УДК 51.73

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА. ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А.
Белгородский государственный университет,
Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Рассматривается одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической среде с ковалентной химической связью. На основе представления об обмене теплом посредством электромагнитного поля, которое порождается тепловыми флуктуациями электрической поляризации среды, вычисляется поток энергии флуктуационного поля в виде функционала от её локальной температуры, что позволяет сформулировать замкнутое эволюционное уравнение переноса тепла в среде.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный теплообмен, электрическая поляризация, флуктуации, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, закон Стефана-Больцмана, поток энергии, распределение температуры.

1. Введение. Перенос тепла в твердотельной среде осуществляется двумя механизмами – посредством теплопроводности и электромагнитным излучением, порождаемым возбуждениями состояния среды. В соответствии с этим эволюционное уравнение для распределения температуры $T(\mathbf{r},t)$ в момент времени t записывается в виде [1]

$$\rho\lambda\dot{T}(\mathbf{r},t) = \kappa\Delta T(\mathbf{r},t) - (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r},t)), \tag{1}$$

где $\kappa > 0$ – коэффициент теплопроводности среды, ρ – плотность среды и λ – её теплоёмкость. Далее, для простоты мы будем считать эти величины постоянными, не зависящими от температуры. Первое слагаемое в правой части (1) связано с теплопроводностью, а векторное поле $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ представляет собой поток энергии электромагнитного излучения, переносящего тепло. Дивергенция $-(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r},t))$ умноженная на малый объём ΔV пространственной области среды, сосредоточенной около точки $\mathbf{r}$, равна части этого потока, которая тратится на нагрев области в момент времени t. Центральным для постановки задач радиационно-кондуктивного теплообмена является вычисление поля $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ в виде функционала $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{S}[T(\mathbf{r},t)]$ от распределения температуры, при наличии которого уравнение (1) для $T(\mathbf{r},t)$ становится самосогласованным. Обычно, поток энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ находится на основе феноменологических соображений об интенсивности переноса энергии излучения [1], [2]. В такого рода рассуждениях не используется само электромагнитное поле, осуществляющее перенос тепла. Это положение является неудовлетворительным с теоретической точки зрения. Оно связано с отсутствием последовательной микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, которая должна быть основана на квантовой теории излучения и поглощения атомами среды электромагнитного излучения (фотонов) и, следовательно, носить статистический характер.

Для выявления сложностей, с которыми сталкивается построение микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, рассмотрим это явление с качественной точки зрения. Наше рассмотрение мы ограничим тем случаем, когда среда является диэлектрической и её электромагнитные свойства характеризуются динамической диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, зависящей от частоты излучения ω и постоянной магнитной проницаемостью μ. Будем считать, что среда имеет решёточную кристаллическую структуру, хотя приводимые ниже рассуждения вполне применимы и для аморфной упругой среды. Для определённости мы будем считать, что она состоит из электрически нейтральных атомов. В то же время качественная физическая картина переноса тепла излучением не претерпевает существенных изменений, если в узлах решётки находятся молекулы с ковалентной связью либо ионы, связанные между собой электровалентным образом.

При достаточно большой температуре, то есть при достаточно большой амплитуде неупорядоченных колебаний решётки, последние приводят к деформации электронных оболочек каждого из атомов. Это означает, что атомы могут переходить в энергетически возбуждённые состояния. Релаксация каждого из возбуждённых состояний в исходное приводит к излучению фотона с частотой, пропорциональной разности соответствующих энергетических уровней. При этом атом получает импульс отдачи, который изменяет его динамическое состояние. Излученный фотон распространяется в среде вплоть до поглощения его другим атомом среды, который, таким образом, становится возбуждённым. При этом фотон передаёт атому свой импульс, который может приводить к его раскачке или торможению так же, как и при излучении фотона. Через некоторое время возбуждённый атом переизлучает поглощённый фотон, хотя, возможно, с меньшей частотой. После чего процесс распространения излучения продолжается. В связи с наличием событий отдачи при излучении и поглощении фотонов можно говорить, что существует механизм перекачки энергии как из фотонной подсистемы в фононную, так и обратно.

При наличии градиента температуры в среде переизлучение фотонов атомами в различных областях пространства среды должно носить нескомпенсированный характер. Атомы в областях с меньшей температурой поглощают больше энергии фотонов и, соответственно, меньше её излучают по сравнению с областями, где температура выше. Это положение является, как будет разъяснено ниже, следствием сильной связанности атомов решётки друг с другом. Энергия, равная разности между энергиями поглощённых и излучённых фотонов, переходит в кинетическую энергию неупорядоченных колебаний атомов решётки около их положения равновесия. Среднее же значение этой энергии представляет собой температуру той части среды, которая сосредоточена в рассматриваемом элементе объёма.

Таким образом, перекачка энергии электромагнитного поля в кинетическую энергию колебаний решётки связана с наличием в гамильтониане системы атомов решётки эффективного электроупругого взаимодействия. Причём, оно обязано присутствовать даже в том случае, когда атомы электронейтральны. При наличии такого взаимодействия последовательное вычисление величины $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ сводится к составлению и исследованию кинетического уравнения для фотон-фононной системы. Такой подход к описанию радиационно-кондуктивного теплообмена уже на первоначальном шаге, то есть при составлении эффективного гамильтониана взаимодействия, обладающего указанными выше свойствами, оказывается сложным для реализации. Это связано с тем, что система атомов должна быть сильно связанной. В противном случае, как это имеет место в газовой среде, поглощение фотона любым из атомов с последующим его излучением можно рассматривать как упругое взаимодействие с этим атомом. Такое взаимодействие не приводит к преимущественной перекачке энергии фотонов в тепловую энергию решётки. Неупругость же взаимодействия происходит вследствие того, что все атомы сильно связаны в единую систему. Так как между поглощением и излучением каждого фотона проходит некоторое время задержки, то за счёт наличия сильной связи часть поглощённой атомом энергии фотона успевает перераспределиться между другими атомами из ближайшего его окружения. Поэтому атом после переизлучения фотона не возвращается в исходное энергетическое состояние. Указанный механизм перекачки энергии излучения в тепловые колебания решётки, благодаря которому в твёрдых телах возможен радиационно-кондуктивный теплообмен, довольно сложно описать на языке эффективного гамильтониана. Заметим также, что явный вид такого гамильтониана должен зависеть от природы среды, так как в случае отсутствия электронейтральности атомов решётки либо наличия у них собственного магнитного момента процессы их взаимодействия с электромагнитным излучением усложняются.

