МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НАКОПИТЕЛЬНЫХ ФОНДОВ

М.Ф.ТУБОЛЬЦЕВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Tuboltsev@bsu.edu.ru

В статье рассматриваются вопросы математического моделирования систем накопительных фондов и, в частности, вопросы оптимального планирования процесса накопления по критерию минимизации вложенных средств.

Отличительной особенностью рассматриваемой здесь постановки задачи оптимизации является то, что решаемая оптимизационная задача не является классической, поскольку накопительные фонды формируются к различным моментам времени.

В такой постановке рассмотренная модель наиболее точно отражает реальную ситуацию, а задача оптимизации и алгоритм ее решения потенциально имеют многочисленные применения в математической экономике и финансовой математике.

Предложенный алгоритм решения задачи оптимизации накопительных фондов допускает эффективную реализацию с помощью современных вычислительных средств.

Ключевые слова: оптимизация, принцип максимума, накопительные фонды.

В условиях финансового кризиса стоимость заемных средств неуклонно возрастает. Существует большое количество финансовых инструментов для финансирования инвестиционных проектов. Подавляющее большинство из них представляют собой прямые или косвенные заимствования финансовых активов. Основное достоинство заимствований – скорое получение нужного финансового актива; основной недостаток – достаточно долгий период возврата и связанные с этим риски. Альтернативными источниками финансирования инвестиционных проектов могут стать накопительные фонды [1], особенно в настоящее время, когда заемные средства растут в цене.

Вопросы создания накопительных фондов являются достаточно проработанными в теоретическом плане [2,3,4,5,6]. Теоретической базой разработки оптимальных стратегий создания накопительных фондов является принцип максимума Понтрягина [7]. В линейных задачах, а именно к этому типу задач относится задача оптимизации процесса накопления фондов, принцип максимума Понтрягина дает необходимые и достаточные условия оптимальности [8].

Пусть финансирование осуществляется из одного постоянного источника (это не ограничивает общность рассмотрения, поскольку на практике средства выделяются из текущего бюджета). Формирование фондов осуществляется параллельно. Функция времени $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots n$, представляет собой размер фонда с номером i в момент времени t, а общее число фондов n. В начальный момент времени $t_н$ размеры фондов равны 0; а в определенные моменты времени $t^i_к$ (для каждого фонда свой) фонды должны иметь фиксированные размеры $S_i>0$.

Таким образом, накопление фондов начинается одновременно, а завершаются процессы накопления в разные моменты. Тем самым краевая задача становится не классической, и требуются новые средства для ее решения. Тем не менее, принцип максимума Понтрягина и в этом случае может служить основой для выделения среди допустимых решений оптимального решения.

Выбор критерия оптимизации в общем случае не однозначен, но поскольку критерий по быстродействию в данном случае неприменим, то основным можно признать критерий минимального вложения средств. Можно использовать в качестве целевой функции дисконтированную сумму вложенных средств. Но, во-первых, это не вносит в решение ничего принципиально нового, а, во-вторых, требует задания ставки дисконтирования, выбор которой достаточно произволен.

Задача минимального вложения средств формулируется следующим образом. Если обозначить интенсивность финансовых вложений в фонд с номером i в момент времени t как $u_i(t)$, а интенсивность источника финансирования через U, то математическая модель создания накопительных фондов задается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = p_i x_i(t) + u_i(t)$$

Точкой обозначен оператор дифференцирования по времени, а $p_i=\ln(1+r_i)$. Должны выполняться также следующие ограничения: $u_i(t) \geq 0$, $\sum u_i(t) \leq U$ и начальные условия: $x_i(t_н)=0$, $x_i(t^i_к)= S_i$. В случае задачи минимизации вложенных средств целевая функция определяется следующим образом:

$$Z = \int_{t_н}^{t_к} \sum_{i=1}^{n} u_i(t)dt$$

и должно выполняться условие: $Z \to \min$. Здесь $t_к = \max\{t^i_к\}$, а $u_i(t)$ продолжены нулем на отрезок $[t^i_к, t_к]$. Это возможно, поскольку функции $u_i(t)$ предполагаются ограниченными и измеримыми относительно меры Лебега.

