l} = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{G}_l^{(k)} \mathbf{G}_l^{(l)}$ – симметрические матрицы размерности 2×2 .

Матрица $\tilde{\mathbf{U}}(\alpha)$, входящая в (28), является блочно-диагональной матрицей размерности $2N \times 2N$:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_2(\alpha) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{U}_N(\alpha) \end{bmatrix},$$

на диагонали которой находятся матрицы вращения размерности 2×2 :

$$\mathbf{U}_{n+1}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/M(n-\alpha/2)) & -\sin(2\pi/M(n-\alpha/2)) \\ \sin(2\pi/M(n-\alpha/2)) & \cos(2\pi/M(n-\alpha/2)) \end{bmatrix}, \quad n \in J_N.$$

В итоге мы получаем следующую структуру матрицы \mathbf{B}_m :

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} (\mathbf{U}_1)^m \mathbf{A}_{1,1} (\mathbf{U}_1^T)^m & (\mathbf{U}_1)^m \mathbf{A}_{1,2} (\mathbf{U}_2^T)^m & \dots & (\mathbf{U}_1)^m \mathbf{A}_{1,N} (\mathbf{U}_N^T)^m \\ (\mathbf{U}_2)^m \mathbf{A}_{2,1} (\mathbf{U}_1^T)^m & (\mathbf{U}_2)^m \mathbf{A}_{2,2} (\mathbf{U}_2^T)^m & \dots & (\mathbf{U}_2)^m \mathbf{A}_{2,N} (\mathbf{U}_N^T)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{U}_N)^m \mathbf{A}_{N,1} (\mathbf{U}_1^T)^m & (\mathbf{U}_N)^m \mathbf{A}_{N,2} (\mathbf{U}_2^T)^m & \dots & (\mathbf{U}_N)^m \mathbf{A}_{N,N} (\mathbf{U}_N^T)^m \end{bmatrix}. \quad (29)$$

В этих обозначениях задача (27) принимает вид:

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{B}}^2) = \text{tr} \left(\left(\sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{B}_m \right)^2 \right) = \sum_{m=0}^{M-1} \text{tr}((\mathbf{B}_m)^2) + \sum_{m_1=0, m_2 \neq m_1}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} \text{tr}(\mathbf{B}_{m_1} \mathbf{B}_{m_2}) \rightarrow \min_{\alpha \in \mathbb{I}}. \quad (30)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы:



Лемма 2. $\sum_{m=0}^{M-1} \text{tr}(\mathbf{B}_m)^2$ не зависит от α .

Эта лемма позволяет вместо задачи (30) рассматривать задачу

$$f(\alpha) = \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2 \neq m_1=0}^{M-1} \text{tr}(\mathbf{B}_{m_1} \mathbf{B}_{m_2}) \rightarrow \min_{\alpha \in \Delta},$$

которая с учетом (29) после преобразований приобретает вид

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \Gamma_{n,k}^2 \left[\sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2 \neq m_1=0}^{M-1} \cos \left[\Delta \frac{2\pi}{M} (k+n-\alpha) \right] \right] \right\} \rightarrow \min_{\alpha \in \Delta}, \quad (31)$$

$$\text{где } \Delta \in (m_1 - m_2), \Gamma_{k,n}^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{l=0}^{L-1} G_{l,R}^{(k+1)} G_{l,R}^{(n+1)} \right) - \left(\sum_{l=0}^{L-1} G_{l,I}^{(k+1)} G_{l,I}^{(n+1)} \right) \right)^2.$$

Необходимым условием минимума функции $f(\alpha)$ является равенство нулю ее производной: $f'(\alpha) = 0$. Это условие выполняется, если

$$\sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0; m_1 \neq m_2}^{M-1} \left\{ \Delta \frac{2\pi}{M} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Gamma_{n,k}^2 \sin \left(\Delta \frac{2\pi}{M} (k+n-\alpha) \right) \right] \right] \right\} = 0. \quad (32)$$

Будем рассматривать только внутренние суммы по n и k для любых фиксированных $m_1 = 0, 1, \dots, M-1$; $m_2 = 0, 1, \dots, M-1$; $m_1 \neq m_2$, то есть, для любого фиксированного $\Delta = 1, 2, \dots, M-1$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Gamma_{n,k}^2 \sin \left(\Delta \frac{2\pi}{M} (k+n-\alpha) \right) \right]. \quad (33)$$

