

УДК 621.396

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОРА

А.С. Мазманишвили

Сумской государственный университет,  
Сумы, Украина, e-mail: [mazmanishvili@gmail.com](mailto:mazmanishvili@gmail.com)

Рассмотрена задача построения алгоритма численной генерации нормальных двумерных марковских полей на цилиндрической поверхности и на поверхности тора. Эти поля обладают свойством однородности по отношению к сдвигам вдоль поверхностей, соответственно, цилиндра и тора. Описаны возможные перспективы применения нормальных марковских полей, реализованных на поверхности тора.

Ключевые слова: алгоритм, нормальное марковское поле, случайная реализация, тор, цилиндр.

### 1. Введение

Задачи численного стохастического моделирования начинаются с синтеза алгоритмов генерации случайных величин с необходимыми для данной задачи свойствами. При моделировании случайных полей, принимается допущение о евклидовой структуре пространства, в котором разыгрываются случайные события. Это допущение приводит к тому, что эти поля определяются на отрезке, в прямоугольнике, или, наконец, в многомерном гиперкубе [1, 2]. По этой причине, как правило, разрабатываемые алгоритмы опираются на прямоугольную декартову систему даже в тех случаях, когда исследуемый объект мало удобен при описании в этой системе. Именно такая ситуация имеет место при построении случайных полей на торе или цилиндре [2]. В то же время, алгоритмы генерации двумерных марковских полей, представленные в [3, 4], таковы, что они приспособлены только для генерации случайных полей, задаваемых на прямоугольнике, стороны которого параллельны декартовым осям на плоскости. Однако, в задачах машиностроения [5], технической электродинамики [6], навигации [7] и других в большинстве объектов не являются плоскими или прямоугольными, и их описание в прямоугольной декартовой системе координат неестественно и, вообще говоря, приводит к неудовлетворительным результатам.

Настоящая работа посвящена попытке построения алгоритма численной генерации нормального марковского случайного поля на поверхности тора. Поперечными сечениями такого поля, реализующимися вдоль большого радиуса  $R$  тора, являются марковские процессы Орнштейна-Уленбека, определённые на отрезке, равном длине соответствующей окружности, а затем продолженные периодически на всю числовую ось изменения угловой координаты (т.н. "броуновский мост"). Сечениями же случайного поля, которые реализуются на окружности заданного малого радиуса тора  $r$ , являются случайные процессы типа броуновского моста, построенные по такой же схеме но с периодом, равным соответствующей длине окружности. Тогда, внутри замкнутого прямоугольника, накрывающего тор, реализуется стационарное марковское гауссовское поле. В нашей работе построение алгоритма численной реализации указанного случайного поля основывается на иерархическом принципе. При этом на нижнем уровне иерархии используется стандартный генератор нормального "белого" шума  $u(t)$  с интенсивностью (среднем квадратичным отклонением)  $\sigma$ . На его основе строятся случайные реализации процессов вдоль образующих тора. Последовательное заполнение зацепленными броуновскими мостами и позволяет сгенерировать численно реализации марковского поля на поверхности тора.

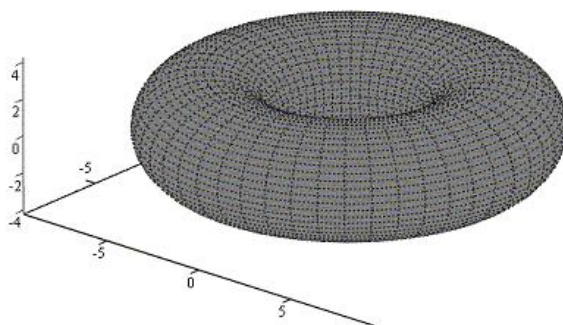


Рис. 1: Идеальный недеформированный тор с параметрами:  $R = 6$ ,  $r = 3$ ,  $N = 40$ ,  $M = 40$ .

