О ВЫЧИСЛЕНИИ ОЦЕНОК ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Н.С. ТИТОВА

Белгородский государственный университет

e-mail: ***NTitova@bsu.edu.ru***

В данной работе предлагается схема аппроксимации функций и их производных по эмпирическим данным. Она основана на использовании известной из математического анализа формулы, позволяющей выразить дифференцируемую функцию через производную.

Ключевые слова: интерполяция, оценка производной, частотное представление, устойчивость вычислений.

Необходимость оценивания производных речевого сигнала по имеющимся его дискретным отсчётам возникает при решении различных задач анализа и синтеза речевых данных. Например, в большинстве систем распознавания речи первая временная производная используется как дополнительный параметр, имеющий смысл скорости изменения функции сигнала, для увеличения вероятности правильного распознавания.

Речевой сигнал характеризуется различными статистическими параметрами, в том числе наличием амплитудных скачков, которые могут быть определены анализом изменения знака производной функции сигнала.

Существенным недостатком существующих подходов [6, 7] к численному дифференцированию по эмпирическим данным является неустойчивость получаемых оценок производных, в том числе при наличии шумовой составляющей, что является характерной чертой многих речевых сигналов, регистрируемых для передачи и хранения в информационно-телекоммуникационных системах.

В настоящее время нем известных методов оценивания производных высших порядков, но разработан метод оценивания первой производной. В его основе используются частотные представления и принцип минимизации нормы оценки первой производной, который предложен в работах [1,2].

Целью данной работы является разработка метода вычислений оценок производных высших порядков, устойчивых к воздействию шумов.

Пусть задан вектор $\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_N)^T$ отсчётов речевого сигнала, где $u_i = u(i\Delta t), i = 1, \ldots, N$, Δt – интервал дискретизации.

Обозначим $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_N)^T$, где

$$v_i = u_i - u_{i-1}, i = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Введём частотные интервалы:

$$\Omega = (-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2), \tag{2}$$

$$\overline{\Omega} = [-\overline{\Omega}_2, -\overline{\Omega}_1) \cup [\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2),$$

$$\overline{\Omega}_1 = \Delta t * \Omega_1 = q_1 * \pi; \overline{\Omega}_2 = \Delta t * \Omega_2 = q_2 * \pi \tag{3}$$

В основе дальнейших построений используется представление интерполирующей функций через производную (формула Ньютона-Лейбница)

$$\hat{u}(t) = u_{i-1} + \int_{(i-1)\Delta t}^{t} f(\tau) d\tau, \tag{4}$$

для $\Delta t(i-1) \le t \le i\Delta t$.

Тогда для первых разностей исходных данных должно выполняться равенство

$$v_i = u_i - u_{i-1} = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} f(\tau) d\tau, \tag{5}$$

$f(\tau)$ – первая производная интерполирующей функции [2,3], которая является оценкой первой производной неизвестной функции $u(t)$, выборка из которой обрабатывается.

Общая формула для вычисления оценки производной имеет вид

$$f(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k*\frac{1}{\pi}\int_{\bar\Omega_1}^{\bar\Omega_2}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\cos(x(\frac{\tau}{\Delta t}-k+0.5))dx. \tag{6}$$

Коэффициенты здесь должны удовлетворять системе уравнений $A\vec{\beta}=\vec{v}$, где $A=\{a_{ik}\}$ – матрица учета исходных данных (УИД), элементы которой определяются из соотношения

$$a_{ik}=\frac{\Delta t}{\pi}\int_{\bar\Omega_1}^{\bar\Omega_2}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cos(x(i-k))dx;i,k=1,\ldots,N. \tag{7}$$

В общем случае матрица УИД может быть особенной, так что необходимо использовать псевдообращение

$$\vec{\beta}=A^{++}\vec{v}$$
$$A^{++}=G_1L_1^{-1}G_2^T \tag{8}$$

где G – матрица собственных векторов.

$$AG=GL;G=(\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_N),$$
$$L=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_N);$$
$$L_1=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_P),\ G=(\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_P) \tag{9}$$

если $\lambda_{P+1}\cong\lambda_{P+2}\cong\ldots\cong\lambda_N\cong 0$, где P– оценка ранга матрицы УИД.