Введем обозначение $p = n - k$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, $k = n - p$ и перейдем в (33) к суммированию по индексам n и p :

$$\sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{n=p}^{N-1} \Gamma_p^2(n) \sin \left(\Delta \frac{2\pi}{M} (2n-p-\alpha) \right) \right], \quad (34)$$

$$\Gamma_p^2(n) = \Gamma_{n-p,n}^2. \quad (35)$$

Достаточно рассмотреть только внутреннюю сумму выражения (34) при фиксированных $p = 0, 1, \dots, N-1$:

$$\sum_{n=p}^{N-1} \Gamma_p^2(n) \sin \left(\Delta \frac{2\pi}{M} (2n-p-\alpha) \right) = \sum_{n=p/2}^{N-1+p/2} \Gamma_p^2 \left(n + \frac{p}{2} \right) \sin \left(\Delta \frac{4\pi}{M} \left(n - \frac{\alpha}{2} \right) \right). \quad (36)$$

В дальнейшем, нам потребуется воспользоваться свойствами симметрии функций дискретного аргумента $\Gamma_p^2(n)$ и $g[n]$. В общем случае эти свойства определяются для произвольной комплексной функции, заданной на конечном интервале J_N [7].

Определение 1. Функция дискретного аргумента $g[n]$ называется $(N-1)$ -симметричной (или просто симметричной), если

$$g[N-1-n] = g[n], \quad n \in J_N. \quad (37)$$



Определение 2. Функция дискретного аргумента $g[n]$ обладает свойством сопряженной N -симметрии, если

$$g[n] = g^* [(-n)_{\text{mod} N}] = \begin{cases} g^*[0], & \text{если } n = 0 \\ g^*[N-k], & \text{если } n \neq 0 \ (n = 1, \dots, N-1) \end{cases} \quad (38)$$

Если $g[n]$ является действительной функцией, свойство приобретает вид:

$$g[n] = g [(-n)_{\text{mod} N}] = \begin{cases} g[0], & \text{если } n = 0 \\ g[N-n], & \text{если } n \neq 0 \ (n = 1, \dots, N-1). \end{cases} \quad (39)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 3. Пусть функция $g[n]$ является $(N-1)$ -симметричной. Тогда функция (35) обладает следующими свойствами симметрии и периодичности:

1. N – периодичность: $\Gamma_p^2 \left(N + n + \frac{p}{2} \right) = \Gamma_p^2 \left(n + \frac{p}{2} \right)$
2. $(N-1)$ – симметрия: $\Gamma_p^2 \left(N - 1 - n + \frac{p}{2} \right) = \Gamma_p^2 \left(n + \frac{p}{2} \right)$
3. $M/2$ – периодичность: $\Gamma_p^2 \left(n + \frac{M}{2} + \frac{p}{2} \right) = \Gamma_p^2 \left(n + \frac{p}{2} \right)$
4. $(M/2-1)$ – симметрия: $\Gamma_p^2 \left(\frac{M}{2} - 1 - n + \frac{p}{2} \right) = \Gamma_p^2 \left(n + \frac{p}{2} \right)$.

В рассматриваемой сумме (36) синус имеет период $M/(2\Delta)$, т.е. на одном $M/2$ периоде функции $\Gamma_p^2(n)$ укладывается целое число периодов синуса.

Из леммы 3 следует, что на любом периодическом интервале $J_{\beta, M/2} \square [\beta M/2, (\beta+1)M/2-1] \subset J_N$, где $\beta \in J_{2N/M} = \{0, 1, \dots, 2N/M-1\}$, функция $\sin \left(\Delta \frac{4\pi}{M} (n - \alpha/2) \right)$ является четной, а функция $\Gamma_p^2(n + p/2)$ – нечетной относительно середины отрезка $J_{\beta, M/2}$, то есть точки $M/4 - 1/2 + \beta M/2$.

Таким образом, для того, чтобы сумма (36) обращалась в ноль, необходимо и достаточно, чтобы на каждом периоде $J_{\beta, M/2}$ нулевое значение синуса попадало в точку симметрии функции $\Gamma_p^2(n)$:

$$\sin \left(\frac{4\pi}{M} \Delta \left(\frac{M}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = 0. \quad (40)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\alpha = \frac{M}{2} - 1 + q \frac{M}{2}, \quad q \in \square. \quad (41)$$

При этом значении α сумма (36) обращается в ноль для любых $p = 0, 1, \dots, N-1$, следовательно, выполняется условие (32), поэтому α является экстремальной точкой функции $f(\alpha)$.

Проведенное рассмотрение позволяет сформулировать следующую теорему

Теорема 2. Пусть дискретная формирующая функция $g[n]$, $n \in J_N$, входящая в описание (6)-(8) обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга $V[J_N]$,



удовлетворяет свойству $(N-1)$ -симметрии (37). Тогда наилучшая локализация базиса $B[J_N]$ по критерию (21), а значит и критерию :

$$\|G(\alpha) - U\|_E^2 \rightarrow \min_{\alpha \in \square} \left(\min_{U \in A} \right), \quad (42)$$

достигается при значениях $\alpha_{opt} = M/2 - 1 + qM/2$, $q \in \square$.