В связи со сложностями построения микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена естественно попробовать развить более простой полуфеноменологический подход к теоретическому описанию этого процесса. В рамках такого подхода желательно преодолеть главный недостаток существующей теории – ввести в описание радиационно-кондуктивного теплообмена электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, но при этом не конкретизировать микроскопический механизм превращения его энергии в тепловую энергию неупорядоченных колебаний решётки. В рамках такой теории желательно отказаться от квантового описания излучения вследствие возникновения излишних усложнений, так как само явление радиационно-кондуктивного теплообмена не является квантовым эффектом. В настоящей статье даётся пример такого построения. Предлагаемая нами математическая модель формулируется в приближении сплошной среды и основана на представлении о флуктуациях $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ дипольного электрического момента совокупности атомов среды в элементе объёма, сосредоточенного около пространственной точки $\mathbf{r}$ в момент времени t при поглощении и испускании ими фотонов. При этом квантовая природа излучения электромагнитного поля атомами среды в модели проявляется только лишь в том, что эти флуктуации носят случайный характер, то есть $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ представляет собой с математической точки зрения случайный процесс. При конкретном вычислении потока энергии мы для простоты ограничимся рассмотрением одномерной задачи, что позволит нам провести все вычисления явно.

2. Конструкция модели. Мы исходим из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в *сплошной* среде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0\,, \tag{3}$$

$$(\nabla, \mathbf{D}) = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0\,, \tag{4}$$

в которых, по основному замыслу нашей теории радиационно-кондуктивного теплообмена, должны быть учтены случайные флуктуации электродинамических свойств среды, связанные с процессами излучения и поглощения переносящего тепло электромагнитного поля. Поле магнитной индукции $\mathbf{B}$ в уравнениях (1),(3) имеет вид $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ – напряжённость магнитного поля, распространяющегося в разогретой среде, наведенного излучением составляющих её атомов. Так как среда представляет собой диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, и атомы электронейтральны (то же самое имеет место, если в узлах решётки находятся электронейтральные молекулы с ковалентной химической связью), то в уравнения (2-4) не включены флуктуации макроскопических электрических токов и зарядов. При построении связи между полем электрической индукции $\mathbf{D}$ в среде и напряжённостью электрического поля $\mathbf{E}$ мы учтём наличие флуктуаций свойств среды. Мы считаем, что в результате процессов излучения и поглощения флуктуационным образом в каждой пространственно-временной точке $(\mathbf{r}, t)$ изменяется электрическая поляризация среды. Мы запишем её в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Первое слагаемое представляет собой поляризацию, индуцированную электрической напряжённостью $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, распространяющегося в среде излучения. Если представить напряжённость $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и поляризацию $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложений в интегралы Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \,, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \,, \tag{6}$$

то функции $\bar{\mathbf{P}}$ и $\bar{\mathbf{E}}$ связаны соотношением $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \chi(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, где $\chi(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/4\pi$ – динамическая электрическая восприимчивость среды. Второе слагаемое $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ связано с существованием "спонтанных", не зависящих от $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ случайных флуктуаций поляризации среды, возникающих вследствие процессов поглощения и излучения фотонов каждым из атомов. Это слагаемое представляет собой случайное поле, неоднородное по пространству и статистически независимое в каждой пространственной точке $\mathbf{r}$. Его неоднородность связана с зависимостью средней амплитуды флуктуаций от температуры и с наличием пространственного распределения температуры в среде. Оно описывает независимые акты поглощения и излучения фотонов каждым из атомов. Поле $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ будем считать гауссовским ввиду малости флуктуаций. Кроме того, не ограничивая общности, среднее значение флуктуаций будем считать равным нулю. Поэтому $\langle \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, где угловые скобки здесь и далее обозначают математическое ожидание по случайным реализациям соответствующей случайной функции. Тогда статистические свойства этого поля полностью определяются парным коррелятором $\langle \tilde{P}_j(\mathbf{r},t)\tilde{P}_{j'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $j,j' = 1,2,3$ для каждой пары пространственно-временных точек $(\mathbf{r},t)$ и $(\mathbf{r}',t')$. Ввиду пространственной независимости и изотропии флуктуаций этот коррелятор пропорционален $\delta_{jj'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, $j,j' = 1,2,3$. Будем считать, что зависимость поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ от пространственной координаты полностью определяется мгновенным распределением температуры $T(\mathbf{r},t)$ в среде. Зависимость же этого поля от времени будем считать "почти" стационарной, где понятие стационарности понимается в смысле математической теории случайных процессов. Медленные отклонения от "точной" стационарности определяются зависимостью температуры $T(\mathbf{r},t)$ от пространственной точки $\mathbf{r}$ и от времени t, так как распределение $T(\mathbf{r},t)$ температуры удовлетворяет уравнению (1). Для задания поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ в каждой отдельной пространственной точке $\mathbf{r}$ с учётом указанных свойств представим его, по аналогии с (5),(6), в виде разложения в интеграл Фурье

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)d\omega\,. \tag{7}$$

Если считать случайную функцию $\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$ гауссовской с нулевым средним $\langle\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)\rangle = 0$, то линейность преобразования (7) гарантирует (см., например, [4]) гауссовость случайного поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$, а статистическая независимость функции $\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$ при изменении пространственной точки $\mathbf{r}$ влечёт аналогичное свойство у поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$. Кроме того, равенство $\langle\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)\rangle = 0$ влечёт равенство $\langle\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)\rangle = 0$. Таким образом, случайное поле $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ ввиду линейности преобразования (7) полностью определяется корреляционными свойствами случайной функции $\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$. Определим эту функцию следующим образом. Будем считать, что случайные реализации функции $\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$ медленно зависят от времени в связи с изменением температуры $T(\mathbf{r},t)$ в пространственно-временной точке $(\mathbf{r},t)$, и положим

$$\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega) = U(T(\mathbf{r},t),\omega)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega)\,, \tag{8}$$

