

# НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ АППАРАТ РЕШЕНИЯ СИСТЕМНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ КРИТЕРИЕВ

**С.Н. МАЛИКОВ**<sup>1)</sup>

**А.П. ИГНАТЬЕВ**<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *МАРТИТ*

*e-mail: myamlik@super-computer.ru*

<sup>2)</sup> *Белгородский государственный университет*

*e-mail: aignatiev@rktelecom.ru*

Рассматривается один из возможных подходов научно-методического аппарата решения системно-экономических задач по многоуровневой системе критериев. Сформирован системный подход к синтезу научно-методического аппарата решения системно-экономических задач, разработаны автоматизированные процедуры оценки объектов системно-экономического анализа по многоуровневой системе критериев.

Ключевые слова: системный подход, синтез научно-методического аппарата решения системно-экономических задач, автоматизированные процедуры оценки объектов системно-экономического анализа.

В статье рассмотрен системный подход к синтезу научно-методического аппарата решения системно-экономических задач, разработаны автоматизированные процедуры оценки объектов системно-экономического анализа по многоуровневой системе критериев.

На основе проведенного системного анализа формальных признаков системно-экономических задач была предложена их классификационная схема, которая послужила исходной посылкой к синтезу концептуального научно-методического аппарата решения системно-экономических задач. Принимая во внимание то обстоятельство, что при разработке научно-методического аппарата имеет место целенаправленный процесс воспроизведения заданной совокупности функций, то в основу его синтеза должен быть положен функционально-структурный подход. Данный подход основывается на предположении первичности функционального назначения системы по отношению к её структурной организации.

С позиций функционально-структурного подхода задачу разработки научно-методического аппарата можно сформулировать как синтез такой его структуры и состава, при которых: а) вероятность нахождения допустимых отображений поступающих на вход научно-методического аппарата задач на множество его элементов стремится к максимуму; б) ресурсы на разработку научно-методического аппарата не превышают допустимых:

$$P(f: Z \rightarrow X) \max, \quad R \leq R_{\text{зад}}, \quad (1)$$

где  $Z$  – множество задач, поступающих на вход методического аппарата;  $X$  – множество элементов, образующих методический аппарат;  $f: Z \rightarrow X$  – допустимое отображение; т.е. отображение задачи на элементы методического аппарата, позволяющих решить задачу;  $P(f: Z \rightarrow X)$  – вероятность нахождения допустимых отображений;  $R_{\text{зад}}$  – ресурсы, выделенные на разработку методического аппарата.

Опираясь на постановку (1), в главе сформулированы и обоснованы предложения по составу и структуре научно-методического аппарата решения системно-экономических задач, укрупненная схема которого приведена рис. 2. Предложенный научно-методический аппарат следует рассматривать как открытую динамичную систему, развивающуюся в соответствии с потребностями практики системно-экономического анализа. Ввиду существенного разнообразия элементов предложенного научно-методического аппарата были уточнены границы дальнейшего исследования, которые очертили элементы, направленные на решение многокритериальных задач системно-экономического анализа. При этом фокус внимания был смещен на первый и второй типы многокритериальных задач, наиболее распространенными из которых задачи оценки объектов системно-экономического анализа по многоуровневой системе критериев (1-ий тип многокритериальных задач) и задачи планирования распределения

недостаточных денежных средств по объектам финансирования на основе системы приоритетов (2-й тип многокритериальных задач).