## 2. Алгоритм генерации нормальных двумерных марковских полей на поверхностях цилиндра и тора

Обозначим  $\Delta_x$  – величину шага вдоль оси  $x$  на плоскости при численной реализации случайного поля, а  $\Delta_y$  – величину шага вдоль оси  $y$ . Соответственно,  $N$  – число узлов по  $x$ , а  $M$  – число узлов вдоль оси  $y$ . Обозначим  $H$  –



случайное поле, которое является проекцией рассматриваемого нами случайного поля на совокупность узлов  $\{h_{n,m}\}$ ,  $n = 0 \div N$ ,  $m = 0 \div M$ . Обозначим, далее,  $\nu_x, \nu_y$  – декременты затухания нормального марковского поля, соответственно, вдоль продольной и поперечной координатных осей. Корреляторы этого поля в каждом двух соседних узлах равны

$$p = \exp(-\nu_x \Delta_x), \quad q = \exp(-\nu_y \Delta_y). \quad (1)$$

Рассмотрим сначала сечение случайного поля при  $y = 0$ , когда  $m = 0$ . Совместная плотность распределения вероятностей случайных значений поля в узлах с номерами  $n = 0 \div N$  имеет, согласно [3, 5], вид

$$f_H(\{h_{n,0}\}) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(1-p^2)]^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1-p^2)} \sum_{n=1}^N (h_{n,0} - ph_{n-1,0})^2 \right\}. \quad (2)$$

При этом справедливо следующее правило нумерации, обеспечивающее периодичность случайного поля  $h_{N,0} = h_{0,0}$ ,  $h_{N+1} = h_1$  и т.д. Пусть  $u_{n,0}$  – генератор белого шума в рассматриваемых целочисленных точках, обладающий нулевым средним и  $\langle u_{n,0}^2 \rangle = \sigma^2$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Тогда из вида квадратичной формы в показателе экспоненты в плотности (2) следует система связей

$$h_{n,0} = ph_{n-1,0} + \alpha u_{n,0}, \quad n = 1, \dots, N \quad (3)$$

с постоянной

$$\alpha = \sqrt{(1-p^2)(1-p^{2N})^{-1}}, \quad (4)$$

которая необходима для нормировки вторых моментов поля. Набор значений поля в нулевом по  $x$  сечении ( $m = 0$ ) может быть выражен явно через величины  $u_{n,0}$  следующим образом

$$\begin{aligned} h_{1,0} &= \alpha (u_{1,0} + pu_{2,0} + p^2u_{3,0} + \dots + p^{N-1}u_{N,0}), \\ h_{2,0} &= \alpha (p^{N-1}u_{1,0} + u_{2,0} + pu_{3,0} + \dots + p^{N-2}u_{N,0}), \\ h_{3,0} &= \alpha (p^{N-2}u_{1,0} + p^{N-1}u_{2,0} + u_{3,0} + \dots + p^{N-3}u_{N,0}), \\ &\dots \\ h_{N,0} &= \alpha (pu_{1,0} + p^2u_{2,0} + p^3u_{3,0} + \dots + u_{N,0}). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, на основе (5), построен броуновский мост при  $n = 0$ . При

выбранном значении  $\alpha$  из (2) и (5) следуют выражения для безусловных средних

$$\langle h_{n,0}h_{n+k,0} \rangle = p^k \sigma^2, \quad k = 0, \dots, N. \quad (6)$$

Из формулы (6) вытекает свойство стационарности броуновского моста в нулевом сечении.

Рассмотрим сечение поля при  $y = \Delta_y$ , т.е. при  $m = 1$ . При фиксированном значении в нулевом сечении вдоль оси  $y$ , совместная плотность распределения вероятностей случайных значений поля имеет вид [3, 5]

$$f_H(\{h_{n,1}\}) = [2\pi\sigma^2(1-p^2)(1-q^2)]^{-N/2} \exp\left\{-\frac{Q_1}{2\sigma^2(1-p^2)(1-q^2)}\right\}. \quad (7)$$

где  $Q_1$  – квадратичная форма относительно  $\{h_{n,1}\}$

$$Q_1 = (h_{1,1} - ph_{0,1} - qh_{1,0} + pqh_{0,0})^2 + (h_{2,1} - ph_{1,1} - qh_{2,0} + pqh_{1,0})^2 + \dots \\ \dots + (h_{N,1} - ph_{N-1,1} - qh_{N,0} + pqh_{N-1,0})^2. \quad (7a)$$

