

О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ

**А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ,
Е.И. ПРОХОРЕНКО
В.А. ГОЛОЩАПОВА**

*Белгородский
государственный
университет*

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

В работе описаны свойства субполосных матриц, используемых при оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений. Приведены результаты экспериментальных исследований эффективности метода оптимальной фильтрации с учетом свойств субполосных матриц

Ключевые слова: субполосная матрица, обработка изображений, собственный вектор, фильтрация

Введение

В настоящее время внимание к методам цифровой обработки изображений возрастает в связи с тенденцией использования в информационно-телекоммуникационных системах визуальных данных в качестве естественной формы информационного обмена. Необходимость использования естественных форм обмена информацией в виде визуальных данных определяется наличием общественных потребностей по обработке, хранению и передаче различных сведений, что предъявляет постоянно возрастающие требования к методам цифровой обработки изображений с позиций восприятия визуальной информации человеком.

При анализе и обработке изображений существенное значение имеет решение проблемы выделения (фильтрации) почти-периодических компонент изображения, характеризующихся проявлением повышенной концентрации спектральной энергии [1] изображения в отдельных частотных интервалах. Путем фильтрации почти-периодических компонент изображения можно решать различные задачи, например: повышение качества изображения, заданного с низким разрешением, за счет сглаживания, "размывания" изображения; понижение резкости тонких линий; выявление шума, т.е. колебаний яркости высокой частоты и малой амплитуды; выявление границ объектов, т.е. колебаний яркости высокой частоты и большой амплитуды. Как показано в [2], наиболее эффективно данная задача решается в частотной области. В работе [3] был предложен новый метод фильтрации изображений, который является оптимальным в том смысле, что спектр получаемого в результате фильтрации изображения имеет наименьшее среднеквадратическое отклонение от спектра фильтруемого изображения в заданном двумерном частотном интервале, а вне этого интервала имеет наименьшее отклонение от нуля. Приведем основные моменты данного вариационного метода оптимальной линейной фильтрации изображений на основе частотных представлений и его модификацию, позволяющую снизить вычислительную сложность метода, используя свойства субполосных матриц.

Метод оптимальной линейной фильтрации изображений на основе частотных представлений

Изображение будем рассматривать в виде матрицы $\Phi=(f_{ik})$, $i=1,2,\dots,M$, $k=1,2,\dots,N$, элементы f_{ik} которой представляют собой значения яркости в точках (i,k) некоторой плоскости. Двумерная частотная область Ω (субинтервал), в которой осуществляется фильтрация с помощью вариационного метода оптимальной фильтрации, определяется выражением

$$\Omega : \{ \Omega(u, v) \mid (u \in [\alpha_1, \alpha_2], v \in [\beta_1, \beta_2]) \cup (u \in [\alpha_1, \alpha_2], v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], v \in [\beta_1, \beta_2]) \}, 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq \pi, \quad (1)$$

где α_1 , α_2 , β_1 , β_2 – границы частотного субинтервала.

Очевидно, что определенная данным образом частотная область Ω – симметричная.

Пусть $F(u, v)$, $Z(u, v)$ – Фурье-преобразования исходного изображения $\Phi=(f_{ik})$, $i=1,2,\dots,M$, $k=1,2,\dots,N$, и некоторого изображения $Y_\Omega=(y_{ik})$, $i=1,2,\dots,M$, $k=1,2,\dots,N$, которое

может быть получено в результате выполнения фильтрации исходного изображения в двумерной частотной области Ω (выделение некоторой компоненты, энергетический спектр которой содержится в выбранной частотной области Ω):

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N f_{ik} e^{-ju(i-1)} e^{-jv(k-1)}, \quad Z(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N y_{ik} e^{-ju(i-1)} e^{-jv(k-1)},$$

где переменные u, v определены в области $[-\pi, \pi]$ (нормированная частота).

Рассмотрим функционал

$$S_0(F, Z) = (1 - \beta) \iint_{(u,v) \in \Omega} |F(u, v) - Z(u, v)|^2 dudv + \beta \iint_{(u,v) \notin \Omega} |Z(u, v)|^2 dudv, \quad (2)$$

который может служить в качестве меры отклонения энергетического спектра выделяемой компоненты от энергетического спектра исходного изображения в заданном частотном интервале и отклонения от нуля вне этого интервала. При этом с помощью параметра β можно придавать различные веса указанным двум составляющим введенной меры. Изучим случай, когда веса обеих составляющих введенной меры (2) совпадают, то есть при $\beta=0,5$.