где *амплитуда* $U(T,\omega)$ является неслучайной функцией температуры T и частоты ω. Сейчас мы не будем конкретизировать эту функцию. Существенно только то, что она при каждом фиксированном значении T обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |U(T,\omega)|^2 d\omega < \infty\,, \tag{9}$$

что означает конечность спектральной плотности излучаемой энергии. Положим случайную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega)$ гауссовской с нулевым средним

$$\langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega) \rangle = 0$$

и статистически независимой по $\mathbf{r}$ и по ω, со статистически независимыми компонентами $\varphi_j(\mathbf{r},\omega)$, $j = 1,2,3$, что ввиду линейности преобразования (8) влечёт гауссовость случайной функции $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$ и равенство нулю её среднего значения. Свойство же независимости значений случайной функции $\varphi_j(\mathbf{r},\omega)$ в различных точках $(\mathbf{r},\ \omega)$ для компонент с различными номерами $j = 1,2,3$ выражается формулой для парного коррелятора

$$\langle \varphi_j(\mathbf{r},\omega)\varphi^*_{j'}(\mathbf{r}',\omega') \rangle = \frac{1}{2\pi}\delta_{jj'}\delta(\omega-\omega')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,, \tag{10}$$

который показывает, что случайный процесс

$$\phi_j(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi_j(\mathbf{r},\omega)d\omega\,, \quad j = 1,2,3 \tag{11}$$

в каждой пространственной точке $\mathbf{r}$ представляет собой белый шум с единичной интенсивностью по временно́й переменной t, и все элементы этого набора шумов, занумерованные переменными $\mathbf{r}$ и j, являются статистически независимыми, то есть имеют место соотношения

$$\langle \phi_j(\mathbf{r},t) \rangle = 0\,, \quad \langle \phi_j(\mathbf{r},t)\phi_{j'}(\mathbf{r}',t') \rangle = \delta_{jj'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\,, \quad j,j' = 1,2,3\,.$$

Заметим, что ввиду выбора случайного процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ в форме (7), (8) вместе со свойством (9), его зависимость от времени носит двоякий характер. Она складывается из медленной зависимости, связанной с изменением распределения температуры в среде, и быстрой зависимости, связанной с процессами поглощения и излучения электромагнитного поля элементом объёма среды в каждой пространственной точке $\mathbf{r}$. Зависимость от ω функции $U(T,\omega)$, в частности свойство (9), приводит к тому, что временно́й коррелятор случайного процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ не пропорционален $\delta(t-t')$. Это отражает тот факт, что в нашей модели существенен учёт корреляций на коротких временах, а на длинных – электромагнитные волны практически не принимают участия в переносе тепла. Посредством разложения в интеграл Фурье

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

введём спектральную плотность $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)$ электрической индукции. Используя известную (см., например, [5]) связь между этой спектральной плотностью и спектральными плотностями напряжённости $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ и электрической поляризацией, равной в нашем случае $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) + \bar{\bar{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$, запишем

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) + 4\pi(\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) + \bar{\bar{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)) = \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) + 4\pi U(T,\omega)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega)\,. \tag{12}$$

Вид спектральной плотности $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)$ электрической индукции, даваемый формулой (12) совместно с уравнениями (2 - 4), составляет основу нашей теории.

Так как в определение стохастического возмущения $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ явным образом введено два масштаба времени, то мы будем решать уравнения (2 - 4), считая, что зависимость от времени t функций $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ также двухмасштабна в указанном смысле. Она состоит из быстрой зависимости, связанной с изменением фазы электромагнитного поля, переносящего излучение, и медленной зависимости его амплитуды от $\mathbf{r}$ и t, связанной с её функциональной зависимостью от значения распределения температуры в данной пространственно-временной точке $(\mathbf{r},t)$. Нашей целью является вычисление плотности потока энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}]\,, \tag{13}$$

усреднённой по случайным реализациям процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ и по быстрой временнóй зависимости.

Ввиду двухмасштабности временной зависимости процесса $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$, решение системы уравнений (2 - 4), (11) – поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, как и флуктуации поляризации $\tilde{\mathbf{P}}$, будем искать в виде следующих разложений в "интегралы Фурье"

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)d\omega\,, \tag{14}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)d\omega\,, \tag{15}$$

где спектральные плотности $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ и $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$ полей являются функционалами распределения температуры $T(\mathbf{r},t)$ и, следовательно, медленно изменяющимися функциями от t через посредство зависимости от времени этого распределения.

Подставляя разложения (7), (14), (15) в исследуемую систему уравнений, получаем для медленно зависящих от времени амплитуд $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$, $\bar{\bar{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$ систему уравнений:

$$\frac{i\mu\omega}{c}\bar{\mathbf{H}} + [\nabla, \bar{\mathbf{E}}] = 0\,, \tag{16}$$

$$\frac{i\omega}{c}(\varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}} + 4\pi U(T,\omega)\boldsymbol{\varphi}) - [\nabla, \bar{\mathbf{H}}] = 0\,, \tag{17}$$

$$(\nabla, \varepsilon(\omega)\bar{\mathbf{E}} + 4\pi U(T,\omega)\boldsymbol{\varphi}) = 0\,, \quad (\nabla, \bar{\mathbf{H}}) = 0\,. \tag{18}$$

Заметим, что первое из уравнений (17) указывает на возможность появления продольной составляющей напряжённости электрического поля, малой в меру малости флуктуаций поляризации. Второе же уравнение (18) выполняется тождественно вследствие (16).

Исключая из уравнений (16),(17) магнитную составляющую

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega) = \frac{ic}{\mu\omega}[\nabla, \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)]\,, \tag{19}$$

получим уравнение для электрической составляющей в виде

$$\bar{k}^2(\omega)\bar{\mathbf{E}} + \Delta\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U\boldsymbol{\varphi} - \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)}U(T,\omega)\nabla(\nabla,\boldsymbol{\varphi})\,, \tag{20}$$

где введены обозначения

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon(\omega)\,, \quad C = \frac{4\pi\mu}{c^2}\,. \tag{21}$$

В дальнейшем нас будет интересовать только асимптотика решения $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ при $\omega \to \infty$. По этой причине при решении уравнения (20) ввиду наличия у первого слагаемого в правой части множителя ω^2 вторым слагаемым в правой части можно пренебречь.