При этом также действует циклическое правило нумерации  $h_{N,1} = h_{0,1}$  и т.д. Из вида квадратичной формы (7a) вытекает, что значение поля  $h_{n,1}$  связано с тремя "предыдущими" значениями. Тогда на основе плотности (7) можно прийти к следующей системе связей для броуновского моста в первом сечении

$$h_{n,1} = ph_{n-1,1} + qh_{n,0} - pqh_{n-1,0} + \alpha h_{n,1}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Из (8) видно, что система величин  $s_{n,1} = h_{n,1} - ph_{n,0}$ , где  $n = 1, \dots, N$ , подчиняется тем же соотношениям, что и величины (3). Следовательно, два шага вычислений

$$s_{1,1} = \alpha (u_{1,1} + pu_{2,1} + p^2u_{3,1} + \dots + p^{N-1}u_{N,1}), \\ s_{2,1} = \alpha (p^{N-1}u_{1,2} + pu_{2,2} + p^2u_{3,2} + \dots + p^{N-2}u_{N,2}), \\ s_{3,1} = \alpha (p^{N-2}u_{1,3} + p^{N-1}u_{2,3} + pu_{3,3} + \dots + p^{N-3}u_{N,3}), \\ \dots \\ s_{N,1} = \alpha (pu_{1,N} + p^2u_{2,N} + p^3u_{3,N} + \dots + u_{N,N}). \quad (9)$$

и

$$h_{n,1} = ph_{n,0} + s_{n,1}, \quad n = 1, \dots, N \quad (10)$$

дадут искомый набор значений броуновского моста в первом сечении.

Рассмотрим сечение за номером  $m$ . Для него плотность распределения значений поля в узлах  $(n, m)$  следующая:

$$f_H(\{h_{n,m}\}) = [2\pi\sigma^2(1-p^2)(1-q^2)]^{-N/2} \exp\left\{-\frac{Q_m}{2\sigma^2(1-p^2)(1-q^2)}\right\}, \quad (11)$$

где  $Q_m$  – квадратичная форма относительно  $\{h_{n,m}\}$ ,

$$Q_m = (h_{1,m} - ph_{0,m} - qh_{1,m-1} + pqh_{0,m-1})^2 + \\ + (h_{2,m} - ph_{1,m} - qh_{2,m-1} + pqh_{1,m-1})^2 + \dots \\ \dots + (h_{N,m} - ph_{N-1,m} - qh_{N,m-1} + pqh_{N-1,m-1})^2. \quad (11a)$$

Теперь, если в (9) и (10) везде заменить в  $y$ -ом индексе 0 на  $m-1$  и 1 на  $m$ , то получим алгоритм нахождения набора значений броуновского моста в  $m$ -ом сечении. А именно, для произвольного  $m$ -го сечения заполнение его узлов осуществляется следующими двумя шагами:

$$s_{1,m+1} = \alpha (u_{1,m} + pu_{2,m} + p^2u_{3,m} + \dots + p^{N-1}u_{N,m}), \\ s_{2,m+1} = \alpha (p^{N-1}u_{1,m} + pu_{2,m} + p^2u_{3,m} + \dots + p^{N-2}u_{N,m}), \\ s_{3,m+1} = \alpha (p^{N-2}u_{1,m} + p^{N-1}u_{2,m} + pu_{3,m} + \dots + p^{N-3}u_{N,m}), \quad (12)$$

...

$$s_{N,m+1} = \alpha (pu_{1,m} + p^2u_{2,m} + p^3u_{3,m} + \dots + u_{N,m}).$$

и

$$h_{n,m} = ph_{n,m-1} + s_{n,m}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Используя векторно-матричные обозначения, выражения (9) и (11) можно записать в компактной форме, введя циркулярные матрицы [9].

Объединяя формулу (5) и  $M$  раз повторенные формулы (11) и (12), получим итоговый алгоритм генерации значений поля на прямоугольнике, накрывающем поверхность цилиндра и образованном из  $N \times (M+1)$  узлов с учетом их периодичности вдоль оси  $x$ . При выбранном значении  $\alpha$ , из этих формул, плотностей (2), (7) и правила нумерации, учитывающего периодичность, получаем для математических ожиданий

$$\langle h_{n,m}h_{n+k,m+j} \rangle = p^k q^j \sigma^2, \quad k, j = 1, \dots, N, \quad \langle h_{n,m}^2 \rangle = \sigma^2. \quad (14)$$



Таким образом, во всех сечениях, сгенерированное на цилиндрической поверхности поле характеризуется свойствами однородности. Свойство марковости непосредственно вытекает из вида плотности условных вероятностей перехода (7). Построенное на цилиндре поле обладает свойствами нормальности и марковости в том смысле, что плотности условных вероятностей перехода имеют гауссовскую форму вдоль выбранных направлений.