Аналогичное исследование можно провести и для случая, когда функция $g[n]$ удовлетворяет свойству сопряженной N -симметрии (39). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 формирующая функция $g[n]$ удовлетворяет свойству сопряженной N -симметрии (39). Тогда наилучшая, в смысле критерия (42), локализация обобщенного ортонормированного базиса Вейля-Гейзенберга $B[J_N]$ достигается при значения параметра $\alpha_{opt} = M/2 + qM/2$, $q \in \square$.

Результаты моделирования

На рис.1 представлены графики дискретной базисной функции Габора и оптимальной базисной функций (19) на интервале от 0 до $N-1$, где $N = LM$ ($L=12$, $M=16$), в случае $(N-1)$ -симметрии при значении $\alpha = \alpha_{opt} = M/2 - 1$. Для наглядности кривые сдвинуты в середину интервала. Видно, что оптимальная базисная функция $g[n - N/2]$ достаточно близка к исходной функции Габора $g_0[n - N/2]$.

Смещение α от оптимального α значения приводит к исчезновению симметрии формирующего импульса и к увеличению его «боковых лепестков» (рис.2). При $\alpha > \alpha_{opt} = M/2 - 1$ увеличиваются боковые лепестки справа, а при $\alpha < \alpha_{opt}$ – слева.

Общие закономерности поведения базисных функций сохраняются и для случая сопряженной N -симметрии.

При этом, как видно из результатов расчета, представленных в таблице 1, оптимальным с точки зрения локализации базиса по критерию (42) является случай сопряженной N -симметрии (39).

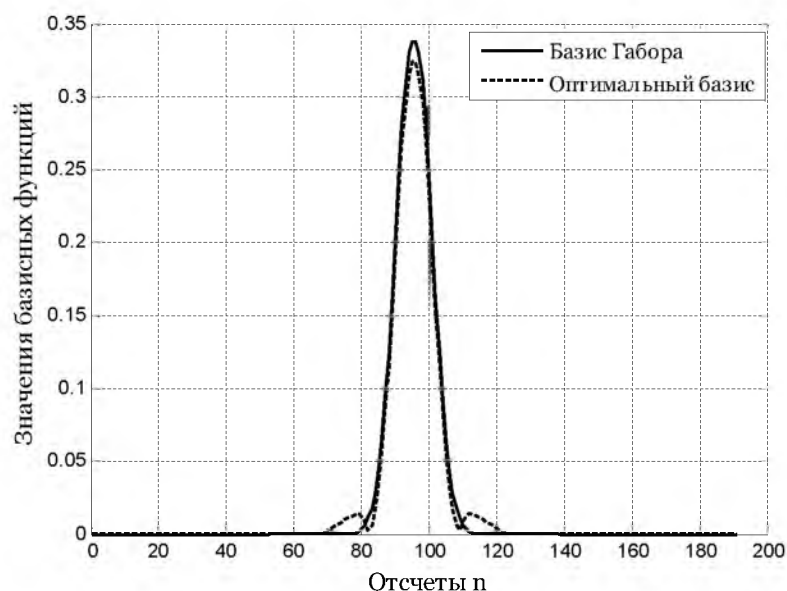


Рис.1. Графики исходной базисной функции Габора $g_0[n - N/2]$ и оптимальной базисной функции $g[n - N/2]$ при $\alpha_{opt} = M/2 - 1$

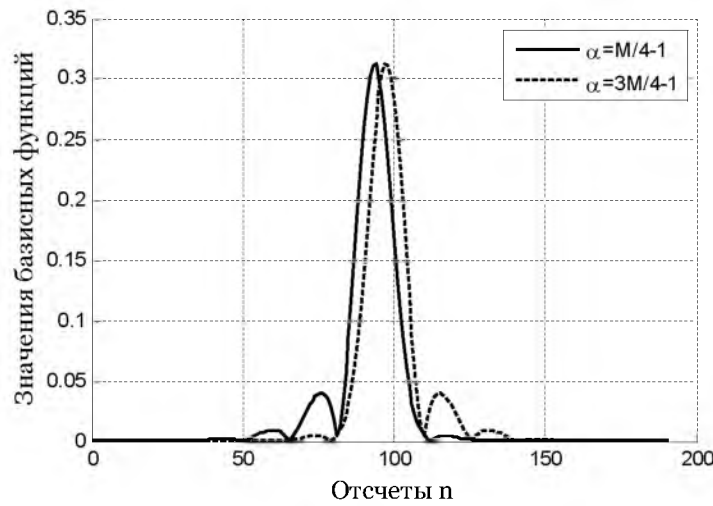


Рис.2. Графики базисной функции $g[n - N/2]$ при $\alpha \neq \alpha_{opt}$ ($\alpha = M/4 - 1 < \alpha_{opt}$, $\alpha = 3M/4 - 1 > \alpha_{opt}$)