Заметим теперь, что динамическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ должна быть комплексной, чтобы имело место затухание электрической составляющей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ электромагнитной волны при изменении t в отсутствие возмущения в правой части (20). Так как $\varepsilon(\omega) \to \varepsilon$ при $\omega \to \infty$ с $\varepsilon > 0$, то, ограничившись первыми двумя членами разложения

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\frac{\nu}{\omega} + o(\omega^{-1})$$

с положительным коэффициентом затухания $\nu > 0$, преобразуем уравнение (20) к виду

$$\Delta\bar{\mathbf{E}} + (k_*^2 - ik_*\gamma)\bar{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U\boldsymbol{\varphi}\,, \tag{22}$$

где

$$k_* = \frac{\omega}{c}(\varepsilon\mu)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Введём в рассмотрение спектральную плотность $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega)$ потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ так, что

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega)d\omega\,. \tag{24}$$

Тогда

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]dt =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega' - \omega)]d\omega'\,.$$

В этой формуле величины $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ и, следовательно, плотность потока энергии являются случайными, так как они представляют собой решения стохастического дифференциального уравнения. Физически наблюдаемой величиной, которая должна определять радиационно-кондуктивный теплообмен, является математическое ожидание

$$\langle\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \omega)\rangle = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle[\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega' - \omega)]\rangle d\omega'\,. \tag{25}$$

3. Одномерная задача. Будем далее интересоваться одномерной задачей, когда поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются только функциями одной координаты x и времени t. В этом случае поле $\mathbf{E}(x, t)$ можно сделать поперечным, выбрав зависящую от x и t случайную функцию $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$ так, чтобы у неё отсутствовала первая компонента. Тогда тождественно $(\nabla,\boldsymbol{\varphi})=0$. При этом из условия $(\nabla,\bar{\mathbf{E}})=0$ следует, что $d\bar{E}_1/dx=0$, и можно, не ограничивая общности, положить $\bar{E}_1=0$. Уравнение (22) в одномерном случае превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{E}}}{dx^2}+\bar{k}^2\bar{\mathbf{E}}=-C\omega^2U\boldsymbol{\varphi} \tag{26}$$

для вектор-функции, у которой отличны от нуля только компоненты $\bar{E}_2$ и $\bar{E}_3$.

Будем решать задачу радиационно-кондуктивного теплообмена на отрезке $[-L/2,L/2]$ длиной L, заполненном средой. Вне отрезка находится вакуум, для которого $\varepsilon(\omega)=\mu=1$, $U\equiv 0$, поэтому уравнение (26) переходит в однородное:

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{E}}}{dx^2}+k^2\bar{\mathbf{E}}=0\,, \tag{27}$$

где $k=\omega/c$.

Уравнения (26) и (27) нужно решать совместно с граничными условиями непрерывности решения $\bar{\mathbf{E}}(x,\omega)$ и его производной по x на границах отрезка. Последнее гарантирует выполнимость физического требования непрерывности на границах магнитного поля $\bar{\mathbf{H}}(x,\omega)$, так как $\bar{\mathbf{H}}(x,\omega)=(i/k)d\bar{\mathbf{E}}/dx$. При этом вне среды нужно выбрать решение в виде расходящихся монохроматических волн с частотой ω, уходящих от отрезка $[-L/2,L/2]$ среды. Таким образом, вне среды решение имеет вид $\bar{\mathbf{E}}(x,\omega)=\mathbf{E}_{+,0}e^{-ik(x-L/2)}$ справа от отрезка при $x>L/2$, и слева от него – $\bar{\mathbf{E}}(x,\omega)=\mathbf{E}_{-,0}e^{ik(x+L/2)}$ при $x<-L/2$, где $\mathbf{E}_{\pm,0}$ – постоянные двухкомпонентные векторы, перпендикулярные 1 -й оси. Тогда решение $\bar{\mathbf{E}}(x,\omega)$ внутри отрезка $[-L/2,L/2]$ должно удовлетворять условиям

$$\bar{\mathbf{E}}(\pm L/2,\omega)=\mathbf{E}_{\pm,0}\,,\quad \bar{\mathbf{E}}'(\pm L/2,\omega)=\mp ik\mathbf{E}_{\pm,0}\,, \tag{28}$$

где штрихом обозначена производная по x. Условия (28) приводят к следующим смешанным условиям краевой задачи для уравнения (22):

$$\bar{\mathbf{E}}'(\pm L/2,\omega)=\mp ik\bar{\mathbf{E}}(\pm L/2,\omega)\,.$$

Так как $E_1=H_1=0$, то в одномерной задаче отлична от нуля только первая компонента $S_1\equiv S$ плотности потока энергии, для которой средняя спектральная плотность определяется интегралом

$$\langle\bar{S}(x,\omega)\rangle=\frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle[\bar{\mathbf{E}}(x,\omega'),\bar{\mathbf{H}}^*(x,\omega'-\omega)]_1\rangle d\omega'\,. \tag{29}$$

4. Решение стохастической краевой задачи. Введём функцию Грина одномерной краевой задачи на отрезке $[-L/2, L/2]$ для уравнения

$$G''(x,y,\omega) + \bar{k}^2 G(x,y,\omega) = \delta(x-y) \tag{30}$$

с граничными условиями

$$G'(\pm L/2, y, \omega) = \mp ikG(\pm L/2, y, \omega) \,. \tag{31}$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$G(x,y,\omega) = \frac{i}{2\bar{k}}\left(1 - \varkappa^2 e^{-2i\bar{k}L}\right)^{-1} \times$$
$$\times \left[e^{-i\bar{k}|x-y|} + 2\varkappa e^{-i\bar{k}L}\cos[\bar{k}(x+y)] + \varkappa^2 e^{-2i\bar{k}L} e^{i\bar{k}|y-x|}\right] \,, \tag{32}$$

где введён коэффициент отражения

$$\varkappa = \frac{\bar{k}-k}{\bar{k}+k} \,.$$

На основании функции Грина (32) получается выражение для фурье-компонент электрического и магнитного полей

$$\bar{\mathbf{E}}(x,\omega) = -C\omega^2 \int\limits_{-L/2}^{L/2} G(x,y,\omega) U(T(y,t),\omega) \boldsymbol{\varphi}(y,\omega) dy \,, \tag{33}$$

$$\bar{H}_j(x,\omega) = -\frac{ic}{\mu\omega}\epsilon_{1jl}\bar{E}'_l(x,\omega) \,, \quad j = 2,3 \,, \tag{34}$$

где ϵ_{jlm} – полностью антисимметричный символ Леви-Чивита и штрихом обозначена производная по x.