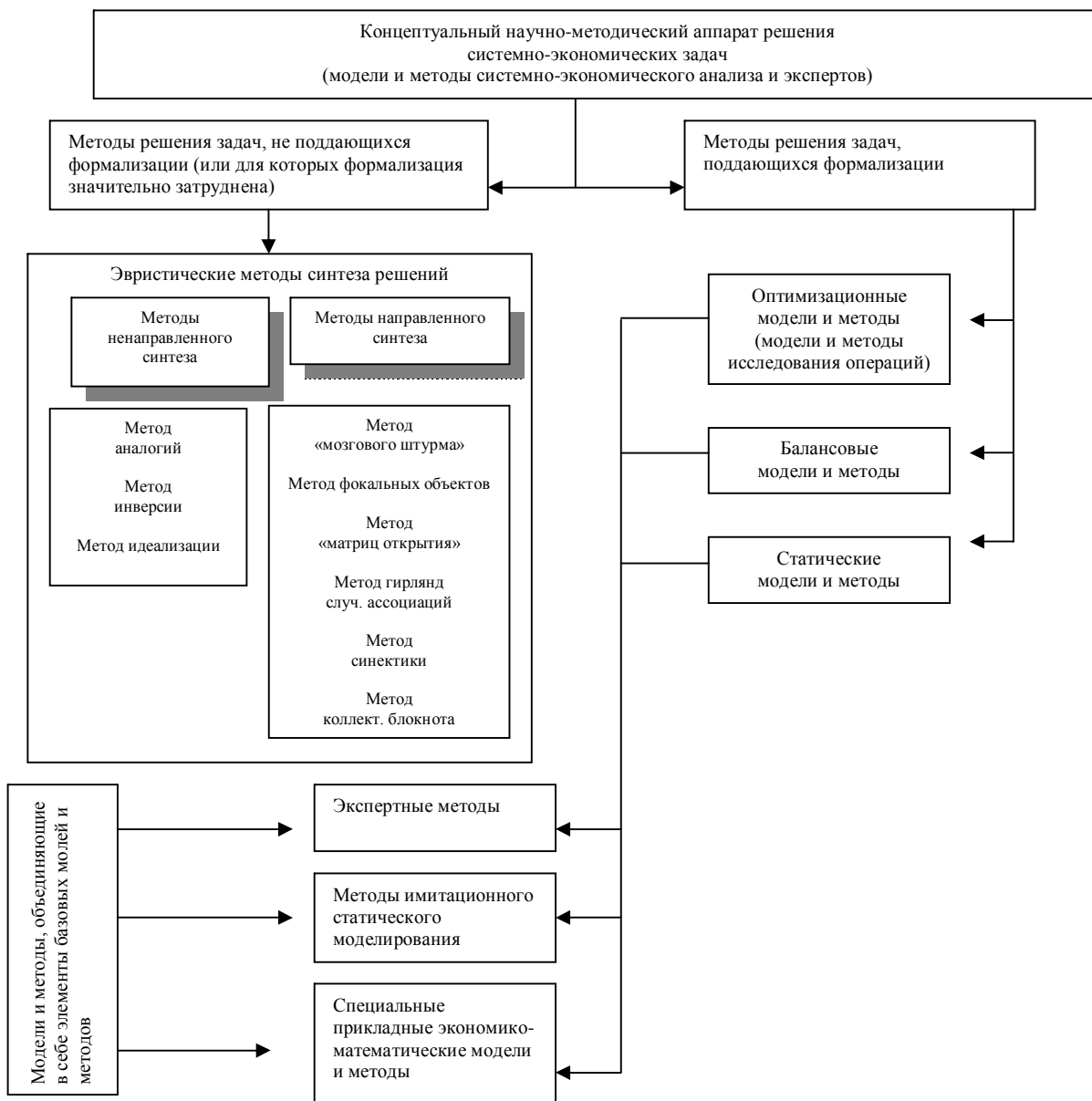


Рис. 2. Структурная схема концептуального научно-методического аппарата решения системно-экономических задач

При разработке методов решения многокритериальных задач приходится решать ряд специфических проблем, основными из которых являются: проблема выбора принципа компромисса и соответствующего ему принципа оптимальности; проблема учета приоритетов критериев; проблема нормализации критериев. Перечисленные проблемы носят не столько формальный, сколько концептуальный характер, что обуславливает необходимость применения различного рода эвристических процедур, в которых существенная роль принадлежит экспертам. Среди методов решения многокритериальных задач, имеющих, с одной стороны, признанную теоретическую обоснованность, а с другой стороны, удовлетворяющих требованию универсальности, в настоящее время наибольшее распространение получили методы теории полезности, методы теории нечетких множеств, методы векторной стратификации, метод анализа иерархий. Границы проведенного исследования очерчивают вычислительные процедуры метода анализа иерархий, занимающего доминирующее положение в современной практике системно-экономического анализа.