Под оптимальной фильтрацией в частотной области Ω понимается процесс выделения компоненты Y_Ω изображения Φ , удовлетворяющей некоторому вариационному принципу. Этот вариационный принцип заключается в том, что энергетический спектр преобразования $Z(u, v)$ компоненты Y_Ω должен наилучшим образом аппроксимировать энергетический спектр преобразования $F(u, v)$ исходного изображения в смысле минимума евклидовой нормы, т.е. на основании введенной меры отклонения (2) имеем

$$S(F, Z) = \iint_{(u,v) \in \Omega} |F(u, v) - Z(u, v)|^2 dudv + \iint_{(u,v) \notin \Omega} |Z(u, v)|^2 dudv \Rightarrow \min, \quad (3)$$

то есть спектр $|Z(u, v)|$ полученного изображения в области Ω практически совпадает со спектром $|F(u, v)|$ исходного изображения, а вне области Ω близок к нулю.

В работе [3] показано, что для нахождения результата фильтрации Y_Ω изображения Φ в частотной области Ω , оптимального в смысле указанного вариационного принципа (3), следует использовать выражение, которое в матричной форме имеет вид

$$Y_\Omega = A^T \cdot \Phi \cdot B, \quad (4)$$

где $A = (a_{i_1 i_2})$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, M$, и $B = (b_{k_1 k_2})$, $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, N$, – субполосные матрицы [4], соответствующие выбранному частотному субинтервалу Ω (1), элементы которых определяются следующими соотношениями

$$a_{i_1 i_2} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_2(i_1 - i_2)) - \sin(\alpha_1(i_1 - i_2))}{\pi(i_1 - i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases} \quad b_{k_1 k_2} = \begin{cases} \frac{\sin(\beta_2(k_1 - k_2)) - \sin(\beta_1(k_1 - k_2))}{\pi(k_1 - k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases}$$

Значение отдельного элемента изображения Y_Ω , полученного в результате оптимальной фильтрации изображения Φ , определяется выражением

$$y_{\Omega mn} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N f_{ik} a_{im} b_{kn}. \quad (5)$$

Метод оптимальной фильтрации, основанный на применении выражения (4), имеет вычислительную сложность порядка $O(M^2 N^2)$. Снизить вычислительную сложность данного метода оптимальной фильтрации позволяет использование свойств субполосных матриц.

Свойства собственных чисел и собственных векторов субполосных матриц в задаче обработки изображений

В работе [5] было показано, что элементы субполосных матриц A и B представимы в виде

$$a_{i_1 i_2} = \sum_{i_a=1}^M \lambda_{A i_a} q_{A i_a} q_{A i_2 i_a}, \quad b_{k_1 k_2} = \sum_{k_b=1}^N \lambda_{B k_b} q_{B k_b} q_{B k_2 k_b},$$

где

$$\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \dots, \lambda_{AM} \quad \text{и} \quad \lambda_{B1}, \lambda_{B2}, \dots, \lambda_{BN},$$

$$\bar{q}_{A1}, \bar{q}_{A2}, \dots, \bar{q}_{AM} \quad \text{и} \quad \bar{q}_{B1}, \bar{q}_{B2}, \dots, \bar{q}_{BN}$$

собственные числа и соответствующие собственные векторы данных матриц. Будем считать, что значения собственных чисел упорядочены по убыванию, т.е.

$$\lambda_{A1} \geq \lambda_{A2} \geq \dots \geq \lambda_{AM}, \quad \lambda_{B1} \geq \lambda_{B2} \geq \dots \geq \lambda_{BN}.$$

Выражение (5) может быть преобразовано к следующему виду:

$$y_{\Omega mn} = \sum_{i_a=1}^M \sum_{k_b=1}^N \lambda_{A i_a} \lambda_{B k_b} \cdot q_{A m i_a} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N q_{A i i} f_{ik} q_{B k k_b} \right) q_{B n k_b}. \quad (6)$$

Субполосные матрицы также можно представить в виде [6]

$$A = Q_A L_A Q_A^T, \quad (7)$$

$$B = Q_B L_B Q_B^T, \quad (8)$$

где столбцы матриц Q_A и Q_B составлены из значений собственных векторов матриц A и B соответственно, т.е.

