УДК 681.3

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ БЫСТРОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФИЛЬТРОВ ДОБЕШИ

Н. И. ЧЕРВЯКОВ
Ю. В. КОНДРАШОВ

Ставропольский военный институт связи ракетных войск

e-mail: yrii-fifa83@mail.ru

В работе показана возможность построения высокоэффективных вейвлет – преобразований ортогональными вейвлет – фильтрами Добеши по алгоритму Малла на базе свертки, вычисленной в системе остаточных классов.

Ключевые слова: вейвлет – преобразование, вейвлет – фильтр, вейвлет – функция, алгоритм Малла, свертка, цифровая обработка сигналов, система остаточных классов.

В настоящее время вейвлет – преобразование широко применяется в задачах обработки и кодирования сигналов и изображений самой различной природы (речь, спутниковые изображения, рентгенограммы внутренних органов и др.), распознавания образов, при изучении свойств поверхностей кристаллов и нанообъектов и во многих других случаях.

Появление в 1988 году ортогональных вейвлет-фильтров Добеши или так называемых фильтров с компактным носителем в значительной мере усилило интерес к вейвлет-анализу, т.к. открылись новые возможности не только для теоретического, но и для практического применения вейвлет-преобразования.

Важно отметить то, что вейвлет-фильтры Добеши строятся, исходя из критерия длины фильтров и, следовательно, являются фильтрами с конечным числом коэффициентов [1]. Вейвлет-функции $\psi(t)$ фильтров Добеши принято обозначать литерой D с добавлением цифры, соответствующей длине вейвлет-фильтра Добеши, т.е. $D2$, $D4$, $D6$ и т.д.

Пусть даны два фильтра h и g с ненулевыми элементами [2]:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{8}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{8}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{8}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{8};$$
$$g_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{8}, \quad g_1 = -\frac{3-\sqrt{3}}{8}, \quad g_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{8}, \quad g_3 = -\frac{1+\sqrt{3}}{8}. \tag{1}$$

Отметим соотношения между коэффициентами этих фильтров [2]:

$$\begin{gathered} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 1; \\ g_0 + g_1 + g_2 + g_3 = 0; \\ g_0 = h_3,\ g_1 = -h_2,\ g_2 = h_1,\ g_3 = -h_0; \\ h_0 + h_2 = h_1 + h_3 = 1/2,\ 2h_2 = h_1 + 3h_3. \end{gathered} \tag{2}$$

Найдём передаточные функции $H(z)$ и $G(z)$ в z-представлении:

$$H(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + h_3 z^3; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 = h_3 - h_2 z + h_1 z^2 - h_0 z^3 = \\ &= -z^3\left(-h_3 z^{-3} + h_2 z^{-2} - h_1 z^{-1} + h_0\right) = -z^3 H(-z^{-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, мы получили

$$G(z) = -z^3 H(-z^{-1}). \tag{5}$$

Для восстановления сигнала требуются дополнительные фильтры $\tilde{H}(z)$ и $\tilde{G}(z)$. Определим их как сопряжённые квадратурные фильтры по формулам:

$$\tilde{H}(z)=H(z^{-1}),\;\; \tilde{G}(z)=G(z^{-1})=-z^{-3}H(-z) \qquad (6)$$

Тогда второе соотношение $\tilde{H}(z)H(-z)+\tilde{G}(z)G(-z)=0$ из (3-4) выполняется. Первое соотношение $\tilde{H}(z)H(z)+\tilde{G}(z)G(z)=1$ принимает вид:

$$H(z^{-1})H(z)+G(z^{-1})G(z)=1. \qquad (7)$$

Вернёмся к частотной переменной $z=e^{-i\omega}$. Поскольку коэффициенты $\{h_n\}$ – вещественные, то $H(z^{-1})=\overline{H(\omega)}$. Поэтому последнее соотношение принимает вид $|H(\omega)|^2+|G(\omega)|^2=1$.