Таблица 1

Норма разности $F(\alpha)$ между матрицами базисов для различных α ($L=12, M=16$)

	Неоптимальное значение $\alpha = 12$	Неоптимальное значение $\alpha = 4$	$\alpha = M/2 - 1 = 7$	$\alpha = M/2 = 8$
(N-1)-симметрия	41,28	18,06	2,84	4,61
Сопряженная N-симметрия	29,42	29,42	3,07	1,15

На рис.3 видно, что модуль спектра $g_*[k] \square \frac{1}{\sqrt{N}} \left| \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{-j2\pi kn/N} \right|$ базисной функции $g[n]$ не зависит от α и является четной функцией.

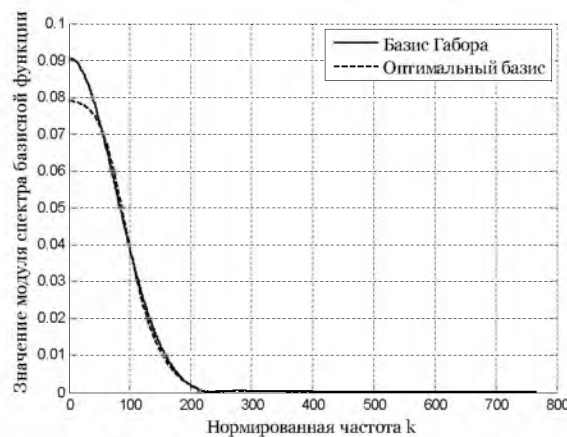


Рис.3. Графики модуля спектра базисной функции Габора $g_{o*}[k]$ и оптимальной базисной функции $g_*[k]$ ($\alpha \in \square$)



Выводы

Приведенный в работе результат показывает, что дополнительная оптимизация по фазовому параметру α позволяет значительно улучшить характеристики локализации базисов в частотно-временной области.

Выбор оптимального значения α зависит от вида симметрии формирующего импульса $g[n]$. Показано, что наилучшая локализация обеспечивается в случае сопряженной N - симметрии.

Отклонение от полученного оптимального значения α_{opt} приводит к нарушению симметрии формирующей базисной функции во временной области, и как следствие к ухудшению ее временной локализации. Однако, при этом хорошая локализация в частотной области сохраняется.

Полученные результаты могут быть использованы для построения цифровых OFDM/OQAM систем с хорошими частотно-временными характеристиками локализации. Применение таких базисов позволяет формировать оптимальные OFDM сигналы, обладающие наименьшей чувствительностью к межканальной и межсимвольной интерференции и низким уровнем внеполосного излучения [3,4].

Литература

1. Прокис, Дж. Цифровая связь [Текст]: пер. с англ. / Дж. Прокис; Под ред. Д.Д. Кловского. – Москва: Радио и связь, 2000.
2. Le Floch B. Coded Orthogonal Frequency Division Multiplex [Текст] / B. Le Floch, M. Alard, C. Berrou // Proceedings of the IEEE. – 1995. – vol.83. – №6. – P. 982-986.
3. Bolcskei, H. Efficient design of OFDM/OQAM pulse shaping filter [Текст] / H. Bolcskei, D. Duhamel, R. Hleiss // Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC 99). – 1999. – vol.1. – P. 559-564.
4. Волчков, В. П. Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией [Текст] / В. П. Волчков // Журнал «Электросвязь». – 2007. – №2. – С. 21-25.
5. Kozek, W. Nonorthogonal pulseshapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels [Текст] / W. Kozek, A. F. Molisch // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1998. – vol.16. – №8. – P. 1579-1589.
6. Хорн, Р. Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – Москва: Мир, 1989.
7. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – Москва: Техносфера, 2006.

ORTHOGONAL WEYL-HEISENBERG BASIS OPTIMISATION FOR DIGITAL COMMUNICATION SYSTEMS BASED ON OFDM/OQAM

V.P. Volchkov¹
D.A. Petrov²

The article considers the algebraic method of receiving of generalized orthogonal Weyl-Heisenberg basis well localized simultaneously in time and frequency domain. Optimal magnitudes of phase parameter are calculated given several type of symmetry of basis prototype function. Presented results of calculation confirm good localization characteristics and let to select the best type of symmetry.

Key words: digital communication systems, OFDM, OQAM, Weyl-Heisenberg basis, orthogonalization, optimization.