ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ МНОГОЛЕНТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

В.Е. Хачатрян
Я.Г. Великая

Белгородский государственный университет

e-mail: velikaya@bsu.edu.ru

На примере многоленточных автоматов предлагается общий подход решения фундаментальных проблем моделей вычислений: эквивалентности, эквивалентных преобразований, минимизации. Подход основан на построении и использовании эквивалентных преобразований.

Ключевые слова: модели вычислений, многоленточные автоматы, проблема эквивалентных преобразований, проблема эквивалентности, проблема минимизации

Модель вычислений в широком смысле может трактоваться как множество конструктивных объектов с приписанной ему универсальной процедурой, посредством которой каждому объекту сопоставляется порождаемое им множество.

Классическими моделями вычислений являются алгебраические выражения, формулы логики, конечные автоматы, абстрактные вычислительные машины, схемы программ и другие [1,2,3,4].

При решении тех или иных задач конкретных моделей вычислений приходится решать следующие проблемы, называемые фундаментальными: эквивалентных преобразований, эквивалентности, минимизации.

Проблема эквивалентных преобразований [5, 6]

Пусть M некоторое множество объектов, и D_1, D_2 объекты этого множества. Упорядоченную пару (D_1, D_2) назовем преобразованием объекта D_1 в объект D_2 в множестве M.

Преобразование (D_1, D_2), по определению, эквивалентно, если эквивалентны объекты D_1 и D_2. Множество преобразований по традиции называется системой преобразований. Система T э. п называется полной в M, если для любых двух эквивалентных объектов D', D'' из M существует последовательность $(D_1, D_2)(D_2, D_3)\dots(D_{k-1}, D_k)$, $k \geq 2$ преобразований, принадлежащих T, такая, что $D' = D_1$, $D'' = D_k$.

Тривиальной называется полная система преобразований, состоящая из всех пар эквивалентных объектов, принадлежащих M.

Проблема эквивалентных преобразований в M состоит в поиске нетривиальной полной в M системы.

Проблема э. п., будучи решенной, для некоторого множества объектов, позволяет увидеть, чем отличаются друг от друга эквивалентные объекты, принадлежащие этому множеству.

Решение проблемы э. п. позволяет говорить о решении проблемы частичного распознавания эквивалентности.

Проблема эквивалентности [7, 8]

Под проблемой эквивалентности понимается нахождение алгоритма разрешения эквивалентности, т.е. алгоритма, который по любой паре объектов рассматриваемого множества отвечает на вопрос, эквивалентны объекты пары или нет.

Проблема минимизации и поиска всех минимальных [1, 9]

Проблема минимизации, состоит в построении объекта имеющего минимальное число состояний среди всех объектов, ему эквивалентных.

Обобщим проблему следующим образом: пусть M – рассматриваемое множество объектов; требуется

- по заданному объекту из M найти в классе его эквивалентности объект с минимальным числом состояний;
- описать процедуру, посредством которой по найденному объекту конструируется любой минимальный объект в том же классе эквивалентности.

Поставленная задача именуется обобщенной проблемой минимизации в M.

Предлагается следующий общий подход решения этих фундаментальных проблем. Первоначально необходимо решить проблему эквивалентных преобразований, а именно построить полную систему эквивалентных преобразований. Затем, используя полученную полную систему э.п. преобразований, решить остальные фундаментальные проблемы. А именно: используя полную систему э. п. разработать алгоритм (если таковой существуют), который с помощью э. п. позволяет определить, эквивалентны сравниваемые объекты или нет; разработать алгоритм, который с помощью э. п. позволяет по любому объекту получить минимальный в классе эквивалентности. Отметим, что в общем случае минимальный объект не является единственным и именно полная система эквивалентных преобразований может позволить получить их все.

В работе показывается, что для многоленточных автоматов основополагающей нужно считать проблему э. п., решение которой можно получить, изучив структуру эквивалентных автоматов. Решение проблемы э.п. позволяет решить проблему частичного распознавания эквивалентности, а иногда и эквивалентности. И, конечно же, решение проблемы э. п. позволяет заняться "улучшением" имеющегося автомата, в частности, проблемой минимизации автомата по тем или иным его параметрам. При этом, именно наличие полной системы э. п. позволяет решить проблему нахождения всех минимальных автоматов, поскольку в общем случае он не единственен.