Если заранее выбрать точки в виде

$$\tau_i=(i-0.5)\Delta t,i=1,\ldots,N \tag{10}$$

области определения, где необходимо вычислять оценку производной то из (6) получим

$$f_i=f(\tau_i)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k\frac{1}{\pi}\int_{\bar\Omega_1}^{\bar\Omega_2}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\cos(x(i-k))dx \tag{11}$$

Или для вектора $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_N)^T,f_i=f(\tau_i)$,

$$\vec{f}=B_1A^{++}\vec{v}, \tag{12}$$

где $B_1=\{b_{ik}^1\}$,

$$b_{ik}^1=\frac{1}{\pi}\int_{\bar\Omega_1}^{\bar\Omega_2}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\cos(x(i-k))dx \tag{13}$$

Старшие производные в тех же точках вычисляются на основе дифференцирования (6)

$$\frac{df(\tau)}{d\tau}=\hat{u}^{(2)}(\tau)=-\sum\beta_k\frac{1}{\pi\Delta t}\int_{\bar\Omega_1}^{\bar\Omega_2}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}x\sin(x(\frac{\tau}{\Delta t}-k+0.5))dx. \tag{14}$$

В тех же точках (10) области определения полагаем

$$B_2 = \{b_{ik}^1\} : b_{ik}^2 = -\frac{1}{\pi \Delta t} \int\limits_{\overline{\Omega}_1}^{\overline{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(i-k))dx \quad (15)$$

Вектор оценок вторых производных вычисляется на основе соотношения

$$\vec{f}^{(1)} = (f_1^{(1)}, \ldots, f_N^{(1)})^T = B_2 A^{++} \vec{v} = B_2 \vec{\beta} \quad (16)$$

Вектор оценок третьих производных получаем аналогично

$$\vec{f}^{(2)} = B_3 \vec{\beta}, \quad (17)$$

где

$$b_{ik}^3 = -\frac{1}{\pi (\Delta t)^2} \int\limits_{\overline{\Omega}_1}^{\overline{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x^2 \cos(x(i-k))dx \quad (18)$$

В свою очередь вектор оценок четвёртых производных принимает вид

$$\vec{f}^{(3)} = B_4 \vec{\beta}, \quad (19)$$

где

$$b_{ik}^4 = \frac{1}{\pi (\Delta t)^3} \int\limits_{\overline{\Omega}_1}^{\overline{\Omega}_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x^3 \sin(x(i-k))dx \quad (20)$$

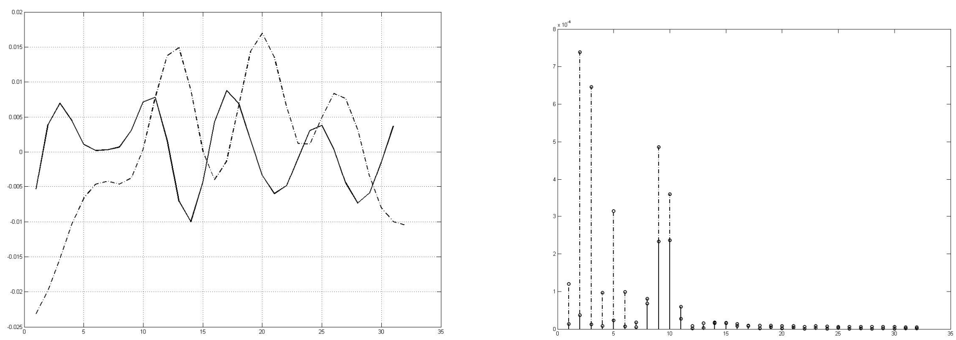
Предлагаемый инструмент для оценки производных может быть использован при вычислении значений производных дискретных сигналов любого происхождения.

Речевой сигнал представляет собой колебания сложной формы, зависящие от произносимых слов, тембра голоса, интонации, пола и возраста говорящего. Одной из особенностей речевого сигнала является неравномерность распределения энергии различных звуков по частотному интервалу.

На основе описанного метода были произведены вычислительные эксперименты с различными речевыми сигналами.

В качестве исходных данных были выбраны фрагменты речевого сигнала соответствующие различным звукам речи («а», «б», «ч», «ш» и др.). Некоторые из результатов приведены на рис. 1-4.

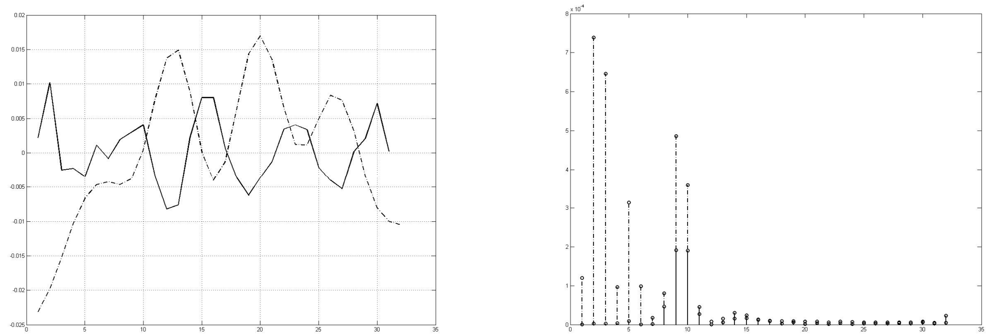
Можно заметить, что уровень производных речевого сигнала возрастает значительно быстрее, чем уровень сигнала, а это в свою очередь позволяет намного точнее определить момент перехода паузы в информационный сигнал, особенно при наличии шумовой составляющей.



