МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

М. Ф. ТУБОЛЬЦЕВ
В. М. МИХЕЛЕВ

Белгородский государственный университет

e-mail: tuboltsev@bsu.edu.ru

e-mail: mikhelev@bsu.edu.ru

Рассматриваются вопросы математического моделирования финансовых процессов накопительного типа в условиях неопределенности. Отличительной особенностью постановки рассматриваемой здесь задачи прогнозирования является то, что показана роль макро – и микроэкономических факторов.

В этой постановке модель создания накопительных фондов адекватно отражает реальную ситуацию, когда источник финансирования накопительного процесса не может быть точно задан, а подвержен случайным изменениям. Предложенный алгоритм решения задачи прогнозирования допускает эффективную реализацию с помощью современных вычислительных средств.

Ключевые слова: финансовые потоки, прогнозирование, случайные процессы, накопительные фонды, моделирование, компьютерное моделирование.

Введение

Во время экономического кризиса риски заимствования возрастают, поэтому большее внимание уделяется финансовым инструментам, которые являются альтернативой заимствованиям в качестве инструмента финансирования инвестиционных проектов [1]. Методика оптимального накопления фондов является достаточно проработанной для случая постоянного источника финансирования [2, 3, 4, 5]. В этих работах имеется ряд ограничений, которые в условиях экономического кризиса являются мало вероятными и затрудняют практическое применение.

Во-первых, ограничение на постоянство во времени источника финансирования накопительных фондов в условиях экономического и финансового кризиса необоснованно. В настоящее время мощность источников финансирования уменьшилась по сравнению с докризисным периодом, а по мере преодоления кризиса, она может снова увеличиться. В условиях относительной стабильности можно считать, что мощность источника финансирования накопительных фондов $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией времени. В условиях нестабильности и неопределенности вложения в накопительный фонд $u(t)$ являются случайной величиной, и только от математического ожидания $u(t)$ можно требовать постоянства.

Во-вторых, в условиях кризиса редко выполняется требование постоянства процентных ставок, по которым начисляются проценты на средства накопительных фондов. Накопительные фонды формируются на счетах коммерческих банков, которые устанавливают размеры ставок самостоятельно и могут их изменять в зависимости от экономической ситуации. Поэтому ставка процентов $r(t)$ также является случайной функцией.

Процесс формирования (накопления) фонда в рамках динамических систем моделируется дифференциальным уравнением, содержащим в правой части случайные функции:

$$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + u(t), \qquad (1)$$

где $u(t)$ – интенсивность вложений в накопительный фонд, а $p(t)=\ln(1+r(t))$.

Если предполагать, что $u(t)$ и $p(t)$ – случайные функции, то нужно учитывать их различную относительно временных интервалов изменчивость. Случайная функция $p(t)$ является борелевской функцией ставки процентов, которая определяется макроэкономической ситуацией и изменяется, главным образом, из-за инфляции, как и ставка рефинансирования Центробанка. Ее изменчивость даже в условиях кризиса не велика, и при рассмотрении краткосрочных финансовых операций может, в первом приближении, считаться постоянной. Только на интервалах времени больше базового периода ее изменчивость должна обязательно учитываться. Напротив, $u(t)$ – интенсивность вложений в накопительный фонд является быстро осциллирующей функцией, которая может изменяться подобно биржевым индексам. Случайным характером этой функции нельзя пренебрегать, если только она гарантированно не является детерминированной.

Таким образом, x(t) является случайной функцией во всех случаях, когда u(t) гарантированно не может считаться детерминированной и, следовательно, для исследования процесса накопления финансового актива (фонда) необходимо использовать теорию случайных процессов. Имеется большое число результатов по применению теории случайных процессов в изучении процессов на фондовых рынках, с чем можно ознакомиться в [6]. Однако накопительные финансовые случайные процессы исследованы мало, что является следствием недостаточного внимания теоретиков и практиков к накопительным финансовым инструментам. Возможно, финансовый кризис изменит ситуацию, и вопросы прогнозирования финансовых накопительных процессов будут должным образом проработаны, тем более что требуемый математический аппарат уже существует [6, 7].

В данной работе рассматриваются вопросы прогнозирования параметров краткосрочного накопительного процесса, что позволяет считать случайной только функцию вложений u(t).

Теоретический анализ

Уточним постановку задачи формирования накопительного фонда. Пусть x(t) – величина накопительного фонда в момент времени t и в начальный момент времени $t_н$ все траектории случайного процесса выходят их нуля $x(t_н)=0$, производная x(t) в левой части (1) понимается в смысле средней квадратичной сходимости. Поскольку рассматриваются вопросы прогнозирования параметров краткосрочного накопительного процесса, то изменчивостью p(t) можно пренебречь и считать силу роста постоянной (p(t)=p). В первом приближении функцию вложений u(t) можно считать при каждом t равномерно распределенной случайной величиной (u(t)=U) на отрезке $[U_{min}, U_{max}]$ и $U_{max}>U_{min}>0$.