Многоленточные автоматы

Для решения поставленных задач предлагается графическое представление многоленточных автоматов, поскольку мы считаем, что именно такое представление позволяет исследовать структуру рассматриваемых объектов.

Многоленточный автомат представляется диаграммой его переходов и называется автоматом [10].

Автомат – это конечный ориентированный граф с размеченными вершинами символами из $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $n \geq 2$, и дугами, размеченными символами из $Q = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$, $m \geq 2$. Его структура удовлетворяет требованиям:

- в нем имеются две выделенные вершины, называемые входом и выходом диаграммы; из выхода нет исходящих дуг, а из всех остальных вершин исходят по m дуг;
- все вершины, кроме выхода, помечены символами алфавита P, а выходящие из вершин дуги помечены символами алфавита Q, причем дуги, выходящие из одной вершины, помечены различными символами.

Конечный ориентированный путь w в диаграмме описывается историей L(w), где $L(w) = (a_1, \varepsilon_1)(a_2, \varepsilon_2)\ldots(a_k, \varepsilon_k)$, a_j – метка вершины, из которой исходит j-ая дуга пути, а ε_j – метка этой дуги, $j = 1, 2, \ldots, k$.

p_i – проекцией, $i = 1, 2, \ldots, n$ пути w называется слово, полученное из L(w) удалением всех пар, не содержащих символа p_i.

Автоматы, по определению, эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого пути из входа в выход одного автомата в другом существует путь с теми же p_i – проекциями, $i = 1, 2, \ldots, n$, и наоборот.

Фрагментные преобразования

Фрагментом автомата считается его часть, определяемая заданным множеством вершин и инцидентными им дугами, которые сохраняют приписанные им метки [6, 10].

Система э. п. преобразований задается конечным набором пар фрагментов, таким, что при замене вхождения одного фрагмента пары в любом автомате другим фрагментом получаем автомат эквивалентный первому [6, 10].

Проблема эквивалентных преобразований многоленточных автоматов

Разработка э. п. основана на семантическом анализе рассматриваемого отношения эквивалентности и не предполагает наличие алгоритма разрешения эквивалентности, а значит и его использования.

Опишем содержательно систему э.п. $T_{n,m}$ для многоленточных автоматов $M_{n,m}$ над алфавитами $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $n \geq 2$, и $Q = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$, $m \geq 2$. Система состоит из пяти групп. Первые две предназначены для удаления вершин не лежащих на пути из входа в выход. Третья позволяет удалять или добавлять строго эквивалентные вершины.

Четвертая позволяет менять порядок работы с лентами и наконец пятая — сворачивать и разворачивать циклы встречающиеся в автомате.

Система $T_{n,m}$ полна в $M_{n,m}$, где $n > 2$, $m \geq 2$. [10]

Отметим, что при доказательстве полноты, используется стратегия построения полной системы э. п. как приведением к изоморфным автоматам, так и приведением одного автомата к другому.

Проблема эквивалентности многоленточных автоматов

Для построения разрешающего алгоритма предлагается трансформационный метод [11, 12], использующий для распознавания эквивалентности объектов эквивалентные их преобразования.

Трансформационный метод основан на построении покрытия исходного автомата; выделении, с использованием э. п., купола, в сравниваемом автомате, изоморфного покрытию исходного автомата; построении дерева потомков позволяющего отслеживать процесс проверки автоматов на эквивалентность.

Исходные автоматы эквивалентны тогда и только тогда, когда трансформационный метод не ломается ни на одном шаге, и каждая вершина дерева потомков состоит из эквивалентных автоматов.

Автомат называется с непересекающимися циклами [12], если при циклической работе автомата ленты могут меняться, но с покиданием цикла возврат к нему уже невозможен.

α-сечением дерева потомков назовем сечение [12], каждая вершина которого содержит метку, состоящую из изоморфных автоматов.

Автоматы с непересекающимися циклами эквивалентны тогда и только тогда [12], когда дерево потомков заканчивается α-сечением, причем высота дерева потомков не превышает числа $n+3$, где n – ранг сравниваемых автоматов.

Проводилась апробация метода [14] на конечных детерминированных многоленточных автоматах

Особо подчеркнем, что трансформационный метод применим к классам автоматов с неразрешимой проблемой включения.