a) b)

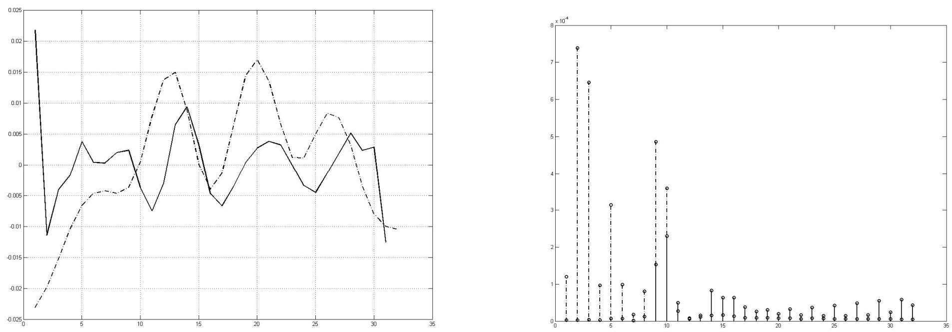
Рис. 1 а) фрагмент сигнала соответствующий звуку «а» (— · — исходный сигнал, —— первая производная сигнала);
b) спектр первой производной сигнала, соответствующий звуку «а»

спектр сигнала, спектр производной сигнала)



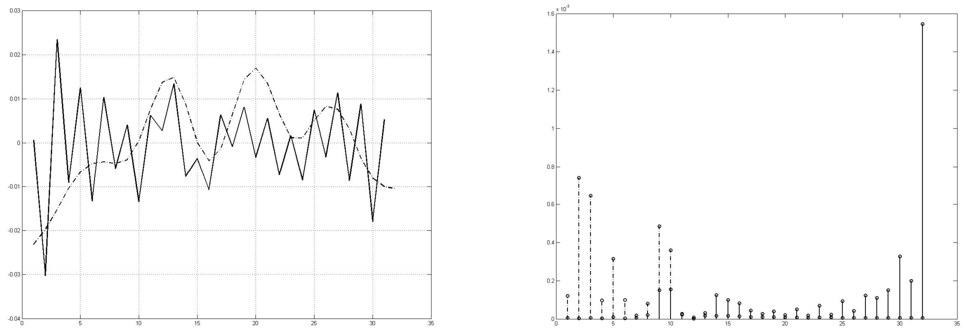
a) b)

Рис. 2 а) фрагмент сигнала соответствующий звуку «а» (исходный сигнал,
вторая производная сигнала);
b) спектр первой производной сигнала, соответствующий звуку «а»
(спектр сигнала, спектр второй производной сигнала)



a) b)

Рис. 3 а) фрагмент сигнала соответствующий звуку «а» (исходный сигнал,
третья производная сигнала);
b) спектр первой производной сигнала, соответствующий звуку «а»
(спектр сигнала, спектр третьей производной сигнала)



a) b)

Рис. 4 а) фрагмент сигнала соответствующий звуку «а» (исходный сигнал,
четвертая производная сигнала);
b) спектр первой производной сигнала, соответствующий звуку «а»
(спектр сигнала, спектр четвертой производной сигнала)

Литература

1. Жиляков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: моногр. / Е.Г. Жиляков. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.
2. Жиляков, Е.Г. Вариационный метод оценивания производных и интерполяции сигналов по

эмпирическим данным [Текст] / Е.Г. Жиляков, Т.Н. Созонова, И.Ю. Мисливец // Вестник Воронежского государственного университета, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2006. – Вып. 2. – С.70-73.
3. Титова Н.С. Применение вариационных алгоритмов интерполяции и оценки первой производной для некоторых аспектов обработки изображений [Текст] /Титова Н.С., Созонова Т.Н., Щербинина Н.В.// Научные ведомости БелГУ, №17 (57), 2008, Выпуск 8.
4. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа [Текст] : справ. рук. / К. Ланцош ; пер. с англ. М. З. Кайнера. – М. : Физматгиз, 1961. – 524 с.
5. Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике [Текст] / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с. : ил.
6. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст] / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2000.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

ABOUT CALCULATION OF ESTIMATIONS OF DERIVATIVES OF THE HIGHER ORDER UNDER THE EMPIRICAL DATA

N.S. TITOVA

Belgorod state university

e-mail: NTitova@bsu.edu.ru

In the given work the scheme of approximation of functions and their derivatives under the empirical data is offered. It is based on use of the known formula from the mathematical analysis, allowing to express differentiated function through a derivative.

Key words: Interpolation, estimation of a derivative, frequency representation, stability of calculations.