Найдем, при этих предположениях, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $x(t_к)$, где $t_к > t_н$ некоторый произвольный момент времени. Поскольку уравнение (1) имеет в данном конкретном случае вид:

$$\dot{x}(t) = px(t) + U, \tag{2}$$

то его решение можно представить следующим образом:

$$x(t) = \int_{t_н}^{t} \exp(p(t-s))Uds, \tag{3}$$

поскольку интеграл в (3) существует [8, с. 158], то дифференцируя его по верхнему пределу, убеждаемся, что он является решением уравнения (2).

Используя свойства интеграла от случайной функции [8, с.159], можно легко получить выражение для математического ожидания x(t):

$$M(x(t)) = \int_{t_н}^{t} \exp(p(t-s))M(U)ds. \tag{4}$$

Зная, что для равномерно распределенной на отрезке $[U_{min}, U_{max}]$ случайной величины U выполняется соотношение $M(U)=(U_{max}-U_{min})/2$, легко получаем из (4) значение математического ожидания для x(t):

$$M(x(t)) = \frac{(U_{\max} + U_{\min})}{2p}(e^{p(t-t_н)} - 1). \tag{5}$$

Соотношение (5) позволяет найти момент времени $t_к$, когда математическое ожидание величины накопленного фонда достигнет некоторого заданного значения S. Подставив в (5) $t=t_к$ $M(x(t_к))=S$, получаем:

$$t_к = t_н + \frac{1}{p}\ln\left(1 + \frac{2pS}{U_{\max} + U_{\min}}\right). \tag{6}$$

Соотношение (6) в отличие от детерминированного случая, позволяет только оценить среднее значение накопительного фонда к некоторому заданному моменту времени. Исчерпывающую характеристику случайной величине x(t) дает ее функция распределения. С ее помощью можно найти вероятность попадания случайной величины в любой заданный интервал. Поскольку интеграл в (3) можно понимать как траекторный, то имеет место равенство:

$$x(t) = \frac{U}{p}\left(e^{p(t-t_н)} - 1\right), \tag{7}$$

из которого легко определить функцию распределения x(t):

$$F_{x(t)}(y) = F_U\left(\frac{py}{e^{p(t-t_н)} - 1}\right). \tag{8}$$

Таким образом, можно не только оценить с помощью (6) среднее время формирования накопительного фонда, но и найти вероятность попадания величины накопленного фонда в заданный интервал, поскольку функция распределения U $F_U(y)$ известна.

Поэтому, задачу прогнозирования можно считать при сделанных предположениях полностью решенной. Можно отметить, что предположение о равномерном распределении u(t) не является существенным. Тем же способом задача прогнозирования решается при любом законе распределения, если он не зависит от времени. Например, можно считать, что u(t) нормальный закон распределения, а математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени. Однако использование равномерного распределения выглядит в данной постановке наиболее естественно. Явная зависимость источника финансирования от времени может быть задана директивно либо спрогнозирована экономико-математическими методами. В этом случае модель требуется расширить с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

Литература

1. Тубольцев М.Ф. Методы оптимального накопления фондов в бюджете развития муниципального образования.// «Научная мысль Кавказа», Ростов-на-Дону, Изд-во Северо-Кавказкого научного центра высшей школы, 2005, №8. – с.82-91.
2. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по быстродействию стратегии создания накопительных фондов. // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», том 1 выпуск 1(19).- Белгород: Изд-во БелГУ, 2004.- стр.65-70.
3. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по критерию минимума вложения средств стратегии создания накопительных фондов. // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», № 1 (21) выпуск 2.- Белгород: Изд-во БелГУ, 2006.- стр.50-55.
4. Тубольцев М.Ф. Математическое моделирование систем накопительных фондов. //«Информационные технологии моделирования и управления», выпуск 8(33). – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2006. – стр. 990-995.
5. Тубольцев М.Ф. Математическое моделирование систем накопительных фондов//«Научные ведомости», серия «История, Политология, Экономик, Информатика», №1 (56) выпуск 9/1.- Белгород: Изд-во БелГУ, 2009.- стр.45-51.
6. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1,2. –М.: Фазис, 1998.
7. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. Учеб. Пособие. – М.: Логос, 2000. – 1000 с.: ил.
8. Миллер В.М., Панков А.Р. Случайные процессы в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ, 2001. – 316 с.: ил.

MATHEMATICAL MODELLING OF FINANCIAL PROCESSES IN THE CONDITIONS OF UNCERTAINTY

M. F. TUBOLTSEV
V. M. MIKHELEV

Belgorod State University

e-mail: tuboltsev @bsu.edu.ru

e-mail: mikhelev@bsu.edu.ru

Questions of mathematical modeling of financial processes of memory type in the conditions of uncertainty are considered. Distinctive feature of statement of a problem of forecasting considered here is that the role of macro – and micro economic factors is shown.

In this statement the model of creation of memory funds adequately reflects a real situation when the source of financing of memory process cannot be precisely set, and is subject to casual changes. The offered algorithm of the decision of a problem of forecasting supposes effective realization by means of modern computing means.

Key words: financial streams, forecasting, casual processes, memory

funds, modeling, computer modeling.