Найдём коэффициенты фильтров восстановления $\tilde{H}(z)$ и $\tilde{G}(z)$ из их определения $\tilde{H}(z)=H(z^{-1}),\;\tilde{G}(z)=G(z^{-1})$:

$$\begin{aligned}&\tilde{h}_{-3}=\frac{1-\sqrt{3}}{8},\quad \tilde{h}_{-2}=\frac{3-\sqrt{3}}{8},\quad \tilde{h}_{-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{8},\quad \tilde{h}_{0}=\frac{1+\sqrt{3}}{8};\\ &\tilde{g}_{-3}=-\frac{1+\sqrt{3}}{8},\quad \tilde{g}_{-2}=\frac{3+\sqrt{3}}{8},\quad \tilde{g}_{-1}=-\frac{3-\sqrt{3}}{8},\quad \tilde{g}_{0}=\frac{1-\sqrt{3}}{8}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Таким образом, метод одномерного дискретного вейвлет – преобразования (ДВП) N-го порядка последовательности x_n определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned}&a_n^{(i)}=\sum_{k=0}^{N-1} g_k a_{2n-k}^{(i-1)} \qquad i=1,2,\dots,J;\\ &d_n^{(i)}=\sum_{k=0}^{N-1} h_k a_{2n-k}^{(i-1)} \qquad a_n^{(0)}\equiv x_n,\end{aligned} \qquad (9)$$

где $a_n^{(i)}$ и $d_n^{(i)}$ являются аппроксимирующими и детализирующими коэффициентами i-го уровня, а g_k и h_k $(k=0,1,\dots,N-1)$ – коэффициенты низкочастотного и высокочастотного анализирующих фильтров, соответственно.

С другой стороны, сигнал x_n может быть восстановлен по коэффициентам $\{a_n^{(J)},d_n^{(J)},d_n^{(J-1)},\dots,d_n^{(1)}\}$ путём последовательной итерации по формулам:

$$\hat{a}_m^{(i-1)}=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{N/2-1}\bar{g}_{2k}\hat{a}^{(i)}_{\frac{m}{2}-k}+\sum\limits_{k=0}^{N/2-1}\bar{h}_{2k}\hat{d}^{(i)}_{\frac{m}{2}-k}, & m \text{ чётное}\\ \sum\limits_{k=0}^{N/2-1}\bar{g}_{2k+1}\hat{a}^{(i)}_{\frac{m-1}{2}-k}+\sum\limits_{k=0}^{N/2-1}\bar{h}_{2k+1}\hat{d}^{(i)}_{\frac{m-1}{2}-k}, & m \text{ нечётное}\end{cases}, \qquad (10)$$

где $\bar{g}_k$ и $\bar{h}_k$ являются коэффициентами низкочастотного и высокочастотного синтезирующих фильтров, соответственно.

Для того, чтобы восстановленный сигнал соответствовал исходному, должны быть соответствующим образом подобраны анализирующий (раскладывающий) и синтезирующий (собирающий) фильтры.

Для вейвлет-преобразования функции $f(x)$ необходимо вычислить серию коэффициентов $\{a_n,d_n,d_{n-1},\dots,d_1\}$, где a_n – аппроксимация функции, d_i – детализирующие коэффициенты функции, $i=1,\dots,n$. Каждый коэффициент находится интегрированием (11, 12):

$$a_{J-N,k} = \left(f, \varphi_{J-N,k}\right) = \int_R f(x)\overline{\varphi_{J-N,k}(x)}dx; \tag{11}$$

$$d_{J-m,k} = \left(f, \psi_{J-m,k}\right) = \int_R f(x)\overline{\psi_{J-m,k}(x)}dx, \quad m = 1,2,\dots,N. \tag{12}$$

Возникает проблема вычисления большого количества интегралов с необходимой точностью. Следует также учитывать, что при высоком уровне разрешения J носители функций $\varphi_{J,k}(x)$ и $\psi_{J,k}(x)$ становятся малыми порядка $1/2^J$.

Быстрое вейвлет-преобразование, предложенное Мала позволяет решить эту проблему. Алгоритм Малла даёт возможность вычислять коэффициенты вейвлет-разложения без интегрирования, используя алгебраические операции на основе свёртки:

$$\begin{aligned} a_n^{(i)} &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k a_{2n-k}^{(i-1)} \quad i = 1,2,\dots,J; \\ d_n^{(i)} &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k a_{2n-k}^{(i-1)} \quad a_n^{(0)} \equiv x_n, \end{aligned} \tag{13}$$

где $a_n^{(i)}$ и $d_n^{(i)}$ являются аппроксимирующими и детализирующими коэффициентами i-го уровня, а g_k и h_k $(k = 0,1,\dots,N-1)$ – коэффициенты низкочастотного и высокочастотного анализирующих фильтров, соответственно; x_n – исходный сигнал; N – порядок фильтра.