Можно было бы попытаться свести исходную задачу к обычной классической задаче на отрезке $[t_н, t_к]$, скорректировав значения фондов соответствующим образом в правой граничной точке, но простейшие примеры показывают, что такое расширение задачи оптимизации ничего не дает, поскольку решения исходной задачи не будут, вообще говоря, сужением решений расширенной задачи.

Действительно, предположим, что два фонда размером S_1 и S_2 (соответствующие процентные ставки r_1 и r_2, $r_1 < r_2$) могут быть созданы при мощности источника финансирования U за минимальное время T_1 и T_2. Пусть первый фонд должен быть накоплен к моменту времени $t_н + T_1$, а второй фонд - к моменту времени $t_н + T_1 + T_2$. Решение оптимизационной задачи очевидно: сначала накапливается первый фонд, а затем второй. Если продолжить исходную задачу на отрезок $[t_н, t_н+T_1+T_2]$, заменив S_1 на $S_1(1+r_1)^{T2}$, то очевидное допустимое решение: накопление первого фонда с вложением средств источника финансирования только в первый фонд на отрезке $[t_н, t_н+T_1]$, а затем вложение средств источника финансирования только во второй фонд на отрезке $[t_н+T_1, t_н+T_1+T_2]$ не будет оптимальным. Это связано с тем, что оптимальная стратегия предполагает вначале накопление фонда с большей процентной ставкой [4]. Изменив порядок накопления можно уменьшить целевую функцию. Очевидно, что оптимальные решения исходной и расширенной задач имеют мало общего.

Для определенности сформулируем следующую каноническую задачу оптимизации накопительных фондов:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_H}^{t_K} \sum_{i=1}^{n} u_i(t)dt \to \min, \\
&\dot{x}_i(t) = p_i x_i(t) + u_i(t),\ p_i = \ln(1+r_i), \\
&x_i(t_н) = 0,\ x_i(t^i{}_к) = S_i, \\
&r_1 > r_2 > \ldots > r_n, \\
&\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \leq U, \\
&t_к = \max\{t^1{}_к, t^2{}_к, \ldots, t^n{}_к\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, в канонической задаче фонды пронумерованы в порядке убывания процентных ставок. Моменты завершения накопления фондов не упорядочены и наибольший из них обозначен через $t_к$. Функции $u_i(t)$ продолжены нулем. Любая задача оптимального накопления с минимизацией вложения средств может быть приведена к каноническому виду.

Принцип максимума Понтрягина к канонической задаче не может быть применен явным образом, поскольку для его применения необходимо, чтобы выполнялось условие одновременного завершения накопления всех фондов. Принцип максимума Понтрягина можно применить опосредованно, используя тот очевидный факт, что сужение по времени оптимального плана есть оптимальный план.

Ясно, что при достаточной мощности источника финансирования U, допустимые решения существуют. Пусть $[t_0,t_1]$ временной промежуток такой, что $[t_0,t_1]$ принадлежит отрезку $[t_н,t_к]$, и на нем не заканчивается процесс накопления какого-либо фонда. Сужения с отрезка $[t_н,t_к]$ допустимых решений на отрезок $[t_0,t_1]$ дает снова допустимые решения для задачи:

$$\begin{gathered}
\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} u_i(t)dt \to \min, \\
\dot{a}_i(t) = p_i a_i(t) + u_i(t),\ p_i = \ln(1+r_i), \\
a_i(t_0) = x_i(t_0),\ a_i(t_1) = x_i(t_1), \\
\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \le U.
\end{gathered} \qquad (2)$$

Таким образом, задача (2) имеет допустимые решения и к ней применим принцип максимума Понтрягина. Задача (2) имеет единственное оптимальное решение [5], и главная особенность оптимального решения состоит в том, что фонды накапливаются последовательно, в порядке убывания процентных ставок.

Рассмотрим множество M отрезков [a,b], удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} [a,b] \subset [t_н, t_к], \\ t^i{}_к \notin [a,b]. \end{cases}$$

На множестве M существует n максимальных элементов, на каждом из них (в правой граничной точке) завершается накопление одного из фондов. Сужение канонической задачи на каждый из максимальных элементов представляет собой задачу (2), которая имеет оптимальное решение. Сшивка оптимальных решений на максимальных элементах дает оптимальное решение всей задачи.

Таким образом, при построении оптимального решения канонической задачи нужно использовать следующие ограничения.