Предложен научно-методический аппарат оценки объектов системно-экономического анализа по многоуровневой системе критериев, являющийся развитием метода анализа иерархий и включающий в себя ряд новых основных и вспомогательных вычислительных процедур: процедуру нахождения максимального собственного значения (индекса однородности) и главного собственного вектора (вектора приоритетов) матрицы парных сравнений; модифицированную процедуру сокращенного построения матрицы парных сравнений; процедуру определения мест нарушений однородности экспертных суждений; процедуру сравнения объектов на основе построения интервалов, согласованных со шкалой метода анализа иерархий.

Разработанная и теоретически обоснованная основная вычислительная процедура метода анализа иерархий предназначена для нахождения максимального собственного значения и главного собственного вектора матрицы парных сравнений. Данная процедура не уступает в точности типовой процедуре метода и при этом обладает более быстрой сходимостью. Последнее превосходство достигается благодаря учету особенностей строения матрицы парных сравнений, что позволяет эффективно использовать обратную схему вычислений  $\lambda_{\max} \rightarrow (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , где  $\lambda_{\max}$  – максимальное собственное значение матрицы парных сравнений, используемое для расчета индекса однородности;  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  – главный собственный вектор матрицы парных сравнений, являющийся искомым вектором приоритетов.

Используя предложенную схему вычислений, удастся избежать главного недостатка типовой процедуры – возведения матрицы парных сравнений в произвольно большие степени в соответствии с выражением

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A^p e}{e^t A^p e} = CW, \quad p \rightarrow \infty,$$

где  $A$  – матрица парных сравнений;  $e = \{1, 1, \dots, 1\}$  – единичный вектор;  $p$  – показатель степени;  $C$  – константа;  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  – главный собственный вектор.

В разработанной процедуре операция возведения матрицы в степень используется для нахождения коэффициентов характеристического многочлена и не превосходит порядка матрицы  $n$  ( $n < p$ ). Укрупненный алгоритм разработанной процедуры представлен на рис. 3.

В основу теоретического обоснования процедуры положено исследование коэффициентов и корней характеристического (векового) уравнения

$$(2) \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразования уравнение (2) представляет собой алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + b_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n = 0, \quad (3)$$

где  $b_1 = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = n$  – след матрицы  $A$ ;  $b_m = \sum M^{(m)}$  – сумма всех главных миноров  $m$ -ого порядка;  $b_n = \det(A)$  – определитель матрицы  $A$ .



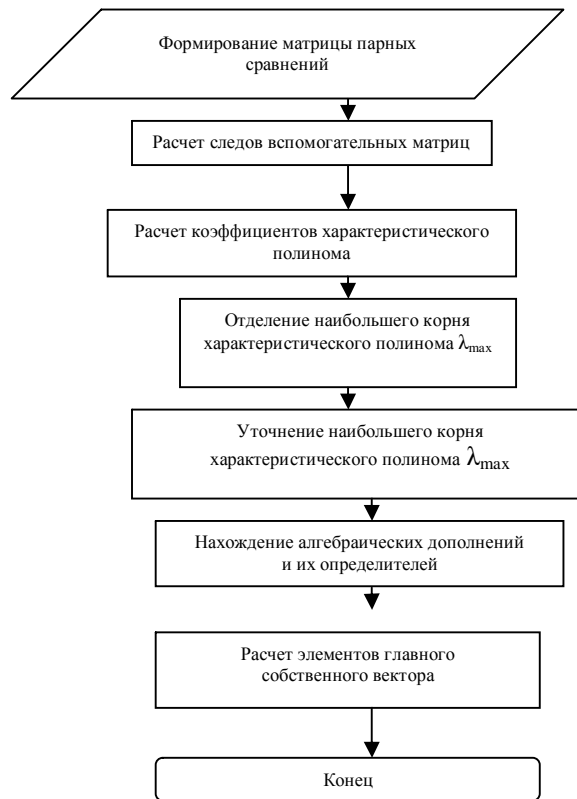


Рис.3. Укрупненный алгоритм основной вычислительной процедуры метода анализа иерархий