$$Q_A = (\bar{q}_{A1}, \bar{q}_{A2}, \dots, \bar{q}_{AM}), \quad Q_B = (\bar{q}_{B1}, \bar{q}_{B2}, \dots, \bar{q}_{BN}),$$

матрицы L_A и L_B – квадратные матрицы, на главной диагонали которых расположены значения их собственных чисел, т.е.

$$L_A = \text{diag}(\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \dots, \lambda_{AM}), \quad L_B = \text{diag}(\lambda_{B1}, \lambda_{B2}, \dots, \lambda_{BN}).$$

Подставив выражения (7), (8) в выражение (4), получим следующее выражение для определения результата оптимальной фильтрации с использованием значений собственных чисел и собственных векторов субполосных матриц

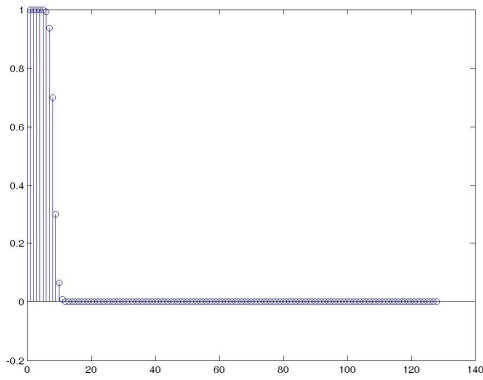
$$Y_{\Omega} = Q_A L_A Q_A^T \Phi Q_B L_B Q_B^T. \quad (9)$$

Интерес представляет визуализация вектора собственных чисел и матрицы собственных векторов Q отдельной субполосной матрицы, соответствующей некоторому частотному интервалу.

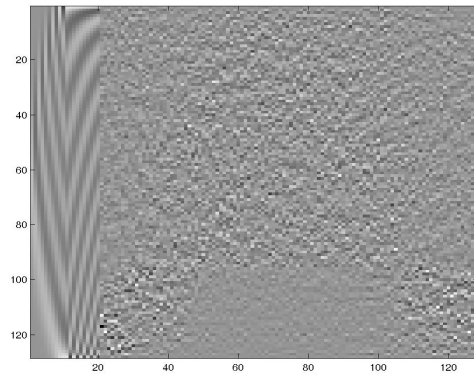
При практических расчетах область нормированных частот разбивается на прямоугольные частотные интервалы $\Omega_{r1, r2}$, $r_1=1, 2, \dots, R_a$, $r_2=1, 2, \dots, R_b$, (вдоль координатных осей частотного пространства выбирается конкретное количество R_a и R_b частотных отрезков).

При визуализации значений собственных чисел и матрицы собственных векторов субполосной матрицы в качестве примера были выбраны следующие значения: количество частотных интервалов было выбрано равным 16, размеры изображения выбраны 128x128 пикселей. На рис. 1, 2 значения собственных чисел приведены в виде диаграммы, матрицы собственных векторов – в виде изображения. На данных рисунках приведены значения, соответствующие 1-му и 2-му частотным интервалам, на которые разбита координатная ось частот.

Результаты, отображенные на рис. 1, 2 и в табл. 1, показывают, и данный факт подтвержден многочисленными экспериментами, что значения собственных чисел, начиная с некоторого номера близки к нулю, и практически совпадают у различных матриц.

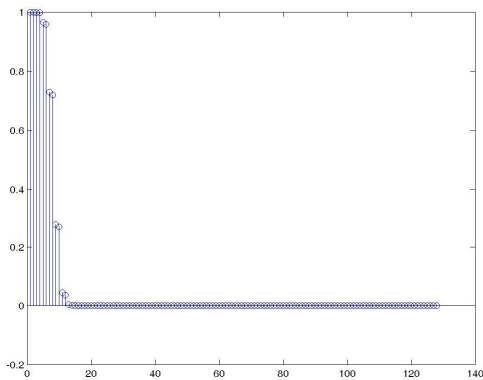


а

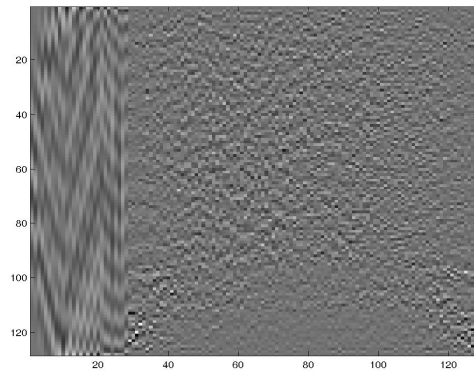


б

Рис. 1. Визуализация значений собственных чисел и матрицы собственных векторов субполосной матрицы, соответствующей 1-му частотному интервалу: а – значения собственных чисел, б – матрицы собственных векторов в виде изображения