5. Вычисление потока энергии. Так как $\epsilon_{1jl}\epsilon_{1lm} = \delta_{1m}\delta_{1j} - 1$ и $\bar{E}_1(x,\omega') = \bar{E}_1(x,\omega'-\omega) = 0$, то, используя (34),

$$[\bar{\mathbf{E}}(x,\omega'), \bar{\mathbf{H}}^*(x,\omega'-\omega)]_1 = -\frac{ic}{\mu(\omega'-\omega)}\bar{E}_j(x,\omega')\bar{E}^{*\prime}_j(x,\omega'-\omega) \,.$$

Подставив результат этого вычисления в (25), находим

$$\langle \bar{S}(x,\omega) \rangle = \frac{c^2}{4i\pi\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \bar{E}_j(x,\omega')\bar{E}^{*\prime}_j(x,\omega'-\omega) \rangle \frac{d\omega'}{\omega'-\omega}$$

или, используя найденное выражение (33) для компонент электрического поля:

$$\langle\bar{S}(x,\omega)\rangle = C^2\frac{c^2}{4i\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^2(\omega'-\omega)\int\limits_{-L/2}^{L/2}G(x,y,\omega')U(T(y,t),\omega')\times$$

$$\times\int\limits_{-L/2}^{L/2}G^{*\prime}(x,y',\omega'-\omega)U^*(T(y',t),\omega'-\omega)\langle\varphi_j(y,\omega')\varphi_j^*(x,\omega'-\omega)\rangle dy'dyd\omega' .$$

На основании формулы (10) для коррелятора в подынтегральном выражении и формулы для постоянной C в (21) произведём преобразования

$$\langle\bar{S}(x,\omega)\rangle = -\delta(\omega)\frac{4i\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^3\int\limits_{-L/2}^{L/2}G(x,y,\omega')G^{*\prime}(x,y',\omega')|U(T(y,t),\omega')|^2dyd\omega' . \tag{35}$$

Так как поле $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ вещественное, то его фурье-образ обладает свойством $\bar{\mathbf{S}}^*(\mathbf{r},\omega) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r},-\omega)$. Принимая это во внимание, а также чётность относительно ω полученного выражения (35), заключаем, что функция $\langle\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r},\omega)\rangle$ вещественна. Тогда, применяя к правой части (35) операцию $\mathrm{Re}(\cdot)$, получаем следующую формулу для среднего значения фурье-образа потока энергии

$$\langle\bar{S}(x,\omega)\rangle = \delta(\omega)\frac{4\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^3\int\limits_{-L/2}^{L/2}|U(T(y,t),\omega')|^2\mathrm{Im}[G(x,y,\omega')G^{*\prime}(x,y,\omega')]dyd\omega' . \tag{36}$$

Воспользуемся общим свойством функции Грина $G(x,y,\omega)$ и найдём формулу для дивергенции (в данном случае производной по x) этого потока. Так как на основании (30) функция $G^*(x,y,\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$G^{*\prime\prime}(x,y,\omega) + \bar{k}^{*2}G^*(x,y,\omega) = \delta(x-y)\,, \tag{37}$$

то, умножив его на $G(x,y,\omega)$ и вычтя из него уравнение (30), умноженное на $G^*(x,y,\omega)$, получим

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Im}[G(x,y,\omega)G^{*\prime}(x,y,\omega)] = \mathrm{Im}[\bar{k}^2]|G(x,y,\omega)|^2+\delta(x-y)\mathrm{Im}G(x,x,\omega)\,. \tag{38}$$

Продифференцировав по x обе части формулы (36) и применив формулу (38), находим выражение для дивергенции фурье-образа потока энергии

$$\langle(\nabla, \bar{\mathbf{S}}(x,\omega))\rangle = -\delta(\omega)\frac{4\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^3\left[\frac{\gamma n}{c}\omega'\int\limits_{-L/2}^{L/2}|U(T(y,t),\omega')|^2|G(x,y,\omega')|^2dy - \right.$$

$$\left. - |U(T(x,t),\omega')|^2\mathrm{Im}G(x,x,\omega')\right]d\omega',$$

где мы воспользовались тем, что $\mathrm{Im}[\bar{k}^2] = -\gamma k_*$ с величиной $k_* = \omega'(n/c)$, определяемой, согласно (23), частотой ω' и оптическим показателем среды $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$. Тот факт, что полученное выражение пропорционально $\delta(\omega)$, указывает на то, что дивергенция потока энергии, вычисляемая согласно (24), уже не содержит быстрой зависимости от времени,

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{4\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^3\left[\frac{\gamma n}{c}\omega'\int\limits_{-L/2}^{L/2}|U(T(y,t),\omega')|^2|G(x,y,\omega')|^2dy - \right.$$

$$\left. - |U(T(x,t),\omega')|^2\mathrm{Im}G(x,x,\omega')\right]d\omega'. \tag{39}$$

Так как $\bar{k}^2 \equiv \bar{k}^2(\omega) = k_*^2 - i\gamma k_*$ обладает свойством $\bar{k}^{2*}(\omega) = \bar{k}^2(-\omega)$, то уравнение (37) записывается в виде

$$G^{*\prime\prime}(x,y,\omega) + \bar{k}^2(-\omega)G^*(x,y,\omega) = \delta(x-y).$$

Кроме того, так как функция $k(\omega) = \omega/c \equiv k(\omega)$ обладает свойством $k(\omega) = -k(-\omega)$, то граничные условия, однозначно определяющие вместе с этим уравнением функцию $G^*(x,y,\omega)$, записываются как

$$G'^*(\pm L/2, y, \omega) = \mp k(-\omega)G^*(\pm L/2, y, \omega).$$

Сравнивая, соответственно, с уравнением (30) и с граничными условиями (31), находим, что $G^*(x,y,\omega) = G(x, y-\omega)$. Точно так же, так как случайные поля $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r},t)$ вещественны, соответствующие фурье-образы $\bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega)$ удовлетворяют соотношениям $\bar{\tilde{\mathbf{P}}}^*(\mathbf{r},\omega) = \bar{\tilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},-\omega)$, $\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{r},\omega) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},-\omega)$.