Эти равенства обеспечивают быстрые алгоритмы вычисления вейвлет-коэффициентов (каскадные алгоритмы, алгоритмы Малла). Термин «быстрые» означает не только, что в (13) используются более быстрые алгебраические процедуры, но и то, что при каждом преобразовании общее число новых коэффициентов не увеличивается в два раза, а остаётся прежним.

Схема разложения сигнала по алгоритму Малла приведена на рис. 1.

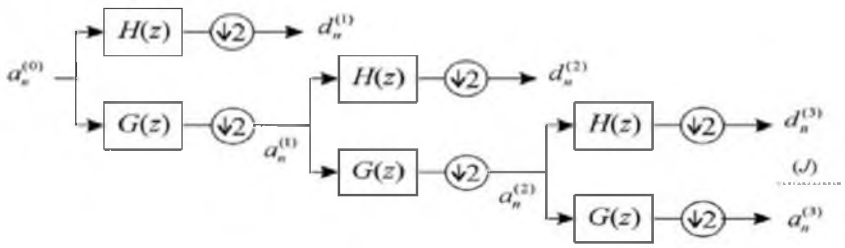


Рис. 1. Последовательность получения вейвлет-коэффициентов третьей октавы; $H(z)$ и $G(z)$, соответственно, высокочастотные и низкочастотные анализирующие фильтры в z-представлении

Единственное отличие фильтрации в алгоритме Малла от классического КИХ-фильтра, задаваемого уравнением $y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i x(k-i)$ [3], заключается в том, что значения фильтруемого ряда выбираются через один – индекс $2n-k$ в $a_{2n-k}^{(i-1)}$. Это и есть децимация $2\downarrow$ – исключение из обработки каждого второго элемента.

Для двумерных сигналов – изображений – алгоритм разложения аналогичен тому, что применяется в одномерном случае (13). Пусть $\varphi(x)$ – масштабирующая вейвлет-функция и $\psi(x)$ – материнский вейвлет. Как известно, они порождают базисные функции $\varphi_{J,n}(x)$ и $\psi_{J,k}(x)$. Двумерный сигнал $a(n_1,n_2)$ раскладывается по базисным в $L^2(\mathbf{R}^2)$ функциям $\varphi_{J,n}(x)\varphi_{J,m}(y)$, $\varphi_{J,n}(x)\psi_{J,m}(y)$, $\psi_{J,n}(x)\varphi_{J,m}(y)$ и $\psi_{J,n}(x)\psi_{J,m}(y)$. Соответствующие коэффициенты принято называть следующим образом.

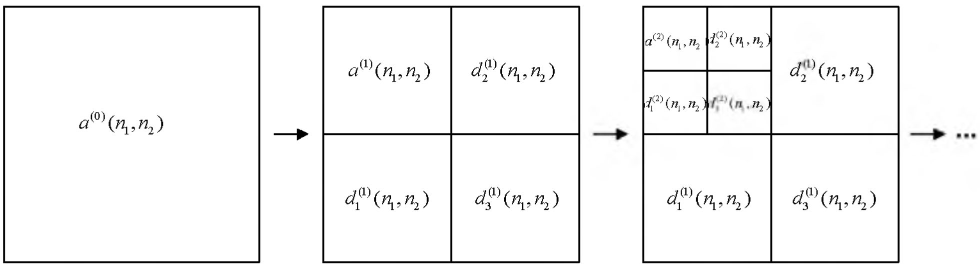
Аппроксимирующие коэффициенты $a^{(J)}(n_1,n_2)$ получаются как коэффициенты разложения по вейвлет-базису $\varphi_{J,n}(x)\varphi_{J,m}(y)$. На рис. 2 (а) показано распределение пикселов после пошаговой обработки исходного изображения банком фильтров.

Горизонтальные детализирующие коэффициенты $d_2^{(J)}(n_1,n_2)$ получаются как коэффициенты разложения по вейвлет-базису $\varphi_{J,n}(x)\psi_{J,m}(y)$.