а



б

Рис. 2. Визуализация значений собственных чисел и матрицы собственных векторов субполосной матрицы, соответствующей 2-му частотному интервалу: а – значения собственных чисел, б – матрицы собственных векторов в виде изображения

В табл. 1 приведены численные значения некоторых собственных чисел субполосных матриц, соответствующих различным частотным интервалам (количество частотных интервалов – 16, размеры изображения – 128×128 пикселей).

Рассмотрим величины J_a и J_b , позволяющие выделить ненулевые собственные числа субполосных матриц,

$$J_a = 2 \left\lceil \frac{M}{2R_a} \right\rceil + 2 \quad \text{и} \quad J_b = 2 \left\lceil \frac{N}{2R_b} \right\rceil + 2,$$

где операция [выражение] означает операцию взятия целой части «выражения».

В работе [6] показано, что при $J_a \geq 6$ и $J_b \geq 6$ собственные числа матриц A и B обладают следующими свойствами:

$$\lambda_{A1} \approx \lambda_{A2} \approx \lambda_{A3} \approx \lambda_{A4} \approx 1, \quad \lambda_{A, J_a+k} \approx 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

и

$$\lambda_{B1} \approx \lambda_{B2} \approx \lambda_{B3} \approx \lambda_{B4} \approx 1, \quad \lambda_{B, J_b+k} \approx 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то есть величины J_a и J_b определяют количество ненулевых собственных чисел матриц A и B соответственно.

Таблица 1

Значения первых 12 собственных чисел субполосных матриц, $N=128$

№ частотного интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	0.999	0.993	0.937	0.699	0.299	0.064	0.008	0.001
2	1	1	0.998	0.997	0.964	0.958	0.729	0.72	0.276	0.268	0.045	0.037
3	1	1	0.998	0.998	0.961	0.959	0.724	0.721	0.275	0.272	0.043	0.041
4	1	1	0.998	0.998	0.96	0.959	0.723	0.722	0.275	0.274	0.043	0.042
5	1	1	0.998	0.998	0.96	0.959	0.723	0.722	0.275	0.274	0.043	0.042
6	1	1	0.998	0.998	0.96	0.959	0.722	0.722	0.275	0.274	0.043	0.043
7	1	1	0.998	0.998	0.96	0.959	0.722	0.722	0.275	0.274	0.043	0.043
8	1	1	0.998	0.998	0.96	0.96	0.722	0.722	0.274	0.274	0.043	0.043

Таким образом, в соответствии с (7) и (8), с достаточной степенью обоснованности для матриц A и B можно использовать следующую аппроксимацию при условии разбиения области определения трансформанты Фурье на R_a и R_b частотных интервалов вдоль координатных осей

$$A \approx Q_{1A} L_{1A} Q_{1A}^T, \\ B \approx Q_{1B} L_{1B} Q_{1B}^T,$$

где

$$Q_{1A} = (\bar{q}_{A1}, \bar{q}_{A2}, \dots, \bar{q}_{AJ_a}), \quad Q_{1B} = (\bar{q}_{B1}, \bar{q}_{B2}, \dots, \bar{q}_{BJ_b}), \\ L_{1A} = \text{diag}(\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \dots, \lambda_{AJ_a}), \quad L_{1B} = \text{diag}(\lambda_{B1}, \lambda_{B2}, \dots, \lambda_{BJ_b}).$$

С учетом ненулевых собственных чисел субполосных матриц A и B выражение для определения результата оптимальной фильтрации принимает вид

$$Y_{1\Omega} = Q_{1A} L_{1A} Q_{1A}^T \Phi Q_{1B} L_{1B} Q_{1B}^T. \quad (10)$$

Для определения значения отдельного элемента результата фильтрации на основании соотношения (10) можно использовать следующее выражение

$$y_{1\Omega mn} = \sum_{i_a=1}^{J_a} \sum_{k_b=1}^{J_b} \lambda_{Ai_a} \lambda_{Bk_b} \cdot q_{Ami_a} q_{Bnk_b} \Gamma_{i_a k_b}, \quad (11) \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\Gamma_{i_a k_b} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N q_{Ai i_a} f_{ik} q_{Bk k_b}.$$

Выражения (9) и (10) определяют новый инструмент нахождения результатов оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений, не использующий прямое и обратное преобразования Фурье, учитывающий свойства субполосных матриц. Использование выражения (10) позволяет существенно сократить количество вычислительных операций по сравнению с выражением (9), не снижая точности вычислений.