Тогда из формулы (8) следует, что функция $U(T,\omega)$ также обладает аналогичным свойством $U^*(T,\omega) = U(T,-\omega)$. Исходя из этого и аналогичного свойства функции Грина, можно утверждать, что подынтегральное выражение в (39) чётно относительно ω, поэтому

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{8\mu}{c^2}\int\limits_0^\infty \omega^3 \left[\frac{\gamma n}{c}\omega \int\limits_{-L/2}^{L/2} |U(T(y,t),\omega)|^2 |G(x,y,\omega)|^2 dy - \right.$$

$$\left. - |U(T(x,t),\omega)|^2 \mathrm{Im} G(x,x,\omega)\right] d\omega\,. \tag{40}$$

6. Случай высоких температур. Нашей следующей задачей является вывод из (40) более простой формулы для дивергенции потока энергии при радиационно-кондуктивном теплообмене в более конкретной физической ситуации. Механизм радиационно-кондуктивного теплообмена вносит существенный вклад в изменение распределения температуры в полупрозрачном диэлектрике в том случае, когда его характерная температура достаточно высока. В этом случае характерные частоты излучаемых атомами фотонов должны быть такими, чтобы соответствующие им энергии были порядка порядка этой температуры, выраженной в энергетических единицах. Температура, равная средней энергии, которая соответствует этой частоте $\approx 2\cdot 10^{14}$с$^{-1}$, имеет порядок 10^3K, т.е. сравнима с температурой плавления вещества диэлектрика.

Естественно связать величину $|U(T,\omega)|^2$ со средней энергией излучаемых фотонов частотой ω. Так как физическая размерность фурье-образа $\tilde{\bar{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$ электрической поляризации равна эрг/см$^{3/2}\cdot$с, а размерность величины $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega)$ равна с$^{1/2}$/см$^{3/2}$, то физическая размерность величины $|U(T,\omega)|^2$ имеет размерность действия эрг$\cdot$с. В связи с этим, введя феноменологическую среднюю частоту τ^{-1} внутриатомных энергетических переходов, которые приводят к излучению фотонов, положим, что

$$|U(T,\omega)|^2 = \tau\hbar\omega W(\hbar\omega/T)\,, \tag{41}$$

где $W(\cdot)$ – плотность распределения числа фотонов по энергиям. Мы считаем, эта плотность зависит только от отношения энергии фотона $\hbar\omega$ частотой ω к температуре T фотонного газа, которая измеряется в энергетических единицах. В частности, в случае модели абсолютно чёрного тела, плотность $W(\cdot)$

имеет форму планковской функции распределения $W(\zeta) = (e^{\zeta} - 1)^{-1}$. При этом интеграл (9) пропорционален средней энергии газа фотонов. В рассматриваемом случае формула (40) принимает вид

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{8\mu\tau c^2}{(nT_0L)^4}\left[\frac{\gamma}{T_0L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} T^6(y,t)\int\limits_0^{\infty}\zeta^5 W(\zeta)|G(x,y,\omega_y)|^2 d\zeta dy - \right.$$

$$\left. - T^5(x,t)\int\limits_0^{\infty}\zeta^4 W(\zeta)\mathrm{Im}G(x,x,\omega_x)d\zeta\right], \qquad (42)$$

где $\omega_y = T(y,t)\zeta/\hbar$ в интеграле по безразмерной переменной ζ и введена характерная температура $T_0 = \hbar c/nL$.

Оценим численное значение температуры T_0. Будем исходить из величины $n = 1,5$ и $L = 1$см. Тогда, принимая $\hbar \approx 10^{-27}$эрг·с, $c/n \approx 2\cdot 10^{10}$см/с, находим, что $T_0 = 2\cdot 10^{-17}$эрг$\cdot 1,4\cdot 10^{-16}$ К/эрг $= 1,5\cdot 10^{-1}$К. Следовательно, отношение типичной температуры $T(y,t) \approx 10^2 \div 10^3$К к T_0 в рассматриваемой нами физической ситуации представляет собой большой параметр $\approx 10^4$, что мы примем во внимание при вычислении интеграла в (42).

Оценим теперь величину $\bar{k}L$ в формуле (32) в области интегрирования по ζ, где отношение $T(y,t)\zeta/T_0$ представляет собой большую величину:

$$\bar{k}L = \frac{T(y,t)\zeta}{T_0}\left(1 - i\gamma L\frac{T_0}{T(y,t)\zeta}\right)^{1/2} \approx \frac{T(y,t)\zeta}{T_0} - \delta\,,$$

и отношение $\delta = \gamma L/2$ характеризует оптическую длину затухания электромагнитного поля в среде. Его типичное значение в рассматриваемом нами случае изменяется в пределах $\delta = 0,1 \div 10$, поэтому второе слагаемое в скобках очень мало по сравнению с первым.

Используя полученное приближённое выражение для $\bar{k}L$, находим для коэффициента отражения

$$\varkappa = \frac{\bar{k} - k}{\bar{k} + k} \approx \frac{T(y,t)\zeta(1 - n^{-1})/T_0 - i\delta}{T(y,t)\zeta(1 + n^{-1})/T_0 - i\delta} \approx \frac{n-1}{n+1},$$

где поправочное слагаемое имеет порядок $\delta T_0/T(y,t)\zeta$ и представляет, таким образом, очень малую величину в допустимом диапазоне изменения δ. Поэтому при вычислении интеграла в (40) можно положить коэффициент $\varkappa$

чисто вещественным и не зависящем от распределения температуры и переменной интегрирования ζ. По той же причине можно положить величину $\bar{k}^{-1}$ в выражении для $|G(x,y,\omega)|^2$ равной $\bar{k}^{-1} \approx T_0L/T(y,t)\zeta$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае величина $G(x,y,\omega_y)$ в подынтегральном выражении в (42) даётся приближённой формулой:

$$|G(x,y,\omega_y)|^2 = \left(\frac{T_0L}{2T(y,t)\zeta}\right)^2 |R(x,y,\zeta;T)|^2\,,$$

$$\mathrm{Im}G(x,x,\omega_x) = \left(\frac{T_0L}{2T(y,t)\zeta}\right) \mathrm{Re}R(x,x,\zeta;T)\,,$$