В процессе обоснования процедуры доказаны теоремы о коэффициентах  $b_2$  и  $b_3$  характеристического многочлена матрицы парных сравнений. Показано, что

$$b_2 = 0, \quad a \quad b_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{r>j}^n \frac{(a_{ij}a_{jr} - a_{ir})^2}{a_{ij}a_{jr}a_{ir}}.$$

Для коэффициента  $b_4$  установлено, что получить его компактное аналитическое выражение через элементы матрицы парных сравнений не удастся, но есть возможность произвести эффективное разложение определителя матрицы парных сравнений по определителям 3-го порядка. Для нахождения коэффициентов  $b_i (i \geq 5)$  предложено использовать эффективные вычислительные процедуры Фадеева или Ливеррье.

Теоретически обоснована минимальная правая граница окрестности, в которой гарантированно находится наибольший действительный корень характеристического уравнения  $\lambda_{\max}$ , которому соответствует главный собственный вектор матрицы парных сравнений. Получено компактное аналитическое выражение (4), позволяющее получить точную оценку минимальной правой границы окрестности для матриц с нечетным порядком  $n$  и близкое приближение для матриц с четным порядком  $n$ :

$$\text{Inf } \lambda_{\max} = 4\frac{5}{9}n - 3\frac{5}{9}. \quad (4)$$

В табл.1 приведены значения  $\lambda_{\max}$ , рассчитанные для матриц  $n=3 \dots 15$  на основании аналитического выражения (4), а также на основании характеристического уравнения

$$P(\lambda) = (-\lambda)^n + n(-\lambda)^{n-1} + b_3(-\lambda)^{n-3} \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n = 0. \quad (5)$$

Таблица 1

n	inf $\lambda_{\max}$ ПО	inf $\lambda_{\max}$ ПО	n	inf $\lambda_{\max}$ ПО	inf $\lambda_{\max}$ ПО
---	-------------------------	-------------------------	---	-------------------------	-------------------------



эксперимента. Для матриц парных сравнений порядка  $n=3...15$  получены статистические оценки точности приближенных вычислительных процедур (среднее, среднеквадратическое отклонение, доверительные интервалы при уровнях значимости  $\alpha=0,1; \alpha=0,05; \alpha=0,01$ ). На рис. 4 представлены графики зависимости усредненных относительных отклонений  $\bar{d}^i$  от порядка матрицы  $n$ .

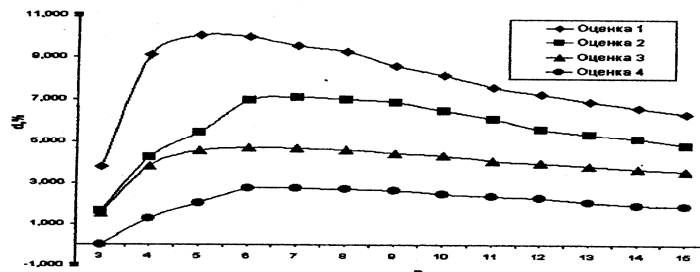


Рис. 4. Зависимости усредненных относительных отклонений  $\bar{d}^i$  от порядка матрицы  $n$

На основе предложенного метода проверено предположение о существовании вычислительной процедуры (степенного среднего  $s_a = \frac{(x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a)^{1/a}}{n}$  таким значением параметра  $a$ ), при которой  $\lambda_{\max}^a$ , рассчитанное на основе степенного среднего  $s_a$ , столь угодно близко к  $\lambda_{\max}^0$ . Результаты эксперимента подтвердили данное предположение, однако регулярные значения параметра  $a$  для матриц заданной размерности получить не удалось, так как этот параметр оказался очень чувствительным к изменению элементов матрицы парных сравнений.

В главе разработаны вспомогательные вычислительные процедуры метода анализа иерархий, расширяющие прикладную направленность метода: модифицированная процедура сокращенного построения матрицы парных сравнений; процедура определения мест нарушений однородности экспертных суждений; процедура сравнения объектов на основе построения интервалов, согласованных со шкалой метода анализа иерархий.