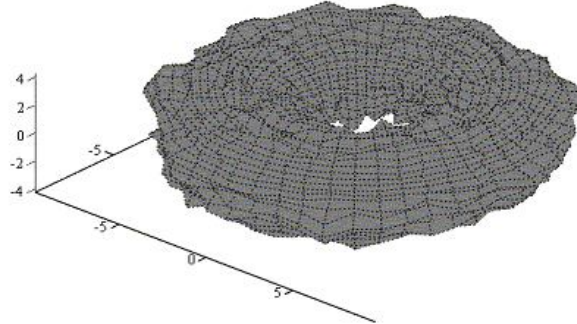


Рис. 2: Вид сбоку сгенерированного случайного поля на торе с параметрами:  $p = 0.5$ ,  $q = 0.5$ ,  $\sigma = 0.2$  в виде случайной деформации тора, пропорциональной значению поля в каждой из точек. Сеткой показана связь случайных процессов в соседних узлах.

Теперь, с целью построения случайного поля на поверхности тора, осуществим замыкание построенного нами поля на поверхности цилиндра вдоль оси  $y$ . Заметим, что если в выражениях, описывающих замыкание вдоль оси  $x$ , везде выполнить замены по правилу  $\{N \Rightarrow M, p \Rightarrow q\}$ , то будет получено замыкание вдоль оси  $y$ . А именно, для произвольного  $n$ -го сечения заполнение его узлов осуществляется следующими двумя шагами:

$$\begin{aligned} t_{n+1,1} &= \beta (u_{n,1} + qu_{n,2} + q^2u_{n,3} + \dots + q^{M-1}u_{n,M}) , \\ t_{n+2,2} &= \beta (q^{N-1}u_{n,1} + qu_{n,2} + q^2u_{n,3} + \dots + q^{M-2}u_{n,M}) , \\ t_{n+1,3} &= \beta (q^{M-2}u_{n,1} + q^{M-1}u_{n,2} + qu_{n,3} + \dots + q^{M-3}u_{n,M}) , \end{aligned} \quad (15)$$

...

$$t_{n+1,M} = \beta (qu_{n,1} + q^2u_{n,2} + q^3u_{n,3} + \dots + u_{n,M})$$

и

$$h_{n,m} = qh_{n-1,m} + t_{n,m} , \quad m = 1, \dots, M . \quad (16)$$

При этом введена новая нормировочная постоянная, необходимая для сохранения вторых моментов амплитуды вещественного поля,

$$\beta = \sqrt{(1 - q^2)(1 - q^{2M})^{-1}}. \tag{17}$$

В результате указанного замыкания будет построено случайное поле на поверхности цилиндра, ориентированного вдоль оси  $x$ .

Совместное действие двух замыканий приведет к построению стохастического поля на поверхности тора. При этом для сохранения вторых моментов значений поля должна быть использована новая нормировочная постоянная

$$\gamma = \alpha\beta = \sqrt{(1 - p^2)(1 - p^{2N})^{-1}(1 - q^2)(1 - q^{2M})^{-1}}. \tag{18}$$

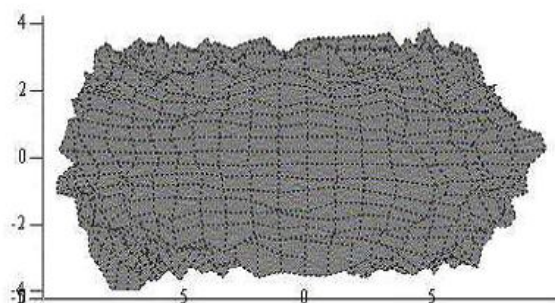


Рис. 3: Сгенерированная случайная реализация поля на торе (вид сбоку).

### 3. Применение алгоритмов генерации нормальных двумерных марковских полей на поверхностях цилиндра и тора

Рассмотрим геометрическую интерпретацию нормального двумерного марковского поля на цилиндрической и торической поверхностях. Тор характеризуется двумя радиусами – азимутальным  $R$  и радиусом  $r$  кругового сечения плоскостью, проходящей через центр тора перпендикулярно к азимутальной плоскости. Соответственно при заданных  $R$  и  $r$  уравнения, определяющие тор, можно параметризовать с помощью двух азимутальных углов:  $\varphi$  – угол в плоскости  $XOY$ , проходящей перпендикулярно оси  $OZ$ , и  $\psi$  – фазовый угол кругового сечения. Задав сетку из  $N \times M$  узлов, множество узлов на торе

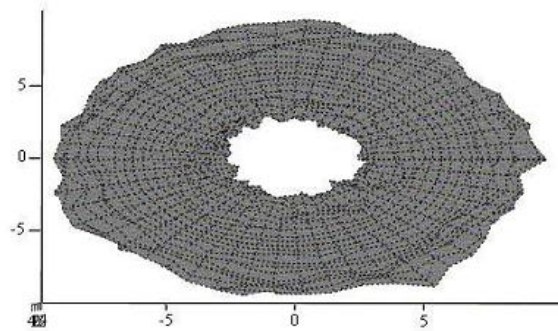


Рис. 4: Сгенерированная случайная реализация поля на торе (вид сверху).