Вычислительные эксперименты

С целью сравнения точности вычислений результатов фильтрации изображений с помощью методов, основанных на реализации выражений (9) и (10) был проведен ряд экспериментов.

В ходе вычислительных экспериментов по фильтрации модельного изображения, было получено среднеквадратическое отклонение приближенного результата фильтрации в частотном субинтервале с номерами (1,1) на основании соотношения (10), использующего свойства собственных чисел субполосных матриц, относительно точного результата фильтрации выбранного изображения в том же частотном субинтервале (соотношение (9)). В рассматриваемом примере в процессе вычислений количество частотных интервалов по обеим координатным осям выбрано одинаковым, равным R . Размерность исследуемого изображения $N \times N$, $N=256$, пикселей. Для конкретного значения R найденные точный и приближенный результаты фильтрации образуют соответственно матрицы (изображения) Y_0 и Y_E , размерности $N \times N$. Значение среднеквадратического отклонения δ , определено на основании следующего выражения

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (Y_{0ik} - Y_{Eik})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N Y_{0ik}^2}}. \quad (12)$$

Для найденных точного и приближенного результатов фильтрации Y_0 и Y_E также были найдены доли энергии в каждом частотном интервале, значения вычисленных долей энергий образуют матрицы P_{Y_0} и P_{Y_E} . Для матриц долей энергий найдено среднеквадратическое отклонение δ_2 , определенное на основании следующего выражения

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^R (P_{Y_0ik} - P_{Y_Eik})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^R P_{Y_0ik}^2}}. \quad (13)$$

Значения среднеквадратических отклонений δ_1 и δ_2 , соответствующие различным значениям количества частотных интервалов R , приведены в табл. 2.

Таблица 2

Среднеквадратическое отклонение значений долей энергии изображений Y_0 и Y_E

	Количество частотных интервалов R					
	2	4	8	16	32	64
Среднеквадратическое отклонение δ_1	0.0021	0.0025	0.0023	0.0017	0.0012	0.00071
Среднеквадратическое отклонение δ_2	3.86e-6	8.37e-6	4.2e-6	2.54e-5	1.35e-5	1.19e-5

Выводы

Проведенные вычислительные эксперименты демонстрируют достаточную точность вычисления результатов фильтрации при использовании ненулевых собственных чисел субполосных матриц и соответствующих им собственных векторов.

Использование свойств собственных чисел и собственных векторов субполосных матриц позволяет существенно снизить вычислительную сложность предлагаемого вариационного метода оптимальной фильтрации изображений.

Литература

1. Методы компьютерной обработки изображений [Текст] / Под редакцией В.А. Сойфера. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.
3. Жилияков, Е.Г. Оптимальная фильтрация изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. – Сер. ЭВТ, 2008. – Вып. 1. – С. 118-131.
4. Жилияков, Е.Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков – Белгород, изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.
5. Жилияков, Е.Г. Метод определения точных значений долей энергии изображений в заданных частотных интервалах [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец, И.В. Лысенко // Вопросы радиоэлектроники. – Сер. РЛТ, 2007. – Вып. 4. – С. 115-123.
6. Жилияков, Е.Г. Вариационные методы частотного анализа звуковых сигналов [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, Е.И. Прохоренко // Труды учебных заведений связи. – СПб, 2006. – № 174. – С. 163-170.

ABOUT PROPERTIES OF SUBBAND MATRICES EIGENVECTORS

A.A. CHERNOMORETS
E.I. PROKHORENKO
V.A. GOLOSCHAPOVA

Belgorod State University

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

The properties of subband matrices used in the optimal image filtration on the basis of frequency representations are described in the work. Results of experimental investigations of efficiency of the optimal filtration subject to subband matrices properties are given

Key words: subband matrix, image processing, eigenvector, filtration