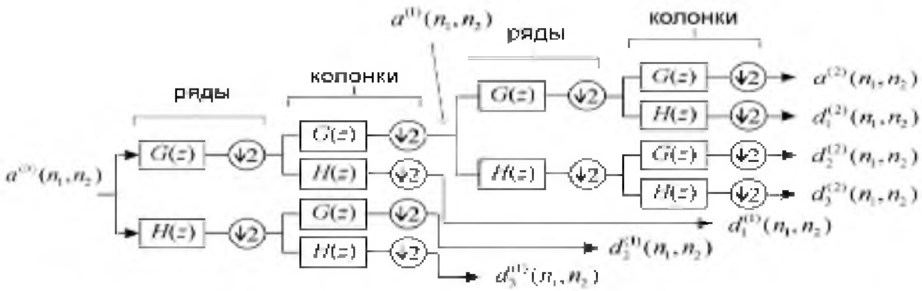
Вертикальные детализирующие коэффициенты $d_1^{(J)}(n_1,n_2)$ получаются как коэффициенты разложения по вейвлет-базису $\psi_{J,n}(x)\varphi_{J,m}(y)$.

Диагональные детализирующие коэффициенты $d_3^{(J)}(n_1,n_2)$ получаются как коэффициенты разложения по вейвлет-базису $\psi_{J,n}(x)\psi_{J,m}(y)$.

Схема разложения сигнала $a^0(n_1,n_2)$ изображена на рис. 2 (б).



(а)



(б)

Рис. 2. Последовательность получения вейвлет-коэффициентов третьей октавы для двумерного сигнала: (а) –распределение пикселов после пошаговой обработки исходного изображения банком фильтров; (б) – в виде последовательности фильтров; $H(z)$ и $G(z)$, соответственно, высокочастотные и низкочастотные анализирующие фильтры в z-представлении

В аналитическом виде разложение двумерного сигнала фильтрами можно записать следующим образом:

$$a^{(i+1)}(n_1,n_2)=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}g(k_1)g(k_2)a^{(i)}(2n_1-k_1,2n_2-k_2);$$
$$d_1^{(i+1)}(n_1,n_2)=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}g(k_1)h(k_2)a^{(i)}(2n_1-k_1,2n_2-k_2); \quad (14)$$
$$d_2^{(i+1)}(n_1,n_2)=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}h(k_1)g(k_2)a^{(i)}(2n_1-k_1,2n_2-k_2);$$
$$d_3^{(i+1)}(n_1,n_2)=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}h(k_1)h(k_2)a^{(i)}(2n_1-k_1,2n_2-k_2).$$

В качестве собственно фильтров могут использоваться фильтры Добеши D4 четвёртого порядка. Вейвлеты Добеши являются вейвлетами с компактным носителем, что обеспечивает хорошие свойства приближения вейвлет-разложений. Они не имеют эксплицитного (явного) выражения, а задаются коэффициентами фильтрации. Анализирующие (разлагающие) высокочастотные (h) и низкочастотные (g) коэффициенты фильтра Добеши D4 задаются следующими коэффициентами [2]:

$$h_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad h_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad h_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}};$$
$$g_0=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad g_1=-\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad g_2=\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad g_3=-\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Графики вейвлетов Добеши D4 (db4) в среде MATLAB можно увидеть следующим образом (рис. 3):

```
[phi,psi,x]=wavefun('db4',10);
subplot(121); plot(x,phi);
title('y=\phi(x)'); axis square; grid on;
subplot(122); plot(x,psi);
title('y=\psi(x)'); axis square; grid on;
```

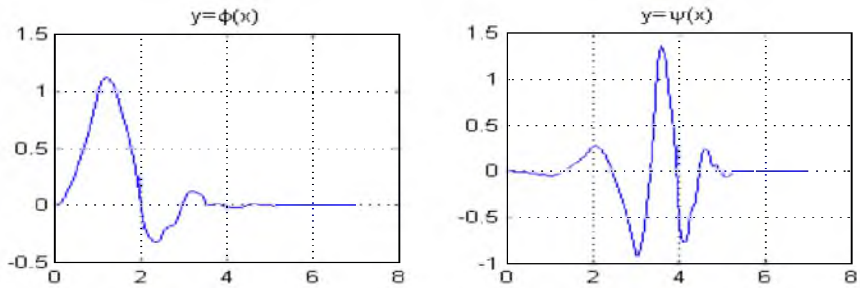


Рис. 3. Масштабирующая вейвлет-функция и материнский вейвлет Добеши D4

С целью повышения скорости вычисления свертки (13) предлагается её вычислять в системе остаточных классов, тогда выбирая модуль p_j свертка может быть выражена как:

$$a_n^{(i)}=\left|\sum_{k=0}^{N-1}\left|g_k a_{2n-k}^{(i-1)}\right|_{p_j}\right|_{p_i} \quad i=1,2,\ldots,J, \quad (16)$$
$$d_n^{(i)}=\left|\sum_{k=0}^{N-1}\left|h_k a_{2n-k}^{(i-1)}\right|_{p_j}\right|_{p_i} \quad a_n^{(0)}\equiv x_n.$$

Система остаточных классов и модулярные вычисления являются практически идеальным инструментом реализации линейной свертки, поскольку операции сложения, вычитания и умножения выполняются очень просто, а именно, если даны два числа A и B, представленные в системе остаточных классов (с набором взаимно простых оснований $m_1, m_2,...,m_L$) следующим образом:

$$A = (a_1, a_2,..., a_L) : A \equiv a_1 (\mathrm{mod}\ m_1), A \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ m_2),..., A \equiv a_L (\mathrm{mod}\ m_L),$$

$$B = (b_1, b_2,..., b_L) : B \equiv b_1 (\mathrm{mod}\ m_1), B \equiv b_2 (\mathrm{mod}\ m_2),..., B \equiv b_L (\mathrm{mod}\ m_L) \quad (17)$$

то

$$A \pm B = (a_1, a_2, ... a_L) \pm (b_1, b_2, ... b_L) = (|a_1 \pm b_1|_{m_1}), (|a_2 \pm b_2|_{m_2}), ... (|a_L \pm b_L|_{m_L}) \quad (18)$$

и

$$A \cdot B = (a_1, a_2, ... a_L) \cdot (b_1, b_2, ... b_L) = (|a_1 \cdot b_1|_{m_1}), (|a_2 \cdot b_2|_{m_2}), ... (|a_L \cdot b_L|_{m_L}) \quad (19)$$

Математические модели (17-19) вычисляются на основе использования нейронных сетей конечного кольца [3], число которых определяется рядом каналов по числу оснований, работающих независимо друг от друга и параллельно во времени. Если каждую нейронную сеть конечного кольца отожествить с отдельным основанием системы остаточных классов, то образованная совокупность каналов будет представлять собой арифметическое устройство выполняющее с большой эффективностью вейвлет – преобразование сигналов.

Итак, система остаточных классов является наиболее подходящей технологией для реализации высокоэффективного вейвлет – преобразования для задач цифровой обработки сигналов.

Для эффективной реализации операций вейвлет – преобразования по алгоритму Малла на основе свертки предлагается использовать математическую модель вычислительного объекта, оперирующую числами, представленными в системе остаточных классов.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М.: Ижевск: РХД, 2001.

2. Daubechies I. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis // IEEE Trans. Inform. Theory, 1990, № 5. P. 961-1005.

3. Червяков Н. И., Сахнюк П. А., Шапошников А. В., Макоха А. Н. Под редакцией А. И. Галушкина. Учебное пособие для ВВУЗов. – М.: Радиотехника, 2003. – 272 с.

4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.

5. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и некоторые приложения // Успехи физических наук, 1996, № 11. С. 1145-1170.

6. Goswami J.C., Chan A.K. Fundamentals of Wavelets. Theory, Algorithms, and Applications. Wiley, 2000. – 306 p.

7. Прокис Дж. Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

8. Желудев В.А. О вейвлетах на базе периодических сплайнов // Докл. РАН, 1994, № 1. С. 9-13.

9. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. – СПб., 1999. – 152 с.

DEVELOPMENT OF METHODS FAST WAVELET-TRANSFORMATION BY MEANS OF FILTERS DOBESHI

N. I. CHERVYKOV
Y. V. KONDRASHOV

Stavropol military institute of communication of rockets armies

e-mail: yrii-fifa83@mail.ru

In work possibility of construction highly effective wavelet – transformations orthogonal wavelet – filters Dobeshi on algorithm of Mull on the basis of the convolution calculated in system of residual classes is shown.

Key words: wavelet – transformation, wavelet – the filter, wavelet – functions, algorithm of Mull, convolution, system of residual classes, digital processing of signals.