Проблема минимизации для многоленточных автоматов

Отметим основные особенности многоленточных автоматов:

- существуют классы эквивалентности, обладающие не единственным минимальным по числу состояний автоматами;
- автомат, не содержащий эквивалентных состояний (тупиковый) не является минимальным;
- существуют классы эквивалентности с бесконечным числом тупиковых автоматов.

Пусть множество M состоит из всех автоматов над алфавитами $P=\{p,q\}$, $Q=\{0,1\}$, структура которых удовлетворяет требованиям: из любого q-состояния автомата дуга, помеченная символом 1, ведет в мертвое состояние автомата; любое состояние автомата, отличное от мертвого, принадлежит какому-либо пути через автомат.

Разработан метод [9, 13], который по любому автомату из M, используя лишь э. п., строит все минимальные (по числу состояний) ему эквивалентные.

Метод не использует алгоритм разрешения эквивалентности.

Суть метода заключается в следующем:

- Класс эквивалентности разбивается на «срезы» (срез – подкласс автоматов с одинаковой p-проекцией).
- Среди срезов существует единственный – «главный срез» (срез, с минимальным числом p-состояний).
- Используя полную систему э. п., по произвольному автомату можно построить канонический (он единственен в классе эквивалентности и принадлежит главному срезу).
- Используя полную систему э. п. среза, находят все минимальные автоматы главного среза.
- Осуществляется поиск в допустимых срезах автоматов, размеры которых не превышают размера минимальных автоматов в главном срезе, с доказательством их тупиковости и конечности их множества.

Литература

1. Бауэр В. Введение в теорию конечных автоматов, под ред. Ю.И. Журавлева – М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
2. Котов В.Е., Сабельфельд В.К. Теория схем программ. Москва: Наука. 1991. с. 248
3. Eilenberg S. Automata, Lnguages and Macines, Vol. A (Academic Press, New York, 1974).
4. Rabin M.O., Scott D. Finite automata and their decision problems // IBM J. of Research and Development, 1959, 3, № 2. p. 114–125 (Русский перевод: Кибернетический сборник, 1962, № 4, с. 58–91)
5. Подловченко Р.И. О проблеме эквивалентных преобразований программ // Программирование, 1986, №6, с. 3–14
6. Подловченко Р.И., Айрапетян М.Г. О построении полных систем эквивалентных преобразований схем программ // Программирование, 1996. № 1. с. 3–29.
7. Летичевский А.А. Практические методы распознавания эквивалентности дискретных преобразователей и схем программ// Кибернетика, 1973, № 4, с.15–26.
8. Подловченко Р.И. Распознавание эквивалентности в модели программ с частично перестановочными операторами // Тезисы докл. Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные аспекты разработки больших распределенных программных комплексов» (г. Новороссийск, 21–26 сент. 1998), изд. МГУ, 1998, с. 15–20
9. Хачатрян В.Е. Решение обобщенной проблемы минимизации для двухленточных автоматов с одной фиксированной лентой // ДАН. 2006. том 411. № 3. с. 314–318.
10. Хачатрян В.Е. Полная система эквивалентных преобразований для многоленточных автоматов // Программирование. 2003. №1. С.62-77.
11. Подловченко Р.И., Хачатрян В.Е. Метод трансформацинного распознавания эквивалентности в моделях вычислений // 8-ой межд. сем. Дискретная математика и ее приложения. Москва, МГУ. 2004. С. 38–43.
12. Подловченко Р.И., Хачатрян В.Е. Об одном подходе к разрешению проблемы эквивалентности // Программирование. 2004. № 3. С. 1–17.
13. Подловченко Р.И, Хачатрян В. Е. Минимальность и тупиковость многоленточных автоматов // Дискретная математика. 2008. № 2. с. 92–120.
14. Хачатрян В.Е. Трансформационный метод в моделях вычислений // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2008. № 4. с. 52–55.

THE APPROACH TO THE DECISION OF FUNDAMENTAL PROBLEMS OF MODELS OF CALCULATIONS ON AN EXAMPLE OF MULTITAPE AUTOMATIC DEVICES

V.E.Khachatryan
Y.G.Velikaya

The Belgorod state university

e-mail: velikaya@bsu.edu.ru

On an example of multitape automatic devices the common approach of the decision of fundamental problems of models of calculations is offered: the equivalence, equivalent transformations, minimization. The approach is based on construction and use of equivalent transformations.

Key words: models of calculations, multitape automatic devices, a problem of equivalent transformations, a problem of equivalence, a problem of minimization