Модифицированная процедура сокращенного построения матрицы парных сравнений позволяет строить однородную матрицу парных сравнений на основании суждений эксперта, вынесенных только относительно первого объекта сравнения (в этом случае эксперт выносит  $n-1$  суждение по сравнению с  $\frac{n(n-1)}{2}$  суждениями в типовой процедуре). Указанная возможность обеспечивает переход от квадратичного роста числа парных сравнений по мере роста числа  $n$  к росту линейному. Особенность модификации процедуры заключается в соблюдении условия кардинальной однородности суждений в соответствии с принятой дискретной шкалой отношений путем приведения элементов  $a_{ij}^*$  к элементам  $a_{ij}$  с помощью выражения  $a_{ij} = s_k$  при выполнении условия

$$\text{Min } |a_{ij}^* - s_k|, k \in K,$$

где  $s_k \in S$  ( $S$  – множество оценок в соответствии со шкалой метода).

Процедура определения мест нарушений однородности экспертных суждений в матрице парных сравнений позволяет выявить такие нарушения в случае построения матрицы стандартным (не сокращенным) способом. Эффективность процедуры проявляется особенно для матриц порядка  $n \geq 6$ , когда выявление мест нарушения однородности экспертных суждений вызывает существенные затруднения.

Суть процедуры заключается в расчете вспомогательных элементов

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{b_{ij}}{a_{ij}}, \text{ если } b_{ij} > a_{ij}, \\ \frac{a_{i-1,j}}{a_{i-1,i}}, \text{ где } b_{ij} = \frac{a_{i-1,j}}{a_{i-1,i}}, i > j, i \neq 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{a_{ij}}{b_{ij}}, \text{ если } b_{ij} > a_{ij}$$

которые указывают на степень нарушения однородности экспертных суждений (чем больше  $c_{ij}$ , тем в большей степени нарушена однородность суждением эксперта, высказанном относительно элемента  $a_{ij}$ ). Пересмотр суждений относительно элементов  $a_{ij}$  осуществляется в порядке убывания элементов  $c_{ij}$ , при этом во внимание принимаются значения элементов  $b_{ij}$ . Если значение элемента  $b_{ij}$  выходит за границы интервала  $[1/9; 9]$ , то соответствующий элемент  $a_{ij}$  корректируется к ближней границе (относительно элемента  $b_{ij}$ ) указанного диапазона.

Процедура сравнения объектов на основе согласованных интервалов эффективна в ситуациях, когда при сравнении объектов существенным является не точное значение критерия, а его попадание в границы определенного интервала. В процессе разработки данной процедуры предложено правило нормирования критериев, если лучшему значению критерия соответствует определенное значение  $z^*$ , справа и слева от которого равноудаленные значения равнозначны:

$$w_i = \begin{cases} 1 - \frac{\frac{|z_i - z^*|}{z^*}}{\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{|z_i - z^*|}{z^*}\right)}, \text{ если } 0 \leq z_i \leq 2z^*, \\ 0, \text{ если } z_i < 0 \text{ или } z_i > z^* \end{cases} \quad (11)$$

Рассчитаны границы согласованных интервалов применительно к случайной величине  $Z$ , распределенной по нормальному закону. В этом случае границы интервалов

$a_i$  ( $i=1,8$ ) находятся через функцию  $\text{arg}\Phi$ , обратную функции  $\Phi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \frac{(t-x)^2}{2\sigma^2} dt$ . Для стандартного нормального распределения ( $m=0, \sigma=1$ ) значения точек  $a^{ct}_i$  ( $i=1,8$ ) приведены в табл. 2.

Таблица 2

Точка	Значение	Точка	Значение
$a^{ct}_1$	-1,22064	$a^{ct}_5$	0,13971
$a^{ct}_2$	-0,76471	$a^{ct}_6$	0,43073
$a^{ct}_3$	-0,43073	$a^{ct}_7$	0,76471
$a^{ct}_4$	-0,13971	$a^{ct}_8$	1,22064

На основании значений, приведенных в табл.2, можно легко получить значения точек  $a_i$  ( $i=1,8$ ) для нормального закона распределения с произвольными параметрами  $m$  и  $\sigma$  по формуле (12):

$$a_i = a_i^{ct} \times \sigma + m. \quad (12)$$

После нахождения всех точек  $a_i$  ( $i=1,8$ ) будет получено девять интервалов, длина которых зависит от параметров  $m$  и  $\sigma$ . Математическое ожидание  $m=z$  приходится на середину пятого интервала (рис. 5).