где ядро $R(z,y,\zeta;T)$ функционально зависит от распределения температуры и имеет вид

$$R(x,y,\zeta;T) = \left(1-(\varkappa e^{-\delta})z_-\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(u_-P_- + (\varkappa e^{-\delta})^2 u_+P_+z_-^2 + (\varkappa e^{-\delta})z_-[v_+Q_+ + v_-Q_-]\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z_-^n(\varkappa e^{-\delta})^n \left(u_-P_- + (\varkappa e^{-\delta})^2 u_+P_+z_-^2 + (\varkappa e^{-\delta})z_-[v_+Q_+ + v_-Q_-]\right)\,;$$

$$z_\pm = e^{\pm iT\zeta/T_0}\,, \quad z_+z_- = 1\,;$$
$$u_\pm = \exp\left(\pm i\frac{T\zeta}{T_0L}|x-y|\right)\,, \quad u_+u_- = 1\,;$$
$$v_\pm = \exp\left(\pm i\frac{T\zeta}{T_0L}(x+y)\right)\,, \quad v_+v_- = 1\,;$$
$$P_\pm = e^{\pm\delta|x-y|/L}\,, \quad P_+P_- = 1\,; \quad Q_\pm = e^{\pm\delta(x+y)/L}\,, \quad Q_+Q_- = 1\,,$$

где мы для краткости записи опустили аргументы в распределении температуры $T(y,t)$.

На основании (32) и (42) поток энергии можно представить в виде

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{2\mu\tau c^2}{n^4(T_0L)^3}\left[\gamma\int\limits_{-L/2}^{L/2} T^4(y,t)K(x,y;T)dy - 2I(x;T)T^4(x,t)\right]\,, \tag{43}$$

где введены обозначения

$$K(x,y;T) = \int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta)|R(x,y,\zeta;T)|^2 d\zeta\,, \tag{44}$$

$$I(x;T) = \int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) \mathrm{Re} R(x,x,\zeta;T) d\zeta \,. \tag{45}$$

Ввиду большой величины отношения T/T_0 внутренний интеграл в (42) представляет собой быстро осциллирующую функцию. Мы вычислим главный член асимптотики этого интеграла при $T/T_0 \to \infty$.

Подставляя разложение для $|R(x,y,\zeta;T)|^2$ в формулу (44), находим

$$\begin{aligned} K(x,y;T) = \sum_{n_+,n_-=0}^{\infty} \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^{2(n_++n_-)} \int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) z_+^{n_+} z_-^{n_-} \Big[P_-^2 + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^4 P_+^2 + \\ +(\varkappa e^{-\delta})^2 \left(Q_+^2 + Q_-^2\right) + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^2 \left(z_-^2 u_+^2 + z_+^2 u_-^2 + v_+^2 + v_-^2\right) + \\ + \left(\varkappa e^{-\delta}\right) z_- P_- u_+ [Q_+ v_+ + Q_- v_-] + \left(\varkappa e^{-\delta}\right) z_+ P_- u_- [Q_+ v_- + Q_- v_+] + \\ + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^3 z_- P_+ u_+ [Q_+ v_- + Q_- v_+] + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^3 z_+ P_+ u_- [Q_+ v_+ + Q_- v_-] \Big] d\zeta \,. \end{aligned} \tag{46}$$

Асимптотику ядра $K(x,y;T)$ найдём посредством вычисления асимптотики каждого отдельного слагаемого в (46), что допустимо, так как ряд мажорируется рядом по степеням $(\varkappa e^{-\delta})^{2(n_++n_-)}$. Так как $W(0) < \infty$, то каждый член ряда

$$\int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) z_+^{n_++m_-} z_-^{n_-+m_+} u_+^{l_+} u_-^{l_-} v_+^{m_+} v_-^{m_-} d\zeta = \int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) e^{i\Lambda\zeta} d\zeta \,,$$

определяемый набором показателей $n_\pm = 0,1,2,\ldots$; $l_\pm = 0,1,2$; $m_\pm = 0,1,2$, где $l_+ l_- = 0$, $m_+ m_- = 0$, $l_+ + l_- + m_+ + m_- = 0,2$;

$$\Lambda = \frac{T}{T_0}\left(n_+ + m_- - n_- - m_+ + \frac{l_+ - l_-}{L}|x-y| + \frac{m_+ - m_-}{L}(x+y) \right) ,$$

оценивается посредством трёхкратного интегрирования по частям,

$$\int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) e^{i\Lambda\zeta} d\zeta = i\Lambda^{-3} \int\limits_0^\infty e^{i\Lambda\zeta} \frac{d^3}{d\zeta^3}\left[\zeta^3 W(\zeta)\right] d\zeta = O(\Lambda^{-3}) \,,$$

если $\Lambda \neq 0$. При этом величина Λ пропорциональна большому параметру T/T_0. В связи с этим главное значение ядра $K(x,y;T)$ дают члены ряда, у которых $\Lambda = 0$. Это равенство имеет место, только если по отдельности выполняются равенства

$$n_+ + m_- = n_- + m_+\,, \quad |l_+ - l_-||x-y| = |m_+ - m_-||x+y| = L\,.$$

Второе равенство при любых допустимых не равных нулю значениях чисел $l_\pm$, $m_\pm$ возможно только в том случае, когда $x = y$, $x = -y$. Тогда, $l_+ = l_- = m_+ = m_- = 0$, что на основании первого из выписанных условий приводит к равенству $n_+ = n_-$. Таким образом, оставляя в сумме (46) только слагаемые, удовлетворящие этим условиям, которые уже не зависят от ζ, получим

$$K(x,y;T) = E\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varkappa e^{-\delta}\right)^{4n}\left[P_-^2 + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^4 P_+^2 + (\varkappa e^{-\delta})^2\left(Q_+^2 + Q_-^2\right)\right] =$$

$$= \frac{E}{1-(\varkappa e^{-\delta})^4}\left[P_-^2 + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^4 P_+^2 + (\varkappa e^{-\delta})^2\left(Q_+^2 + Q_-^2\right)\right]\,, \qquad (48)$$