1. На любом максимальном элементе множества M фонды накапливаются последовательно, в порядке убывания процентных ставок.
2. На каждом максимальном элементе множества M некоторые фонды (уже накопленные) отсутствуют в накопительном процессе.
3. Для всех накопительных фондов, кроме последнего, имеющего наименьшую процентную ставку, периоды активного (с вложением средств источника финансирования) и пассивного (только за счет капитализации) накопления могут чередоваться.
4. Накопительный фонд, имеющий наименьшую процентную ставку, имеет только один период активного накопления, за которым может следовать только один период пассивного накопления.
5. Минимальное значение источника финансирования соответствует отсутствию пассивного режима для фонда с наибольшей датой накопления.

Перечень возможных ограничений можно несколько расширить, но их достаточно для построения оптимального решения. Алгоритм построения оптимального решения удобно разбить на две фазы (два этапа):

1. Построение квазиоптимального решения.
2. Корректировка квазиоптимального решения с целью получения оптимального.

На первом этапе построения квазиоптимального решения строится допустимое решение канонической задачи, любое сужение которого на максимальный элемент множества M является оптимальным решением задачи (2). На втором этапе допустимое решение канонической задачи, полученное на первом этапе, трансформируется в оптимальное решение канонической задачи.

Алгоритм поиска квазиоптимального решения состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

1. Выбирается фонд с наименьшей процентной ставкой (фонд с номером n), и для него из соотношения

$$S_n = \frac{U}{p_n}[e^{p_n T_n} - 1]$$

рассчитывается наименьшее необходимое для накопления время (при котором пассивный период отсутствует) T_n:

$$T_n = \frac{1}{p_n}\ln(1 + \frac{p_n S_n}{U}).$$

2. Из интервала времени $[t_н,t_к]$ исключается интервал $[t^n_к-T_n,t^n_к]$ (если $t^n_к-T_n < t_н$. то мощности источника финансирования недостаточно).
3. Для фонда с номером n-1 рассчитывается наименьшее время накопления (с учетом того, что интервал $[t^n_к-T_n,t^n_к]$ нельзя использовать для активного накопления).
4. Шаги 2 и 3 повторяются последовательно для остальных фондов, либо на каком-то шаге устанавливается, что мощности источника финансирования недостаточно.

Исключение некоторого интервала из процесса активного накопления фондов (на этом интервале продолжается пассивное, за счет капитализации процентов, накопление) эквивалентно тому, что мощность источника финансирования на этом интервале равна нулю. Соответствующие формулы расчета даны в [6].

В процессе повторения шагов 2 и 3 исключаемый интервал будет становиться все больше за счет смещения границ первоначального интервала $[t^n_к-T_n,t^n_к]$. Поскольку при построении квазиоптимального решения для каждого фонда решается задача быстродействия, то в моменты времени $t^i_к$ заканчиваются периоды активного накопления для соответствующего фонда. При этом не исключено, что:

1. На интервале $[t_н,t_к]$ в начале вообще не будет осуществляться накопление.
2. На интервале $[t_н,t_к]$ будут чередоваться этапы активного и пассивного накопления (так может быть либо при больших временных интервалах, либо при большой мощности источника финансирования).

В любом случае, необходимо произвести трансформацию квазиоптимального решения для того, чтобы получить оптимальное решение канонической задачи. Такую трансформацию можно осуществить двумя способами.

1. Сдвинуть квазиоптимальное решение к началу интервала $[t_н,t_к]$, не уменьшая мощность источника финансирования.
2. Уменьшить мощность источника финансирования настолько, чтобы весь интервал $[t_н,t_к]$ представлял собой период активного накопления.

В первом случае период пассивного накопления появится на конце интервала $[t_н,t_к]$. Наличие такого периода пассивного накопления означает, что мощность источника финансирования слегка избыточна, и ее можно несколько уменьшить, сохранив возможность накопления. Можно также перенести даты накопления на более ранний срок, сохранив мощность источника финансирования.

Во втором случае мощность источника финансирования последовательно уменьшается до тех пор, пока квазиоптимальное решение существует. В результате будет получено оптимальное решение, при котором периоды пассивного накопления отсутствуют.