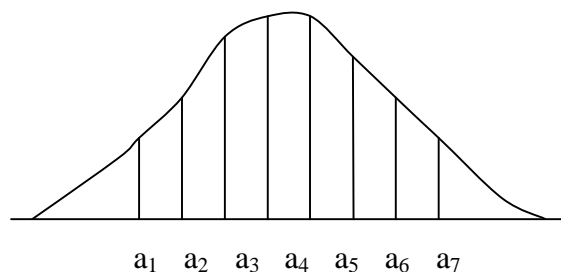


Рис. 5. Интервалы, согласованные со шкалой метода анализа иерархий

Перевод значений  $z$  в оценки в соответствии со шкалой метода анализа иерархий осуществляется по следующему правилу

$$(13) \quad a_{ij} = \begin{cases} |N_i - N_j| + 1, & \text{если } N_i \geq N_j, \\ \frac{1}{|N_i - N_j| + 1}, & \text{если } N_i < N_j, \end{cases}$$

где  $N_i$  – номер интервала, в который попало значение  $z_i$ .

Предложенные процедуры прошли апробацию при разработке методических рекомендаций по автоматизированной оценке квалификации поставщиков телекоммуникационного оборудования по конкурсной системе распределения заказов (конкурсные торги).

#### Заключение

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1) Представ материал по структуре и составу концептуального научно-методического аппарата решения системно-экономических задач, построенного на их классификации по их формальным признакам предложены научно-методический аппарат, следует рассматривать как открытую методическую систему развивающуюся в соответствии с потребностью практики системно-экономического анализа.

2) Научно-методический аппарат оценки объектов системно-экономического анализа по многоуровневой системе критериев, являющихся развитием метода анализа и включающий в себя ряд новых основных и вспомогательных вычислительных процедур, а именно: процедуру нахождения максимального собственного значения (индекса однородности) и главного собственного вектора (вектора приоритетов) матрицы парных сравнений; модифицированную процедуру сокращенного построения матрицы парных сравнений; процедуру определения мест нарушений однородности экспертных суждений; процедуру сравнения объектов на основе построения интервалов, согласованных со шкалой метода анализа иерархий.

#### Литература

1. Борисов А.Н. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. – Рига: Зинатне, 1982.
2. Демин В.К., Тютин Н.Н., Храмешин Г.К., Чудинов С.М. Региональные информационные структуры методы и функциональные оценки БелГУ; 2008-2009 г.
3. Кравец А.С. Природа вероятности. М.: Мысль, 1976.



4. Розен В.В.. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Высшая школа, 2002.
5. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний. Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2003.
6. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981.
7. Трофимец В.Я. Системный анализ и синтез автоматизированных процедур в поддержку принятия системно-экономических решений. М: МАРТИТ, 2004 г.

## SCIENTIFICALLY-METHODICAL DEVICE OF THE DECISION OF SYSTEM-ECONOMIC PROBLEMS ON MULTILEVEL SYSTEM OF CRITERIA

S.N. MALIKOV<sup>1)</sup>

A.P. IGNATYEV<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *MARTIT*

*e-mail:*

*aignatiev@rktelecom.ru*

<sup>2)</sup> *Belgorod State University*

*e-mail:*

*aignatiev@rktelecom.ru*

Summary: one of possible approaches of the scientifically-methodical device of the decision of system-economic problems on multilevels to system of criteria is considered. The system approach to synthesis of the scientifically-methodical device of the decision of system-economic problems is generated, the automated procedures of an estimation of objects of the system-economic analysis on multilevel system of criteria are developed.

Key words: the system approach, synthesis of the scientifically-methodical device of the decision of the system-economic problems, the automated procedures of an estimation of objects of the system-economic analysis.