где

$$E = \int_0^\infty \zeta^3 W(\zeta)d\zeta\,.$$

Аналогичным методом вычислим асимптотику величины $I(x;T)$. Подставляя в (45) разложение в ряд функции $\mathrm{Re}R(x,x,\zeta;T)$, находим

$$I(x;T) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varkappa e^{-\delta}\right)^{2n}\times$$

$$\times\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) z_-^n\left[1 + z_-^2\left(\varkappa e^{-\delta}\right)^2 + z_-\left(\varkappa e^{-\delta}\right)\left(v_x^2 P_x^2 + v_x^{-2}Q_x^{-2}\right)\right]d\zeta\,,$$

где $v_x = \exp\left(ixT(x,t)/LT_0\right)$, $P_x = \exp(\delta x/L)$. Асимптотика каждого члена этого ряда

$$\mathrm{Re}\int_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) z_-^{n+|m|} v_x^{2m} d\zeta = \mathrm{Re}\int_0^\infty \zeta^3 W(\zeta) e^{-i\Gamma\zeta} d\zeta = O(\Gamma^{-3})\,,$$

$$\Gamma = \frac{T(x,t)}{T_0}\left[n + |m| - \frac{2mx}{L}\right]\,, \quad m = 0, \pm 1$$

не является малой только в том случае, когда $\Gamma = 0$, то есть при $n + |m| = 2mx/L$ при произвольном значении $x \in [-L/2, L/2]$. Это возможно только при $n = m = 0$. Тогда $I(x;T) = E + O(\Gamma^{-3})$. Это соотношение вместе с (43), (48) дают окончательное выражение для искомой плотности потока энергии:

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{2\alpha\gamma}{1-(\varkappa e^{-\delta})^4}\int\limits_{-L/2}^{L/2} T^4(y,t)\times$$

$$\times\Big[\exp\left(-2\delta|x-y|/L\right) + \left(\varkappa e^{-\delta}\right)^4 \exp\left(2\delta|x-y|/L\right) +$$

$$+ 2\left(\varkappa e^{-\delta}\right)^2 \operatorname{ch}\left[2\delta(x+y)/L\right]\Big]\,dy + 4\alpha T^4(x,t)\,, \qquad (49)$$

где введён коэффициент α, который в терминах универсальных констант имеет вид

$$\alpha = \frac{\mu\tau c^2 E}{n^4(T_0L)^3} = \tau\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\frac{q^4}{\hbar^3 c}E$$

в том случае, если температура выражается в градусах, $q = 1,4\cdot10^{-16}$эрг/К – постоянная Больцмана.

В выражении (49) интегральное ядро универсально. Оно не зависит от функции распределения $W(\cdot)$ фотонов. В частности, при большой величине $\delta \gg 1$ последними двумя слагаемыми в подынтегральном выражении можно пренебречь, а оставшееся ядро $e^{-2\delta|x-y|/L}$ превращается в δ-функцию $2\gamma^{-1}\delta(x-y)$. Тогда интегральное слагаемое в (49) при $\delta\to\infty$ стремится к $(-4\alpha T^4(x,t))$, поэтому в указанном пределе второе слагаемое в правой части эволюционного уравнения (1) обращается в нуль $(\nabla, \mathbf{S}(x,t)) = 0$, то есть в случае сильного поглощения весь теплообмен определяется теплопроводностью.

В случае слабого поглощения $\gamma\to 0$ первое слагаемое в потоке энергии равно нулю, в то время как последнее слагаемое в (49) не исчезает при $\gamma = 0$, и в этом случае $\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -4\alpha T^4(x,t)$ и среда остывает благодаря радиационно-кондуктивному теплообмену, что естественно с физической точки зрения. Оценим в этом случае вклад радиационно-кондуктивного теплообмена в виде (50) в эволюцию распределения температуры согласно уравнению (1). При $\varepsilon\approx 1$, $\mu\approx 1$, $E\approx 1$, положив $\tau\approx 10^{-14}$с, получим, что величина (50) в том случае, когда $T = 10^3$К, равна

$$\left(\frac{10^{-14}\cdot(10^{-16})^4}{3\cdot10^{10}\cdot(10^{-27})^3}\right)(10^3)^4 = 10^5\text{эрг/см·с·К}\,.$$

Слагаемое же в уравнении (1), ответственное за теплопроводность, имеет порядок 10^7эрг/см^3·с при $L\approx 1$см и при коэффициенте теплопроводности

$\kappa \approx 10^4$эрг/см·с·К и той же температуре $T = 10^3$К. Таким образом, при слабом поглощении радиационно-кондуктивный теплообмен даёт лишь малую относительную поправку $\sim 10^{-2}$.

Литература

1. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М.Спэрроу, Р.Д.Сесс. – Л.: Энергия, Ленинградское отд.,1972. – 295 с.
2. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах / Н.А.Рубцов – Новосибирск: Наука, Сибирское отд.,1984. – 278 с.
3. Петров В.А.Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах / В.А.Петров, Н.В.Марченко. - Москва: Наука,1985. – 190 с.
4. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. т.II. Случайные поля. – Изд.2-е / С.М.Рытов, Ю.А.Кравцов, В.И.Татарский. – М.: Наука,1978. – 464 с.
5. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е.Тамм. – М.: Наука, 1988.
6. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен / М.Н. Оцисик. – Москва: Мир,1976. – 616 с.
7. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р.Зигель, Дж.Хауэлл. – М.: Мир,1975. – 934 с.

ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF HEAT RADIATIVE CONDUCTANCE. FLUCTUATION APPROACH

Yu.P.Virchenko, M.A.Saprykin

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

One-dimensional problem of the heat radiative conductance in the dielectric medium with homopolar chemical bond is considered. On the basis of presentation that the heat exchange is done by means of electromagnetic field generated thermal fluctuations of the medium electrical polarization, it is calculated the energy flux of the fluctuative field in the form of the functional on local temperature. It permits to formulate the complete evolution of the heat transfer in the medium.

Key words: radiative conductance of heat, electrical polarization, fluctuations, gaussian random field, Maxwell equations, Stefan-Boltzmann law, energy flux, temparture distribution.