Нетрудно заметить, что вторым способом будет получено решение более общей задачи, чем является каноническая задача. А именно, будет решена двухкритериальная задача:

$$\int_{t_H}^{t_K}\sum_{i=1}^{n}u_i(t)dt \to \min,$$
$$U \to \min,$$
$$\dot{x}_i(t) = p_i x_i(t) + u_i(t),\ p_i = \ln(1+r_i),$$
$$x_i(t_н) = 0,\ x_i(t^i{}_к) = S_i,$$
$$r_1 > r_2 > \ldots > r_n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}u_i(t) \le U,$$
$$t_к = \max\{t^1{}_к, t^2{}_к, \ldots, t^n{}_к\}.$$

Решение более общей двухкритериальной задачи позволит произвести накопление фондов с меньшими затратами, чем при фиксированном источнике финансирования, но на практике встречаются оба типа задач.

Какой бы метод трансформации квазиоптимального решения не использовался для получения оптимального решения канонической или обобщенной (двухкритериальной) задачи накопления фондов, его невозможно осуществить без применения современных вычислительных систем. Реальные вычисления вполне могут осуществляться на персональном компьютере или рабочей станции.

В рассмотренной канонической модели накопительных фондов присутствуют некоторые ограничения:

1) мощность источника финансирования постоянна на всем периоде накопления;
2) процентные ставки по кредитам также постоянны, что возможно только при стабильной макроэкономической ситуации.

Оба эти ограничения не столь существенны, когда накопительный период невелик. Кроме того, расчеты по данной модели могут использоваться в качестве первого приближения проясняющего общую картину, а для более детальной проработки накопительного плана использоваться более сложные стохастические модели.

Рассмотренная модель накопительных фондов имеет большой потенциал использования для решения многочисленных практических задач, к числу которых в первую очередь можно отнести:

1) планирование бюджета развития территориального образования;
2) планирование инвестиционных расходов субъекта экономической деятельности;
3) организация выплаты долгосрочного кредита, с агрегированием средств на накопительных счетах в банке.

Мировой финансовый кризис, дефицит финансовых ресурсов требуют более экономного их использования, что невозможно без применения современных математических методов и компьютерных информационных технологий.

Литература

1. Тубольцев М.Ф. Методы оптимального накопления фондов в бюджете развития муниципального образования [Текст] // «Научная мысль Кавказа», Ростов н/Д.: Изд-во Северо-Кавказкого научного центра высшей школы, 2005, №8. – С.82-91.

2. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по быстродействию стратегии создания накопительных фондов [Текст] // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», том 1 выпуск 1(19). – Белгород: Изд-во БелГУ, 2004. – С.65-70.

3. Тубольцев М.Ф. Математическое моделирование систем накопительных фондов. [Текст] //«Информационные технологии моделирования и управления», выпуск 8(33). – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2006. – С. 990-995.

4. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по критерию минимума вложения средств стратегии создания накопительных фондов [Текст] // Научные ведомости БелГУ, серия «Информатика. Прикладная математика. Управление», № 1 (21). Вып. 2. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2006. – С.50-55.

5. Тубольцев М.Ф. Моделирование накопительных фондов с целевым вложением средств [Текст] // Информационные технологии моделирования и управления. Вып. 1(35). – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2007. – С. 35-38.

6. Тубольцев М.Ф. Моделирование процессов реструктуризации накопительных фондов [Текст] // «Информационные технологии моделирования и управления», выпуск 3(37). – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2007. – С. 304-308.
7. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов, ДАН СССР, 110, №1 (1956). – С.7-10.
8. Б.А.Лагоша. Оптимальное управление в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003.

MATHEMATICAL MODELLING OF SYSTEMS OF ACCUMULATIVE FUNDS

M.F.TUBOLTSEV

Belgorod State University

e-mail: Tuboltsev @bsu.edu.ru

In article questions of mathematical modeling of systems of memory funds and, in particular, questions of optimum planning of process of accumulation by criterion of minimization of the enclosed means are considered.

Distinctive feature of statement of a problem of optimization considered here is that the solved optimizing problem is not classical as memory funds are formed by the various moments of time.

In such statement the considered model most precisely reflects a real situation, and the problem of optimization and algorithm of its decision potentially have numerous applications in mathematical economy and the financial mathematics.

The offered algorithm of the decision of a problem of optimization of memory funds supposes effective realization by means of modern computing means.

Keywords: optimization, a maximum principle, memory funds.