можно определить формулами

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= (R + r \sin \psi_n) \cos \varphi_m, \\ Y_{n,m} &= (R + r \sin \psi_n) \sin \varphi_m, \\ Z_{n,m} &= r \cos \psi_m. \end{aligned} \quad (19)$$

Наложение случайного поля  $H$  со случайными значениями  $\{h_{n,m}\}$  в узлах выбранной сетки осуществляется на основе выражений

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= [R + (r + h_{n,m}) \sin \psi_n] \cos \varphi_m, \\ Y_{n,m} &= [R + (r + h_{n,m}) \sin \psi_n] \sin \varphi_m, \\ Z_{n,m} &= (r + h_{n,m}) \cos \psi_m. \end{aligned} \quad (20)$$

Случайное поле  $H$ , синтезированное в узлах сетки, стационарно, поскольку для него, с учетом нормировки (15), справедливо соотношение (13), гарантирующее инвариантность средних относительно сдвигов вдоль координатных осей. При программировании оказываются более удобными аналоги формул (2), (9), (10), (12), выполненные в терминах векторов и циркулярных матриц [9]. Из рисунков 2-4 можно заметить самосогласованное поведение значений поля, изменение сечений – случайных процессов, а также их связь в соседних узлах.



## 5. Выводы

Таким образом, иерархический подход синтеза реализаций случайного поля на двумерной поверхности дает возможность численно генерировать марковские поля на поверхности тора. По существу развита метод отличается от метода генерации полей на плоскости [9] только действием двойного правила периодичности, а в роли стационарного распределения вероятностей выступают броуновские мосты. Область применения подобных случайных полей достаточно широка. Они возникают всякий раз, когда необходим учет случайного изменения некоторой "идеальной" поверхности. Недостатком реализованного подхода является неаналитическое введение азимутальных периодичностей броуновских мостов. Возможность применения подобного подхода для пространственных тел более сложной структуры, например, таких как сфера, остается открытой.

## Литература

1. Бусленко Н.П. Метод статистических испытаний / Н.П.Бусленко, Ю.А.Шрейдер. – М.: Физматгиз,1961. – 280с.
2. Харин Ю.С. Практикум на ЭВМ по математической статистике / Ю.С.Харин, М.Д.Степанова. – Минск: "Университетское", 1987. – 304с.
3. Nabibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image // Proc. IEEE. – 1972. – 60;7. – P.878-883.
4. Хусу А.П. Шероховатость поверхностей / А.П.Хусу, Ю.Р.Витенберг, В.А.Пальмов. – М.: Наука,1975. – 344с.
5. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн / Я.С.Шифрин. – М.: Советское радио,1970. – 384с.
6. Ярлыков М.С. Статистическая теория навигации / М.С.Ярлыков. – М.: Радио и связь,1985. – 344с.
7. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику / С.М.Рытов. – М.: Наука,1966. – 404с.
8. Мазманишвили А.С., Щербань В.Е. Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля // Электронное моделирование. – 1996. – 18;2. – С.93-95.

9. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В.Воеводин, Ю.А.Кузнецов. – М.: Наука. – 1984. - 320с.
10. Мазманишвили А.С. Алгоритм генерации нормального марковского поля на поверхности идеального цилиндра // Электронное моделирование. – 1998. – 20;6. – С.65-69.

**THE GENERATION ALGORITHM FOR RANDOM  
REALIZATIONS OF THE NORMAL MARKOVIAN FIELD  
ON TORUS SURFACE**

**A.S.Mazmanishvili**

Sumy State University, Sumy, Ukraine, e-mail: [mazmanishvili@gmail.com](mailto:mazmanishvili@gmail.com)

The paper deals with the generation problem of normal two-dimensional Markovian fields on cylindrical and torus surfaces. The generation algorithm for such fields is developed. Generated fields are homogeneous. The numerical example of generated field is given.

Key words: algorithm, normal markov field, random realization, torus, cylinder.